

UNIVERSITÉ DE TOURS

ÉCOLE DOCTORALE :
ÉNERGIE, MATÉRIAUX, SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS

ÉQUIPE de RECHERCHE :
LABORATOIRE DE MÉCANIQUE GABRIEL LAMÉ

THÈSE présentée par :
Cherif SNOUN

Soutenue le : 16 juillet 2020

Pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Tours**
Discipline/S cialit  : Génie Mécanique et Productique

**Contrôle passif des vibrations des systèmes
mécaniques à l'aide d'absorbeurs dynamiques non
linéaires avec prise en compte des incertitudes**

THÈSE dirigée par :

M. Sébastien BERGER Professeur, INSA Centre Val de Loire
M. Baptiste BERGEOT MCF, INSA Centre Val de Loire

RAPPORTEURS :

M. Sergio BELLIZZI Directeur de recherche, CNRS
M. Jean-Jacques SINOUE Professeur, Ecole Centrale de Lyon

JURY :

M. Sergio BELLIZZI	Directeur de recherche, CNRS	Rapporteur
M. Jean-Jacques SINOUE	Professeur, �cole Centrale de Lyon	Rapporteur
M. Eduardo SOUZA	Professeur, INSA de Rouen	Examineur
M. Gaël CHEVALLIER	Professeur, Université de Franche-Comté	Examineur
Mme. Marie-Laure GOBERT	MCF, INSA Centre Val de Loire	Examinatrice
M. Florian LACROIX	Professeur, Université de Tours	Président du jury
M. Sébastien BERGER	Professeur, INSA Centre Val de Loire	Directeur
M. Baptiste BERGEOT	MCF, INSA Centre Val de Loire	Co-encadrant

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique Gabriel LaMé dans les locaux de l'INSA Centre-Val de Loire.

Mes premiers remerciements vont vers Monsieur Sébastien BERGER, Professeur à l'INSA Centre Val de Loire et directeur de cette thèse, et Monsieur Baptiste BERGEOT, Maître de Conférences à l'INSA Centre Val de Loire et co-encadrant de cette thèse, pour le privilège qu'ils m'ont offert en m'accueillant dans leur équipe. J'ai très sincèrement apprécié leur disponibilité, leurs conseils ainsi que leur patience. Je suis conscient d'avoir bénéficié d'un encadrement exceptionnel, sans lequel les objectifs de cette thèse n'auraient pas été atteints.

Je souhaite remercier très sincèrement Monsieur Jean-Jacques SINOÛ, Professeur à l'École Centrale de Lyon, et Monsieur Sergio BELLIZZI, Directeur de recherche au CNRS, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter ce travail.

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur Eduardo SOUZA, Professeur à l'INSA de Rouen, Monsieur Gaël CHEVALLIER, Professeur à l'Université de Franche-Comté, Monsieur Florian LACROIX, Professeur à l'Université de Tours et Madame Marie-Laure GOBERT, Maître de Conférences à l'INSA Centre Val de Loire, pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Il m'est aussi particulièrement agréable de remercier Monsieur Duc Thinh KIEU, Maître de Conférences à l'Université des mines et de géologie de Hanoï, qui m'a beaucoup aidé tout au long de ces années de thèse.

Je tiens également à remercier les Professeurs, les Maîtres de conférences, les collègues et les personnels du laboratoire de Mécanique Gabriel LaMé dans les locaux de Polytech Tours et de l'INSA Centre-Val de Loire pour leurs aide et leur soutien.

Je n'oublie évidemment pas de remercier mes parents, ma famille et mes proches qui m'ont toujours soutenus et qui ont été toujours à mes côtés.

Résumé

Face à l'augmentation des exigences à la fois économiques et de santé publique, les industriels sont dans la nécessité de concevoir des systèmes mécaniques de plus en plus performants et respectant un certain niveau de confort acoustique. En mécanique ou en acoustique, le contrôle de vibrations est un champ de recherche très actif. Trois grands types de technologie sont majoritairement utilisées dans l'industrie : le contrôle passif par dissipation, le contrôle passif à l'aide d'absorbeurs linéaires accordés et le contrôle actif, chacune de ses techniques possédant ses avantages et ses inconvénients. Depuis une quinzaine d'années, l'utilisation d'absorbeurs non linéaires de type NES (« Nonlinear Energy Sink » en anglais), typiquement un système masse-ressort-amortisseur à raideur purement non linéaire, a montré son efficacité comme solution alternative de contrôle passif des vibrations en conciliant les avantages des technologies existantes. Cependant, le comportement dynamique du système couplé constitué du NES et du système primaire à protéger peut s'avérer très sensible aux paramètres qui admettent une dispersion importante. Notamment, lorsqu'il s'agit d'atténuer une instabilité dynamique (comme c'est le cas dans cette thèse) une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire du système peut s'observer, ce dernier passant brutalement d'un régime atténué (où le NES agit) à un régime non atténué (où le NES n'agit pas). Un régime non atténué étant potentiellement dangereux, il est important d'être en mesure, en prenant en compte les incertitudes paramétriques auxquelles le système primaire peut être confronté, de concevoir un NES qui soit robuste, c'est-à-dire fonctionnant au maximum dans la région de l'espace des paramètres incertains correspondant à des régimes non atténués.

Dans la première partie, des méthodes basées sur le formalisme du chaos polynomial sont proposées pour la localisation, dans l'espace des paramètres incertains du système primaire, de la frontière entre la région correspondant aux régimes atténués et celle correspondant aux régimes non atténués, permettant ainsi le calcul de la propension du système couplé à être dans un régime atténué. Ces méthodes sont ensuite appliquées aux cas d'un système frottant à deux degrés de liberté (le modèle dit de Hultèn) couplé à deux NES identiques. Les résultats montrent d'une part que les méthodes basées sur le chaos polynomial permettent de réduire significativement le coût de calcul par rapport à la méthode de référence en conservant une bonne précision et d'autre part que la méthode basée sur le chaos polynomial multi-éléments est la plus appropriée.

Dans la deuxième partie, une méthodologie d'optimisation des NES sous incertitudes est développée. Deux approches sont proposées, à chaque fois basées sur la maximisation, sous incertitudes des paramètres du système primaire, de la propension du système couplé à être dans un régime atténué. La première approche considère que les paramètres des NES sont déterministes et sont donc les variables de conception à optimiser. La seconde méthode considère que les paramètres des NES sont également incertains mais avec une loi de probabilité connue. Ainsi, les variables de conception à optimiser ne sont plus directement les paramètres des NES mais l'une de leurs statistiques (la moyenne est retenue dans ce travail) appelées hyper-paramètres. Les résultats obtenus sont comparés à une optimisation déterministe de référence. L'efficacité des méthodes proposées, basées sur le chaos polynomial, à réduire significativement le coût de calcul en gardant une bonne précision est mise en évidence.

Mots-clés : dynamiques non linéaire, contrôle passif des vibrations, absorbeurs dynamiques non linéaires, incertitudes, chaos polynomial, optimisation robuste.

Abstract

Faced with increasing economic and public health requirements, industrialists are faced with the need to design increasingly efficient mechanical systems that respect a certain level of acoustic comfort. In mechanics or acoustics, vibration control is a very active field of research. Three main types of technology are mainly used in industry : passive control by dissipation, passive control using tuned linear absorbers and active control. Each of these techniques having its advantages and disadvantages. Over the past fifteen years, the use of passive nonlinear absorbers called Nonlinear Energy Sink (NES), typically a purely nonlinear stiffness mass-spring-damper system, has proven its effectiveness as an alternative solution for passive vibration control by combining the advantages of the existing technologies. However, the dynamic behavior of the coupled system consisting of the NES and of the primary system to be protected can be very sensitive to parameters with high dispersion. In particular, when mitigating dynamic instabilities (as it is the case in this thesis), a discontinuity in the vibration amplitude profile of the system can be observed, the latter switches suddenly from a mitigated regime (where the NES acts) to an unmitigated regime (where the NES does not act). Since an unmitigated regime is potentially dangerous, it is important to be able, taking into account the parameter uncertainties that the primary system may face, to design an NES that is robust, i.e. operating at maximum within the region of the uncertain parameters space corresponding to unmitigated regimes of the primary system.

In the first part, methods based on the polynomial chaos theory are proposed for locating, in the uncertain parameters space of the primary system, the boundary between the region corresponding to mitigated regimes and that corresponding to unmitigated regimes. This allows us to calculate of the propensity of the system to undergo a Harmless Steady-State Regime (PHSSR). These methods are then applied to the cases of a two-degree-of-freedom friction system (the so-called Hult n's model) coupled to two identical NES. The results show, on the one hand, that the methods based on polynomial chaos allow a significant reduction of the computation cost compared to the reference method while maintaining a good accuracy and, on the other hand, that the method based on multi-element polynomial chaos (called ME-gPC method) is the most suitable.

In the second part, a methodology of optimization under uncertainty of the NES is developed. Two approaches are proposed, both are based on maximizing, under uncertainties of the primary system parameters, the PHSSR. The first approach considers that the NES parameters are deterministic and are therefore the design variables to be optimized. The second approach considers that the NES parameters are also uncertain but with a known probability distribution. Thus, the design variables to be optimized are no longer directly the parameters of the NES but one of their statistics (the mean is used in this work) called hyper-parameters. The results obtained with the ME-gPC method are compared with a reference deterministic optimization. The efficiency of the proposed methods to significantly reduce the computation cost while maintaining of good precision of the PHSSR predictions is highlighted.

Keywords : nonlinear dynamics, passive vibration control, nonlinear energy sink, uncertainties, polynomial chaos, robust optimization.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Étude bibliographique	5
1.1 Introduction	6
1.2 Systèmes frottants	6
1.2.1 Introduction	6
1.2.2 Vibrations induites par le frottement	7
1.2.3 Mécanisme de couplage de modes	7
1.2.4 Conclusion	10
1.3 Approches robustes des systèmes dynamiques	10
1.3.1 Introduction	10
1.3.2 Classification des incertitudes	10
1.3.3 Modélisation et propagation des incertitudes	11
1.3.4 Le chaos polynomial et l'analyse du comportement dynamique des systèmes frottants	15
1.3.5 Conclusion	16
1.4 Contrôle des vibrations induites par le frottement	16
1.4.1 Introduction	16
1.4.2 Techniques usuelles	16
1.4.3 Techniques utilisant des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	17
1.4.4 Conclusion	19
1.5 Optimisation des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	19
1.5.1 Introduction	19
1.5.2 Principe et formalisme de l'optimisation	19
1.5.3 Techniques d'optimisation appliquées aux absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	21
1.5.4 Conclusion	22
1.6 Conclusion	23
I Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial	25
2 Éléments de théorie	27
2.1 Introduction	28
2.2 Dynamique des systèmes mécaniques non linéaires	28
2.2.1 Stabilité	28
2.2.2 Détermination des cycles limites par la méthode d'intégration temporelle	30
2.3 Quantification des incertitudes	30
2.3.1 Méthode de Monte Carlo	30
2.3.2 Chaos polynomial généralisé	31

2.3.3	Chaos polynomial généralisé multi-éléments	35
2.4	Conclusion	37
3	Propension à être dans un régime atténué	39
3.1	Introduction	40
3.2	Description du modèle de frein couplé à deux NES	40
3.3	Analyse de stabilité par la méthode indirecte de Lyapunov	41
3.3.1	Analyse de stabilité du modèle de Hultén sans NES	43
3.3.2	Analyse de stabilité du modèle de Hultén avec NES	44
3.4	Étude des cycles limites	44
3.4.1	Étude des cycles limites du système sans NES	46
3.4.2	Étude des cycles limites du système avec NES	46
3.5	Propension à être dans un régime atténué	48
3.6	Conclusion	49
4	Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial	51
4.1	Introduction	52
4.2	Méthodes de prédiction de la propension à être dans un régime atténué	52
4.2.1	Méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé	52
4.2.2	Méthode basée sur le chaos polynomial multi-éléments (Méthode ME-gPC)	55
4.3	Application et résultats	57
4.3.1	Référence	57
4.3.2	Méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé	61
4.3.3	Utilisation du chaos polynomial Généralisé-Multi-élément	66
4.4	Conclusion	73
II	Optimisation sous incertitudes d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	75
5	Étude théorique du modèle de système frottant couplé à deux NES	77
5.1	Introduction	78
5.2	Analyse asymptotique du modèle	78
5.2.1	Réécriture des équations du mouvement	78
5.2.2	Calcul du flot lent	79
5.2.3	Calcul de la variété critique	81
5.3	Lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites	84
5.4	Conclusion	84
6	Résultats de l'optimisation sous incertitudes des NES	87
6.1	Introduction	88
6.2	Méthodologie de l'optimisation sous incertitude	88
6.2.1	Variables de conceptions déterministes (cas P)	88
6.2.2	Variables de conception stochastiques (cas HP)	88
6.3	Nouveau critère de saut	89
6.4	Résultats de l'optimisation avec paramètres de conception déterministes	89
6.4.1	Optimisation du coefficient d'amortissement du NES η_h	90
6.4.2	Optimisation de la raideur non linéaire du NES φ_h	93
6.4.3	Optimisation du coefficient d'amortissement η_h et de la raideur non linéaire φ_h	98
6.5	Résultats de l'optimisation avec paramètres de conception stochastiques	103

6.5.1	Optimisation HP du coefficient d'amortissement η_h	103
6.5.2	Optimisation HP de la raideur non linéaire φ_h	105
6.6	Conclusion	107
Conclusion générale et Perspectives		109
Bibliographie		111
A Articles et Conférences		123
A.1	Article dans une revue internationale	123
A.2	Conférences et Séminaires	123

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les incertitudes épistémiques et les incertitudes aléatoires.	11
1.2	Méthodes de quantification des incertitudes.	11
2.1	Correspondance entre les familles de polynômes orthogonaux et les distributions des variables aléatoires	32
4.1	Résultats de la référence, le paramètre μ est incertain.	59
4.2	Résultats de la référence, les deux paramètres μ et η_1 sont incertains.	60
4.3	Comparaison entre les résultats trouvés par la méthode gPC1 et la référence.	62
4.4	Comparaison entre les résultats trouvés par la méthode gPC2 et la référence.	65
4.5	Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur la ME-gPC, $\theta_2 = 1\%$ et le paramètre μ est incertain.	69
4.6	Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur la ME-gPC, $\theta_2 = 5\%$ et le paramètre μ est incertain.	70
4.7	Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur le ME-gPC, $\theta_2 = 1\%$ et les deux paramètres μ et η_1 sont incertains.	72
4.8	Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur le ME-gPC, $\theta_2 = 5\%$ et les deux paramètres μ et η_1 sont incertains.	72
4.9	Comparaison des résultats entre la méthode gPC2 et la méthode ME-gPC.	74
6.1	Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est η_h	92
6.2	Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est φ_h	97
6.3	Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Les paramètres de conception sont η_h et φ_h	102
6.4	Résultats de l'optimisation de référence. Le paramètre de conception est $\hat{\eta}_h$	103
6.5	Résultats de l'optimisation avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\eta}_h$	104
6.6	Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\eta}_h$	105
6.7	Résultats de l'optimisation de référence. Le paramètre de conception est $\hat{\varphi}_h$	106
6.8	Résultats de l'optimisation avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\varphi}_h$	107
6.9	Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\varphi}_h$	108

Liste des figures

1.1	Modèle de Hoffmann à deux degrés de liberté [60].	8
1.2	Évolutions des parties réelles et imaginaires du système d'équations 1.4. (a) Partie réelle; (b) Partie imaginaire	9
3.1	Modèle de Hultèn sans NES.	41
3.2	(a) Modèle de Hultèn sans NES. (b) Zoom sur le NES ₁ et (c) Zoom sur le NES ₂ . . .	42
3.3	Évolution des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres du système mécanique sans NES (3.1) en fonction du coefficient de frottement. (a) Parties réelles des deux modes et (b) parties imaginaires d'un des deux modes (celles du second mode étant les opposées du premier). Le jeu de paramètres (3.9) est utilisé.	44
3.4	Évolution, en fonction du coefficient de frottement μ , des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres du système mécanique sans NES (3.1) (en pointillé bleu) et des huit valeurs propres du système mécanique avec NES (3.2) (en rouge). (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires. Le jeu de paramètres (3.10) est utilisé.	45
3.5	Évolution, en fonction du coefficient de frottement μ , des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres du système mécanique sans NES (3.1) (en bleu) et avec NES (en rouge). Seul les deux modes correspondant au système primaire seul sont représentés. (a) Parties réelles des deux modes et (b) parties imaginaires d'un des deux modes (celles du second mode étant les opposées du premier). Le jeu de paramètres (3.10) est utilisé.	45
3.6	Intégration temporelle numérique de (3.1) . (a) déplacement x_1 en fonction du temps et (b) portrait de phase dans le plan $(x_1, \frac{dx_1}{dt})$. Le jeu de paramètre (3.9) est utilisé avec $\mu = 0.3$	46
3.7	Comparaison entre $x_1(t)$ résultant de l'intégration numérique des systèmes frottants avec et sans NES (3.1) et (3.2). (a et b) Suppression complète, $\mu = 0,16$; (c et d) atténuation par réponse périodique, $\mu = 0,18$; (e et f) atténuation par réponse fortement modulée (SMR), $\mu = 0,2$; (g et h) pas d'atténuation, $\mu = 0,22$. Le jeu des paramètres (3.10) est utilisé.	47
3.8	Amplitudes A_1^{wNES} et A_1^{woNES} en fonction du coefficient de frottement μ . L'ensemble des paramètres Eq. (3.10) est utilisé.	48
4.1	Algorithme de la méthode gPC1.	54
4.2	Variation des amplitudes des cycles limites A_1^{wNES} du système mécanique avec NES et A_1^{woNES} su système sans NES en fonction du coefficient d'amortissements η_1 pour (a) $\mu = 0.3$ et (b) $\mu = 0.4$. $N_{\eta_1} = 250$	55
4.3	Algorithme de la méthode gPC2.	56
4.4	Exemple de la variation de l'amplitude du déplacement du système avec NES en fonction de μ . L'ordre de gPC est $p = 20$ et $\eta_1 = 0.3980$	57
4.5	Algorithme appliqué pour détecter le saut dans le cas où la quantité d'intérêt est calculée par la méthode de ME-gPC.	58

4.6	Exemple d'un plan d'expérience par la méthode de LHS pour deux itérations avec $r = 1$, $p = 1$, $k = 2$ et $Q = 4$. (*) Points hérités de l'élément $[0, 0.4]$ de l'itération 1. (•) Nouveaux points LHS du premier élément $[0, 0.2]$ à l'itération 2. (○) Les nouveaux points LHS du deuxième élément $[0.2, 0.4]$ à l'itération 2.	59
4.7	Amplitude A_1^{wNES} en fonction du coefficient de frottement μ et du coefficient d'amortissement η_1 . Le jeu de paramètres (3.10) est utilisé.	60
4.8	Évolution de la limite d'atténuation et des points de bifurcation de Hopf avec et sans NES. (—) Point de bifurcation de Hopf sans NES (η_{1b}^{wo}); (—) point de bifurcation de Hopf avec NES (η_{1b}^w); (—) limite d'atténuation (η_{1ml}). (1) Stabilité linéaire sans NES; (2) stabilité linéaire avec NES; (3) régimes atténués (régimes périodiques ou SMR); (4) régimes non atténués.	61
4.9	Comparaison entre la limite d'atténuation η_{1ml} estimée par la référence (en noir) et par la méthode gPC1 (en gris) : (a) $p = 2$; (b) $p = 8$	62
4.10	Évolution du taux de décroissance δ en fonction de l'ordre p dans le cas de la méthode gPC1.	63
4.11	10 000 simulations de l'amplitude du déplacement du système mécanique avec NES en fonction de μ et η_1 . (noire) : la référence; (rouge) : gPC. L'ordre du chaos polynomial est $p = 15$	64
4.12	Comparaison entre la limite d'atténuation estimée par la référence (en noir) et par la méthode gPC2 (en gris) : (a) $p = 8$; (b) $p = 15$; (b) $p = 20$	65
4.13	Évolution du taux de décroissance δ en fonction de l'ordre p dans le cas de la méthode gPC2.	66
4.14	Huit itérations jusqu'à l'arrêt, par violation de (4.5), de l'algorithme de la méthode ME-gPC. Le coefficient de frottement μ est incertain, $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. (courbe noire) : la référence; (autres couleurs) : ME-gPC. (a) Itération 1; (b) Itération 2; (c) Itération 3; (d) Itération 4; (e) Itération 5; (f) Itération 6; (g) Itération 7; (h) Itération 8.	68
4.15	(a) Critère d'arrêt de l'algorithme basé sur la méthode de ME-gPC, $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. (b) Zoom de la figure 4.15(a).	69
4.16	Sept itérations jusqu'à l'arrêt, par violation de (4.5), de l'algorithme de la méthode ME-gPC. Les paramètres μ et η_1 sont incertains, $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. (courbe noire) : la référence; (autres couleurs) : ME-gPC. (a) Itération 1; (b) Itération 2; (c) Itération 3; (d) Itération 4; (e) Itération 5; (f) Itération 6; (g) Itération 7.	71
4.17	La limite d'atténuation dans le plan (μ, η_1) . La référence est la ligne noire. Les derniers éléments K' qui restent à la fin de l'algorithme présenté en figure. 4.5 sont représentés par des carrés gris. Le côté droit des carrés (en rouge) constitue la valeur de la limite d'atténuation à partir de laquelle la PHSSR est estimée. Les paramètres μ et η_1 sont incertains, $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$	73
5.1	Fonction $\sqrt{H(X)}$ qui représente la partie amplitude de la variété critique (cf. équation (5.21)).	83
5.2	Variété critique pour différentes valeurs de η_h et $\varphi_h = 15\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$	84
5.3	Illustration de régime SMR en fonction de la variation de η_h . (a) Variété critique; (a) Zoom de variété critique; (c) A_1^{wNES} ; (d) Zoom de A_1^{wNES}	85
6.1	Résultat de la première étape de l'optimisation de référence. (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h avec $\varphi_h = 140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$	91
6.2	Résultat de la sconde étape de l'optimisation de référence. (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h avec $\varphi_h = 140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$	91
6.3	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h pour $\theta_2 = 1\%$, $\varphi_h = 140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode ME-gPC.	93

6.4	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h pour $\theta_2 = 0.1\%$, $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode ME-gPC.	93
6.5	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h pour $\theta_2 = 0.001\%$, $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode ME-gPC.	94
6.6	Comparaison entre les stratégies d'optimisations de référence et ME-gPC de $\eta_h \in [0\,0.04]$ avec $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. (a) μ_{ml} ; (b) Zoom de μ_{ml} ; (a) PHSSR; (b) Zoom de la PHSSR.	94
6.7	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,900\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode de référence.	95
6.8	Évolution du critère de saut CS en fonction de φ_h	96
6.9	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode de référence.	96
6.10	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$	98
6.11	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 4.2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$	98
6.12	S(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 4.5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$	99
6.13	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$	99
6.14	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.1\%$	100
6.15	(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h et φ_h avec $\varphi_h \in [0\,150\,000]\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\eta_h \in [0\,0.04]$	100
6.16	Vue de dessus 6.15(a).	101
6.17	Variation de de la PHSSR en fonction de η_h . (a) $\varphi_h = 118\,750\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$, (b) $\varphi_h = 106\,250\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$, (c) $\varphi_h = 56\,250\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ et (d) $\varphi_h = 50\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$	101
6.18	Vue de dessus dans le cas de la PHSSR dans le cas de l'optimisation par la méthode ME-gPC.	102
6.19	Optimisation de référence. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\eta}_h$	104
6.20	Optimisation avec la méthode ME-gPC. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\eta}_h$	105
6.21	Optimisation de référence. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\varphi}_h$	107
6.22	Optimisation avec la méthode ME-gPC. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\varphi}_h$	108

Introduction générale

Les structures mécaniques étant soumises à de multiples sources de vibrations tout au long de leur cycle de vie, le contrôle des vibrations est un domaine de recherche important. Il permet d'une part de limiter les risques de rupture des structures due à la fatigue vibratoire ou à des oscillations de trop grandes amplitudes et d'autre part de réduire le bruit dans le but d'améliorer le confort acoustique.

Les vibrations indésirables dues à des cycles limites d'oscillations (ou LCO pour « Limit Cycle Oscillations ») générés par des instabilités dynamiques se rencontrent dans de nombreuses applications industrielles. Les systèmes frottants, tels que les garnitures de freinage, les systèmes d'embrayage et d'essuyage, en sont de bons exemples. Ils subissent des instabilités dynamiques induites par le frottement sec. Un des phénomènes qui permet d'expliquer ces instabilités est le couplage de modes. Beaucoup des chercheurs estiment que les modèles basés sur ce phénomène sont les plus réalistes lorsque les structures en mouvement admettent des vitesses de glissement significatives. Ils offrent en effet de bons résultats lorsqu'ils sont confrontés à des mesures expérimentales.

Durant ces dernières années, une attention particulière a été accordée à la compréhension des mécanismes qui génèrent le bruit dans les systèmes frottants et à leur prévision. Il a été montré que ce type du système dynamique non linéaire est caractérisé par un comportement très sensible aux variations des paramètres et notamment aux dispersions des lois de frottement. La maîtrise de l'incertain et plus particulièrement la prise en compte des incertitudes provenant des lois de frottement apparaît donc comme primordiale pour prédire et analyser de façon robuste le comportement dynamique des systèmes frottants en termes de stabilité et de niveaux vibratoires. Des méthodes de prise en compte de l'incertain et particulièrement celles basées sur des approches probabilistes, intégrant les incertitudes paramétriques stochastiques auxquelles le système peut être confronté, ont par conséquent fait l'objet de nombreuses études. Par exemple, la méthode de Monte Carlo est facile à mettre en œuvre mais peut devenir très vite prohibitive en coût de calcul. Par conséquent, beaucoup d'études ont été menées pour développer des méthodes alternatives permettant une prise en compte des incertitudes avec un coût de calcul acceptable. Parmi elles, les méthodes basées sur la théorie du chaos polynomial offrent un intérêt indéniable pour prédire et analyser le comportement dynamique des systèmes non linéaires avec des coûts de calcul faible par rapport la méthode de Monte Carlo. Ces avantages ont motivé le choix d'utiliser le chaos polynomial dans cette thèse.

La littérature montre également que, malgré la connaissance accrue du comportement dynamique des systèmes frottants avec paramètres incertains, il est encore très difficile voire impossible de concevoir un système robuste, c'est à dire stable malgré les incertitudes paramétriques. Il est donc nécessaire de pouvoir concevoir des dispositifs d'atténuation des vibrations dans de tels systèmes. Trois grands types de technologie sont majoritairement utilisées dans l'industrie : le contrôle passif par dissipation ou à l'aide d'absorbeurs linéaires accordés, le contrôle semi-passif et le contrôle actif ; chacune de ses techniques possédant ses avantages et ses inconvénients. Depuis une quinzaine d'années, l'utilisation d'absorbeurs non linéaires de type NES (« Nonlinear Energy Sink » en anglais),

typiquement un système masse-ressort-amortisseur à raideur purement non linéaire, a montré son efficacité comme solution alternative de contrôle passif des vibrations en conciliant les avantages des technologies existantes. Son principe repose sur le couplage entre un système primaire, dont on souhaite limiter les vibrations, et un NES. Sous certaines conditions, un transfert quasi-irréversible de l'énergie vibratoire du système primaire vers le NES peut se produire. Ce phénomène est appelé pompage énergétique.

Dans la littérature, les absorbeurs non linéaires de type NES sont notamment utilisées dans le cadre de l'atténuation de cycles limites d'oscillations. Ils permettent d'atténuer, voire de supprimer les cycles limites et ainsi d'élargir la zone de fonctionnement « sûr » du système primaire, c'est-à-dire des régimes de fonctionnement où les cycles limites sont supprimés ou atténués. Cependant, le comportement dynamique du système couplé constitué du NES et du système primaire peut s'avérer très sensible aux paramètres qui admettent une dispersion importante. En particulier, lorsqu'il s'agit d'atténuer une instabilité dynamique, une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire du système due à la variation de paramètres incertains peut s'observer, ce dernier passant brutalement d'un régime atténué (où le NES agit) à un régime non atténué (où le NES n'agit pas). Un régime non atténué étant potentiellement dangereux ou causant de l'inconfort acoustique, il est important d'être en mesure de concevoir un NES qui permette un fonctionnement le plus robuste possible de l'ensemble du système, c'est-à-dire qui permette au système d'avoir un comportement le plus « sûr » possible (stable ou avec des cycles limites atténués) malgré les incertitudes paramétriques du système primaire mais également du NES. Pour cela il faut que le NES puisse jouer son rôle au maximum dans les régions de l'espace des paramètres incertains pour lesquelles le système primaire seul est soumis à des régimes non atténués.

Les NES ont été étudiés dans de nombreux travaux dans un contexte déterministe mais il existe très peu de travaux dans la littérature qui traitent du comportement des NES en présence d'incertitudes et a fortiori avec une problématique d'optimisation. Ce domaine d'étude reste encore peu exploré. Ainsi un recensement de ces études est effectué dans ce manuscrit.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, des NES sont utilisés pour atténuer les vibrations induites par le frottement dans les systèmes mécaniques frottants. Pour cela un modèle phénoménologique à deux degrés de liberté d'un système de freinage (modèle dit de Hultén) permettant de reproduire des vibrations induites par le frottement par le phénomène de couplage de modes va être exploité en l'associant à deux NES.

Comme écrit ci-dessus, une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire de tels systèmes instables couplé à des NES peut s'observer séparant l'espace des paramètres incertains du système en deux régions : l'une correspondant aux régimes atténués et l'autre aux régimes non atténués.

L'objectif de la thèse est dans un premier temps de développer des méthodes basées sur le formalisme du chaos polynomial permettant la localisation, dans l'espace des paramètres incertains du système, de la frontière entre la région correspondant aux régimes atténués et celle correspondant aux régimes non atténués, permettant ainsi le calcul de la propension du système couplé à être dans un régime atténué. Ces méthodes sont ensuite appliquées aux cas du modèle de Hultén couplé à deux NES évoqué plus haut.

Dans un second temps, après avoir déterminé la méthode la plus efficace, cette dernière est utilisée pour concevoir une méthodologie d'optimisation robuste des NES c'est-à-dire avec pris en compte des incertitudes, à faible coût de calcul. Deux approches sont proposées, à chaque fois basées sur la maximisation, sous incertitudes des paramètres du système primaire, de la propension du système couplé à être dans un régime atténué qui est donc la fonction objectif du problème. La première approche considère que les paramètres des NES sont déterministes et sont donc les variables de conception à optimiser. La seconde méthode considère que les paramètres des NES sont également

incertains mais avec une loi de probabilité connue. Ainsi, les variables de conception à optimiser ne sont plus directement les paramètres des NES mais l'une de leurs statistiques (la moyenne est retenue dans ce travail) appelées hyper-paramètres. Une optimisation déterministe est effectuée en parallèle à des fins de validation.

Ce manuscrit de thèse va s'articuler autour six chapitres :

Le premier chapitre présente une étude bibliographique qui permet de fixer le cadre dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. Il est composé de quatre parties. La première est consacrée à la description générale des concepts de base décrivant les vibrations induites par le frottement dans les systèmes mécaniques frottants. Dans la deuxième partie, les approches robustes des systèmes dynamiques sont présentées afin d'orienter le choix des méthodes qui sont utilisées dans la suite de manuscrit. Dans la troisième partie, un rappel sur les techniques de contrôle des vibrations de structures mécaniques est présenté avec une attention particulière sur l'atténuation des vibrations d'instabilités de contact par des absorbeurs dynamiques non linéaires. Dans la dernière partie, les concepts de base de l'optimisation déterministe et sous incertitudes sont rappelés avec l'objectif d'appliquer ensuite ces concepts pour l'optimisation robuste des absorbeurs dynamiques non linéaires utilisés pour réduire les vibrations induites par frottements dans des systèmes mécaniques frottants.

Les chapitres 2, 3 et 4 constituent la première partie de cette thèse répondant à notre premier objectif concernant le développement de méthodes basées sur le chaos polynomial afin de prédire la propension du système à être dans un régime atténué.

Le deuxième chapitre rappelle des éléments théoriques nécessaires à la compréhension de ce travail; d'abord sur la dynamique des systèmes mécaniques non linéaires puis sur les méthodes de propagation des incertitudes (notamment la théorie du chaos polynomial).

Le troisième chapitre a pour but, d'une part, de présenter les équations du mouvement du modèle de Hultèn couplé à deux NES identiques puis d'en effectuer respectivement l'analyse de stabilité et la détermination des cycles limites et, d'autre part, de définir mathématiquement la propension du système à être dans un régime atténué (ou PHSSR pour « *the Propensity of the system to undergo an Harmless Steady-State Regime* ») qui est la probabilité d'obtenir un régime atténué étant donné les lois de probabilité régissant la dispersion des paramètres du système primaire et des NES.

Le quatrième chapitre présente en détail les méthodes basées sur le chaos polynomial développées dans ces travaux de thèse, permettant de prédire la propension du système à être dans un régime atténué. L'objectif de ces méthodes est la réduction du coût de calcul par rapport à la méthode de référence qui consiste à effectuer une discrétisation déterministe fine de l'espace des paramètres incertains. Une comparaison de ces méthodes est ensuite effectuée avec la méthode de référence puis entre elles afin de déterminer la plus performante en termes de coût de calcul, de précision et de facilité de mise en œuvre.

Les chapitres 5 et 6 constituent la seconde partie de la thèse portant sur l'optimisation sous incertitudes des NES.

Le cinquième chapitre présente une étude analytique du comportement dynamique du modèle de Hultèn couplé à deux NES. Le but est d'obtenir la valeur maximale du coefficient d'amortissement des NES permettant l'existence de régime SMR (« Strongly Modulated Response », c'est l'un des régimes de fonctionnement du système dans lequel le cycle limite est atténué par les NES). Le lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites y est également étudié.

Le sixième chapitre est consacré à l'optimisations sous incertitudes des paramètres des NES couplés au modèle de Hultèn. Tout d'abord, le formalisme d'optimisation adopté est présenté. Les résultats de l'optimisation obtenue avec la méthode basée sur le chaos polynomial la plus performante développée dans le chapitre 4 sont ensuite présentés et comparés à une optimisation déterministe de références.

Une conclusion générale incluant le bilan des résultats de ces travaux de recherches ainsi que différentes perspectives qui en découlent est rédigée à la fin de ce manuscript.

Chapitre 1

Étude bibliographique

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Systèmes frottants	6
1.2.1	Introduction	6
1.2.2	Vibrations induites par le frottement	7
1.2.3	Mécanisme de couplage de modes	7
1.2.4	Conclusion	10
1.3	Approches robustes des systèmes dynamiques	10
1.3.1	Introduction	10
1.3.2	Classification des incertitudes	10
1.3.3	Modélisation et propagation des incertitudes	11
1.3.4	Le chaos polynomial et l'analyse du comportement dynamique des systèmes frottants	15
1.3.5	Conclusion	16
1.4	Contrôle des vibrations induites par le frottement	16
1.4.1	Introduction	16
1.4.2	Techniques usuelles	16
1.4.3	Techniques utilisant des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	17
1.4.4	Conclusion	19
1.5	Optimisation des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	19
1.5.1	Introduction	19
1.5.2	Principe et formalisme de l'optimisation	19
1.5.3	Techniques d'optimisation appliquées aux absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES	21
1.5.4	Conclusion	22
1.6	Conclusion	23

1.1 Introduction

Ce chapitre présente une étude bibliographique en lien avec la problématique de ce travail de thèse et est composé des quatre parties. La première partie est consacrée à la description des instabilités de contact dans les systèmes mécaniques frottants. Dans la deuxième partie, les approches robustes des systèmes dynamiques sont présentées avec l'objectif de choisir la méthode la plus appropriée pour traiter la problématique de cette thèse. Dans la troisième partie, un rappel sur les techniques de contrôle des vibrations de structures mécaniques est présenté avec une attention particulière sur l'atténuation des vibrations d'instabilités de contact par des absorbeurs dynamiques non linéaires. Dans la dernière partie, les concepts de base de l'optimisation déterministe et sous incertitudes sont rappelés avec l'objectif d'appliquer ensuite ces concepts pour l'optimisation robuste des absorbeurs dynamiques non linéaires utilisés pour réduire les vibrations induites par frottements dans des systèmes mécaniques frottants.

1.2 Systèmes frottants

1.2.1 Introduction

Dans des systèmes frottants, le frottement peut être utile pour assurer un rôle mécanique lié à la conception comme dans le cas du frottement entre les pneus d'une voiture et la route pendant le freinage. Cependant, il peut être aussi l'origine de nuisances sonores et de vibrations. Le nombre des études, proposées dans la littérature pour prédire ces nuisances, est très élevé. Cependant, il reste encore beaucoup à apprendre sur la nature de ces vibrations et sur la façon dont elles évoluent dans différentes circonstances, ainsi que sur la façon de les prévoir et de les contrôler.

Divers modèles ont été proposés dans la littérature pour décrire les phénomènes de frottement. Pour modéliser le frottement sec, la loi de Coulomb [16] est bien connue depuis des années. Elle indique que la force de frottement est donnée par un paramètre sans dimension appelé coefficient de frottement multiplié par la force normale. Le modèle de frottement sec issu de la loi de Coulomb est donné par

$$F_f = \begin{cases} F_t & \text{si } v \neq 0 \\ F & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec F_f la force de frottement, v la vitesse de glissement, F_t est la force de frottement de Coulomb et F est une force extérieure appliquée sur le système.

Le comportement dynamique d'un système mécanique à frottement sec n'est pas linéaire car la loi de Coulomb fait la distinction entre le frottement statique et le frottement dynamique.

Le **frottement statique** se produit lorsque des forces de déplacement agissent sur les deux corps, mais que les corps ne sont pas en mouvement l'un par rapport à l'autre ($v = 0$). La constante de proportionnalité entre les composantes tangentielle et normale de la force de frottement est appelée coefficient de frottement statique μ_s . La force de frottement statique est définie comme suit

$$F \leq F_{tmax} = \mu_s F_n \quad (1.2)$$

avec F_{tmax} est la force maximale de frottement statique et F_n est la composante normale de la force de frottement.

Le **frottement dynamique** se produit lorsque deux corps, en contact avec eux, glissent l'une sur l'autre. Dans ce cas, la vitesse de glissement est différente de zéro ($v \neq 0$) et la force extérieure appliquée dépasse la composante tangentielle du frottement statique maximal ($F > F_t$). La force de frottement dynamique est proportionnelle à la force normale appliquée sur les surfaces et la constante de proportionnalité est appelée coefficient de frottement dynamique μ_d . La force de frottement

dynamique est donnée par

$$F_t = \mu_d F_n \quad (1.3)$$

1.2.2 Vibrations induites par le frottement

Dans le processus de fonctionnement des systèmes mécaniques frottants, des vibrations peuvent se produire à l'interface de contact. Ces vibrations induites par le frottement appelées aussi instabilités de contact sont responsables de divers bruits. Les niveaux sonores atteints sont non désirés dans de nombreuses applications industrielles. On peut citer dans le domaine des transports les systèmes de freinage aéronautiques [24, 65], les systèmes de freinage automobiles [135, 110] et les contacts roue-rail [87, 88]. Les principales vibrations induites par le frottement sec sont les trépidations, le bourdonnement (ou ronflement), le broutement et le crissement (ou grincement). D'une façon générale, ces instabilités sont classées en fonction de leurs fréquences fondamentales [74]. Les trépidations, le bourdonnement et le broutement se produisent généralement en dessous de 1 kHz, ils sont considérés comme des instabilités de basse fréquence. Cependant, un crissement qui se produit le plus souvent entre 1 et 20 kHz est considéré comme une instabilité de hautes fréquences. Le niveau acoustique joue un rôle déterminant dans la classification d'un bruit. Ce niveau est lié à une caractéristique non linéaire d'un système instable, appelée Oscillation de type Cycle Limite (« *Limite Cycle Oscillation* » LCO). Par conséquent, il est utile d'expliquer les concepts d'instabilité, de vibration auto-excitée et de LCO, ces termes étant fréquemment utilisés dans cette thèse.

Instabilité. En dynamique de structure mécanique, la capacité d'un système à retrouver un état d'équilibre sous de petites perturbations est appelée stabilité. L'instabilité est quant à elle une situation dans laquelle un système est incapable de retrouver un état d'équilibre.

Dans les systèmes mécaniques frottants, ces instabilités peuvent être classées en deux grandes familles : les bruits issus de vibrations forcées et les bruits issus de vibrations auto-excitées [26, 57].

Vibrations auto-excitées. Dans de nombreux systèmes mécaniques, la source d'excitation qui conduit aux vibrations est une force extérieure. Cependant, un système peut parfois générer une source d'excitation intérieure. Ce type d'instabilité est appelé vibrations auto-excitées. Par exemple, la force de frottement peut être considérée comme une source des vibrations auto-excitées.

Cycle limite. Pour un système linéaire instable, selon la définition de l'instabilité, l'amplitude des vibrations croît sans limite. A l'inverse, après une croissance transitoire exponentielle des amplitudes, un système dynamique non linéaire instable peut admettre des oscillations d'amplitude constante une fois le régime transitoire passé, autrement dit le système décrit un mouvement d'Oscillation de type Cycle Limite. Dans le plan de phase, les trajectoires de ce mouvement en régime permanent décrivent des boucles fermées. En d'autres termes, la trajectoire vitesse-déplacement du système converge vers une boucle fermée dans le temps.

1.2.3 Mécanisme de couplage de modes

Dans les systèmes tribologiques, il existe de nombreux mécanismes qui entraînent des vibrations induites par le frottement sec. Les mécanismes les plus cités dans la littérature sont : le stick-slip, l'amortissement négatif induit par le frottement, le sprag-slip et le couplage de modes. Ils ont été expliqué en détail par [66] et [74] ainsi que dans différents travaux de thèse [26, 57]. Le couplage de modes étant le principal phénomène à l'origine d'un grand nombre d'instabilité induites par le frottement, cette section va être consacrée exclusivement à la description de ce phénomène.

En effet, dans de nombreux systèmes mécaniques, le mécanisme de couplage de modes est considéré comme la cause fondamentale de vibrations induites par le frottement [42, 115]. Il a été défini par Hoffmann *et al.* [60] comme étant la coalescence de modes en un point appelé bifurcation de

Hopf. Dans le travail de Hoffmann [60], une étude d'un système non amorti à deux degrés de liberté, représenté dans la figure 1.1, a été développé pour démontrer ce type d'instabilité. Le système est

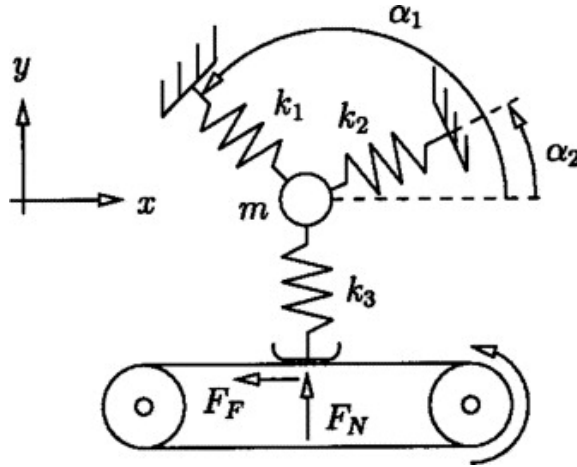


FIGURE 1.1 – Modèle de Hoffmann à deux degrés de liberté [60].

composé d'une bande roulante à une vitesse constante et d'une masse m , tenue en position par deux raideurs linéaires k_1 et k_2 . Le contact normal entre la masse et la bande est modélisé par une raideur linéaire k_3 . Une force normale F_n est appliquée sur la bande pour qu'il y ait un contact permanent avec glissement entre celle-ci et la raideur k_3 . Le frottement est modélisé par la loi de Coulomb dont la force de frottement est $F_t = \mu F_n$, μ étant le coefficient de frottement. En raison de l'importance du phénomène d'instabilité due au couplage de modes pour cette thèse, le modèle de Hoffmann est présenté en détail dans cette section.

L'équation de mouvement pour le modèle illustré dans la figure 1.1 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - \mu k_3 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

où k_{ij} représentent les raideurs de couplage, qui dépendent des angles α_1 et α_2 , vérifiant :

$$\begin{cases} k_{11} = k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2 \\ k_{12} = k_{21} = k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ k_{22} = k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Une analyse de stabilité du système d'équations 1.4 est effectuée en évaluant l'évolution des valeurs propres en fonction de la dispersion du coefficient de frottement pour l'ensemble de paramètres de l'exemple donné dans [60]. Le système admet deux couples de valeurs propres conjuguées dont les évolutions des parties réelles et imaginaires sont tracées dans la figure 1.2. Le frottement couple le degré de liberté normal avec le degré de liberté tangentiel. En effet, avec l'augmentation du coefficient de frottement, les parties imaginaires des valeurs propres (Fig.1.2(b)) se rapprochent (les deux modes se rapprochent en fréquence) et se coalisent à partir d'un certain point. Juste après ce point, les parties réelles des valeurs propres (Fig.1.2(a)) bifurquent en se séparant. Ce point est appelé point de bifurcation d'abscisse $\mu = 0.75$. Dans le cas où $\mu < 0.75$, il y a deux paires de valeurs propres qui sont purement imaginaires, mais leurs valeurs sont différentes. Quand $\mu = 0.75$, les valeurs propres sont purement imaginaires et identiques. Quand $\mu > 0.75$, les parties réelles des valeurs propres ne sont plus nulles : l'une d'elles devient positive tandis que l'autre devient négative et les parties imaginaires des deux valeurs propres deviennent égales. Dès qu'il existe une partie réelle positive, le système entraîne une croissance exponentielle de l'amplitude de vibration en fonction du temps. Hoffmann a expliqué cette instabilité par le mécanisme de feed-back lié au déphasage entre

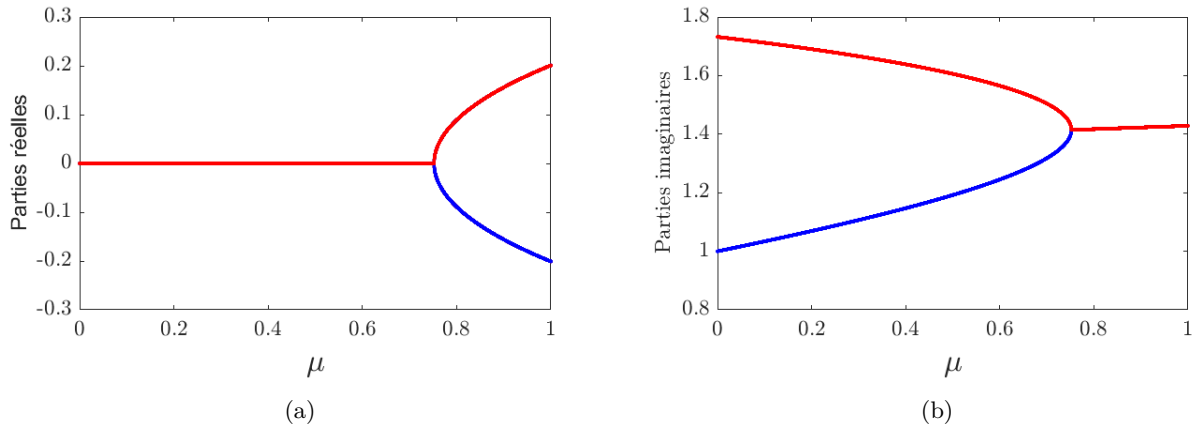


FIGURE 1.2 – Évolutions des parties réelles et imaginaires du système d'équations 1.4. (a) Partie réelle; (b) Partie imaginaire

les oscillations tangentes et normales ce qui traduit l'échange d'énergie entre les deux directions. La matrice de raideur du système associé peut alors devenir dissymétrique à cause du frottement. Aussi, un coefficient de frottement constant et la loi de Coulomb suffisent pour qu'il y ait potentiellement instabilité du système.

Effet de l'amortissement dans le couplage de modes. Le comportement de bifurcation illustré dans la figure 1.2 révèle que dans le cas où il n'y a pas d'amortissements dans le système, les parties réelles des deux modes sont exactement les mêmes et égales à zéro avant le point de bifurcation. Cependant, l'ajout de l'amortissement change le comportement de bifurcation. Dans [61, 88], l'effet de l'amortissement, sur le comportement de bifurcation, a été étudié dans le modèle de Hoffmann à deux ddl étudié ci-dessus (Eq. 1.4). Une première constatation est que les valeurs propres du système possèdent deux parties réelles de valeur négative avant la bifurcation. De plus, l'ajout d'un amortissement isoréparti entre les deux degrés de liberté ne change pas, par rapport au cas où il n'y a pas d'amortissements, la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle les deux modes se couplent. Mais, il influe sur la valeur critique pour laquelle la partie réelle d'une des valeurs propres devient positive.

Une deuxième constatation est que l'amortissement peut provoquer un effet paradoxal sur l'instabilité par couplage de modes dans le cas où l'amortissement n'est pas isoréparti [25, 41, 58, 136]. Ce paradoxe signifie que, bien que la fonction générale de l'amortissement est de déplacer la partie réelle des valeurs propres vers la région stable, l'amortissement peut rendre un système plus instable. La répartition non uniforme de l'amortissement a un effet sur la coalescence : plus la disparité est grande, moins la coalescence est parfaite mais surtout, suivant la répartition, l'instabilité peut survenir beaucoup plus tôt que dans le cas sans amortissement.

Dans le même contexte, Sinou et Jézéquel ont étudié le phénomène des vibrations induites par le frottement, issus du couplage de mode, d'un système mécanique frottant [136]. Ils ont montré que non seulement la dispersion du coefficient de frottement peut faire varier les amplitudes des niveaux vibratoires du système mais aussi que la variation de l'amortissement structural du système peut avoir une influence sur les régions stables et instables et également sur les amplitudes de type LCO du système.

Effet de la non linéarité dans le couplage de modes. Pour mettre en évidence les effets de la non linéarité sur l'instabilité provoquée par le couplage de modes, Li *et al.* [86] ont étudié un modèle non linéaire à deux degrés de liberté qui est développé à partir du modèle linéaire classique du Hoffmann

étudié ci-dessus (Eq. 1.4). Le contact a été modélisé par une raideur non linéaire purement cubique. Les résultats montrent que l'augmentation de la raideur non linéaire peut rendre le système non linéaire instable, mais à certaines valeurs, elle devient un facteur de stabilisation du système.

Sinou *et al.* ont étudié le phénomène d'instabilité dans un modèle non linéaire d'un système de freinage [139, 140]. La non linéarité est exprimée par des raideurs non linéaires sous la forme d'un polynôme avec des termes quadratiques et cubiques. Ils ont montré que les non linéarités peuvent affecter la limite de stabilité du système et que l'analyse de stabilité linéaire pourrait donc être insuffisante pour prévoir les modes instables. Par conséquent, ils ont introduit la méthode de la variété centrale pour étudier un modèle non linéaire complexe. Puis, Sinou et Jézéquel ont étudié la stabilité d'un système mécanique frottant non linéaire [136]. La non linéarité a été introduite par des raideurs purement cubiques. Ils ont observé que l'augmentation de la non linéarité peut diminuer l'amplitude des LCO.

1.2.4 Conclusion

Dans cette section, un bref rappel sur les vibrations induites par le frottement dans des systèmes mécaniques frottants a été montré. Parmi les mécanismes générateurs de ces vibrations, on trouve le mécanisme de couplage de modes. Beaucoup des chercheurs estiment que les modèles basés sur ce mécanisme sont les plus réalistes. Ils offrent des bons résultats en les comparant avec des études expérimentales. Ainsi, dans notre étude, un modèle d'un système mécanique frottant qui présente des instabilités dues à un couplage de modes sera utilisé.

Durant ces dernières années, une attention particulière a été accordée à la compréhension de ces mécanismes et à leur prédiction dans un contexte probabiliste en intégrant l'incertitude dans les paramètres du modèle ([146, 89, 126]). En effet, l'incertitude pourrait avoir un effet important sur le comportement du système frottant. La prochaine section va être consacrée aux méthodes qui permettent d'étudier le comportement dynamique des systèmes en tenant compte des incertitudes paramétriques, autrement dit aux approches robustes du comportement dynamique des systèmes

1.3 Approches robustes des systèmes dynamiques

1.3.1 Introduction

Dans la littérature, des travaux de recherche ont montré que la dispersion de certains paramètres dans des systèmes mécaniques frottants peut engendrer des changements importants de leurs comportements dynamiques [137, 103, 147, 29]. La maîtrise de l'incertain devient, alors, primordiale pour modéliser des systèmes afin de définir s'ils ont un comportement robustes et fiables en matière de stabilité et de niveaux vibratoires. En contexte d'ingénierie, la conception robuste est définie comme étant la conception qui détermine les paramètres nominaux d'un système tels que ses performances soient suffisamment insensibles à tout événement incertain, tant du système lui-même que de l'environnement, tout au long de leur cycle de vie [85]. Une analyse de fiabilité peut également être effectuée pour quantifier la probabilité de défaillance d'une conception en présence des incertitudes. Ces incertitudes sont classifiées selon leurs types, leurs sources et leurs façons de les modéliser.

1.3.2 Classification des incertitudes

Dans les problèmes d'ingénierie, les incertitudes peuvent provenir de plusieurs sources (géométriques, chargement, matériaux, etc). Elles sont largement discutées dans la littérature et elles peuvent se classer en deux types, les incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques [114].

Les incertitudes épistémiques. Elles sont dues au manque de connaissances. Les exemples liés à ce type d'incertitudes sont des différentes approximations introduites pour simplifier la modélisation

ou des données expérimentales insuffisantes. En diminuant le nombre de ces approximations, elles peuvent être réduites. C'est pourquoi, elles sont également appelées incertitudes réductibles.

Les incertitudes aléatoires. Elles correspondent à la variabilité naturelle intrinsèquement présente d'un système ou d'un produit. Pour ce type d'incertitudes, le caractère stochastique est une propriété inhérente. La description géométrique du modèle ou les conditions aux limites peuvent être des exemples. La variabilité des paramètres géométriques et les conditions aux limites est toujours présente en raison de la variabilité naturelle, par exemple, durant le processus de fonctionnement ou de production. Elles peuvent être trouvées dans la littérature comme étant des incertitudes irréductibles.

Un récapitulatif de la différence entre ces deux types d'incertitudes est donné dans le tableau 1.1.

	Incertitude épistémique	Incertitude aléatoire
Caractéristiques	réductible, subjective	irréductible, inhérente
Sources	manque de connaissance	variation intrinsèque du système ou de l'environnement

TABLEAU 1.1 – Comparaison entre les incertitudes épistémiques et les incertitudes aléatoires.

1.3.3 Modélisation et propagation des incertitudes

Dans la littérature, les méthodes de prise en compte des incertitudes, appelées aussi méthode de propagation des incertitudes, sont nombreuses. Une revue des méthodes numériques de prévision stochastique se trouve dans [131], ou plus récemment dans [112]. Ces méthodes sont utilisées pour analyser le comportement dynamique des systèmes sujets aux incertitudes. De façon générale, elles se différencient en fonction des outils mathématiques utilisés pour prendre en compte les incertitudes. Elles peuvent se classer principalement en deux types : l'approche possibiliste et l'approche probabilistes (voir Tab. 1.2) :

Approches possibilistes	Approches probabilistes
Méthodes par intervalles	Méthode de Monte Carlo
Formalisme de la logique floue	Méthode des perturbations
	Méthode de Chaos polynomial

TABLEAU 1.2 – Méthodes de quantification des incertitudes.

1.3.3.1 Approches possibilistes

L'avantage des méthodes possibilistes, ou encore ensemblistes, est qu'elles ne nécessitent pas l'identification des lois de probabilité régissant les paramètres incertains. Les deux types de méthodes les plus importantes de cette approche sont les méthodes par intervalles [98] et les méthodes basées sur le formalisme de la logique floue [162]. Différentes applications de ces méthodes pour l'analyse de fiabilité et l'optimisation dans le cadre de la conception en ingénierie mécanique peuvent être trouvées dans ce travail [56].

a. Méthodes par intervalles. Dans cette approche, les données incertaines sont modélisées uniquement par leurs bornes physiques qui sont généralement identifiables et mesurables [98]. Il n'est pas donc nécessaire de maîtriser des informations sur l'évolution de l'incertitude dans son intervalle. L'inconvénient est que l'information sur les variables n'est alors que partielle. Ainsi, il n'est plus possible de dire dans quel ensemble une variable a le plus de chance de se trouver [33]. En effet, l'arithmétique des intervalles sur laquelle sont basées ces méthodes est inappropriée pour quantifier

l'incertitude de la sortie d'un modèle d'un point de vue statistique ou probabiliste. Cette approche présente également un désavantage majeur, appelé phénomène de pessimisme, qui conduit à une surestimation systématique des résultats lorsqu'un paramètre incertain apparaît plusieurs fois dans la même fonction. Ceci s'explique par le fait que l'arithmétique des intervalles ne tient pas compte des dépendances relatives à plusieurs occurrences d'un seul paramètre dans une fonction. Ainsi ce phénomène conduit très souvent à une divergence dans l'évaluation des sorties du modèle.

Des travaux basés sur le traitement de l'incertitude avec des méthodes par intervalles, ont été menés dans le domaine de sciences de l'ingénieur [133, 97]. Les principaux inconvénients de cette approche nous conduisent à ne pas l'utiliser dans la suite de ces travaux de thèse.

b. Formalisme de la logique Floue. Le formalisme de la logique floue a été développé pour représenter et manipuler des données imprécises, vagues et sans aucune information probabiliste ou statistique [162]. Il a été considéré comme une généralisation et une amélioration des méthodes par intervalles. La notion d'intervalle a été changée par le concept d'un ensemble flou qui consiste à affecter une valeur entre 0 et 1 à la valeur de la variable incertaine à l'aide de fonctions d'appartenances [2]. La détermination de ces fonctions reste une difficulté importante. En effet, elles dépendent des données expérimentales fournies ce qui rapproche leur détermination d'une démarche statistique.

De façon générale, les méthodes floues ont été utilisées dans plusieurs travaux consacrés à la propagation des incertitudes dans des problèmes de mécanique et particulièrement pour l'analyse des systèmes dont les incertitudes proviennent d'imprécisions de données plutôt que de leur caractère aléatoire [93]. On peut trouver dans la littérature un nombre limité de travaux basés sur ces méthodes pour étudier les instabilités dynamiques de systèmes mécaniques frottants. Principalement, on peut noter les études menées par Tison *et al.* [92, 36] portant sur les effets des incertitudes paramétriques sur la stabilité d'un système mécanique, sujet à des vibrations induites par le frottement. Les études ont été menées à partir de méthodes basées sur le formalisme de la logique floue.

Le formalisme de la logique floue étant plutôt adaptée pour traiter des problématiques avec des données incertaines vagues ou imprécises, il ne sera pas privilégié dans ces travaux de thèse.

1.3.3.2 Approches probabilistes

Dans les approches probabilistes, les analyses robustes du comportement dynamique des systèmes linéaires ou non linéaires sont basées sur la quantification des paramètres incertains par des variables aléatoires ou par des processus stochastiques. Un des grands intérêts de ces méthodes est de pouvoir estimer des informations en terme de statistique (moyenne, variance, histogrammes de distribution) sur une quantité d'intérêt pouvant correspondre à une sortie du système étudié. Ceci est très importante dans le cas où une analyse de robustesse et/ou de fiabilité doit être effectuée. De nombreuses méthodes existent dans la littérature [79]. Nous allons nous focaliser plus particulièrement dans ce travail sur quatre approches très répandues et utilisées dans de nombreux domaines : la méthode de Monte Carlo [39], la méthode des perturbations [69], les méthodes basées sur le krigeage et les méthodes basées sur le chaos polynomial [158, 49]. Dans la suite de cette section, les principes ainsi que les principales applications de ces approches sont présentés.

a. Méthode de Monte Carlo. La méthode de Monte Carlo (MC) est l'approche probabiliste d'analyse de l'incertitude la plus fondamentale et la plus pratique [130]. Elle peut caractériser la variabilité de la réponse d'une structure (d'un système) par l'utilisation d'expériences déterministes répétées selon des lois de probabilité [39]. En effet, à travers des tirages de paramètres incertains suivant leur loi de probabilité, la méthode de MC permet de quantifier directement la dispersion de ces paramètres à l'aide du modèle mathématique qui régit le comportement du système.

L'avantage majeur de la méthode est qu'elle est très facile à mettre en œuvre. Cependant, pour obtenir des résultats avec une précision raisonnable, il est nécessaire d'effectuer un grand nombre de tirages. La méthode de MC peut devenir, alors, très coûteuse dans la pratique et prohibitive en terme

de coût de calcul. Par conséquent, de nombreux travaux de recherche ont été menés pour développer des méthodes plus rentables d'analyse des incertitudes. On peut citer par exemple des méthodes basées sur la méthode de Monté Carlo telles que la méthode de parallélisme [118], la méthode de réduction de la variance [145], la méthode Latin hypercube Sampling [96] et les méta-modèles[6].

b. Méthode des perturbations. La méthode des perturbations a été développée pour l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires par Nayfeh [100]. Elle est l'une des techniques les plus utilisées pour analyser les systèmes aléatoires en ingénierie stochastique [150]. Elle consiste à approximer le comportement stochastique d'un système par une expansion en série de Taylor autour de valeurs moyennes des paramètres incertains. Généralement, elle est précise et efficace dans le cas où le nombre des paramètres incertains est faible puisque les expansions utilisées, pour faciliter la résolution, sont de faible ordre (dans la plupart des études, l'ordre ne dépasse pas deux).

La méthode de perturbation a été utilisée pour analyser les statistiques des valeurs propres complexes (complex eigenvalue analysis : CAE) dans le cadre de la prédiction des vibrations induites par frottement d'un système de freinage [110]. Cependant, cette méthode n'est valable que pour de faibles variations des paramètres incertains. En effet, dès que cette variation augmente, les expansions en série de Taylor ne sont pas vérifiées.

c. Méthodes basées sur le krigeage. Le krigeage [94] est une méthode géostatistique d'interpolation spatio-temporelle utilisée dans diverses disciplines telles que la géologie, la météorologie et plus récemment en mécanique. Le terme krigeage provient du nom de famille de l'ingénieur minier Krige qui a mis au point cette technique dans le cadre de la prospection minière [76]. Cette méthode permet d'estimer des valeurs inconnues de variables à partir d'un certain nombre de valeurs connues de cette variable. Ainsi, elle peut permettre d'estimer des prédictions avec une bonne précision en se basant sur des plans d'expériences qui ne sont pas assez riches. À côté de l'estimation de la valeur moyenne d'un processus aléatoire, le krigeage est capable d'estimer l'erreur de cette estimation.

Dans le cadre de la prise en compte d'incertitudes paramétriques dans des systèmes mécaniques, le krigeage a été utilisée pour prédire de manière robuste les instabilités induites par le frottement de systèmes frottants [108, 30, 31, 138].

d. Méthodes basées sur le Chaos polynomial.

d-1. Principe et premières applications. Le formalisme du chaos polynomial a été développé par Wiener dans le cadre de sa théorie sur le chaos homogène [158]. Il permet d'obtenir une expression fonctionnelle d'un processus stochastique en décomposant son aléa en des composantes déterministes et stochastiques sur une base de polynômes orthogonaux. La théorie du chaos polynomial est basée sur la possibilité d'exprimer tout processus $X(\xi)$ de variables stochastiques gaussiennes ξ du second ordre (à variance finie) par un développement en série de polynômes d'Hermite $\phi(\xi)$. La partie déterministe est modélisée par des coefficients $\bar{x}_j$, appelés les coefficients de chaos ou aussi les modes stochastiques, qui pondèrent les fonctions polynômiales d'Hermite représentant les composantes stochastiques.

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (1.6)$$

Il est montré que la famille des polynômes d'Hermite ϕ_j forme une base orthogonale permettant une convergence optimale au sens des moindres carrés du développement en chaos pour des processus aléatoires de variables gaussiennes [22]. Une généralisation de ces développements en chaos à des processus non-gaussien a été développée par un schéma dit d'Askey [1] pour assurer une correspondance entre des familles de polynômes orthogonaux et des familles de lois de probabilité. La notion

de développement en chaos polynomial généralisé (gPC), nommé aussi développement de Wiener-Askey, peut alors être définie et une convergence exponentielle est généralisée dans le cas de lois de probabilité quelconque gaussiennes et non-gaussiennes [160].

La théorie de Chaos polynomial a été utilisée dans des nombreuses applications. Les premières utilisations ont porté sur le domaine de la turbulence dans les années soixante [75]. En 1991, Ghanem et Spanos [48] ont combiné le développement de Wiener-Hermite avec la méthode des éléments finis pour prédire la dispersion des paramètres incertains dans des structures mécaniques. Depuis ce travail et suite à la définition du gPC [160], la théorie du chaos polynomial a été utilisée pour traiter des problématiques dans différents domaines tel que l'interaction fluide-structure (ou vibro-acoustiques) [29], la dynamique des fluides [59] et l'étude du comportement dynamique de systèmes frottants [103, 147, 111, 128, 32, 107].

d-2. Schémas intrusifs et non intrusifs. L'utilisation de développements en chaos polynomial pour modéliser un processus stochastique associé à un modèle incertain nécessite la détermination des coefficients du chaos $\bar{x}_j$. Dans la littérature, il existe deux approches pour les calculer : intrusive et non intrusive.

Intrusif. La méthode consiste à projeter le modèle incertain dans la base du chaos polynomial et ainsi obtenir un système d'équations couplées et déterministes gardant les mêmes propriétés de linéarité que le système original et dont les inconnues comportent les coefficients du chaos modélisant le processus stochastique [4]. Ainsi cette méthode nécessite d'utiliser des techniques de projection de Galerkin et peut être délicate à mettre en oeuvre à cause de son intrusivité dans le modèle incertain lors de sa projection. De plus, elle peut rapidement devenir laborieuse et couteuse dans le cas où le modèle incertain admet un nombre de degrés de liberté élevé et/ou le nombre de paramètres incertains est important [103]. Par conséquent, des méthodes dites non intrusives ont été proposées.

Non intrusif. Cette approche permet de calculer les coefficients du chaos polynomial modélisant un processus stochastique sans aucune manipulation du modèle incertain associé à ce processus. Les coefficients peuvent être estimés à partir des certaines mesures du processus en des points particuliers dont l'obtention se fait selon un plan d'expérience. Deux types de méthodes peuvent être distinguées à savoir les méthodes de régression et les méthodes de projection spectrale non intrusive (NISP). Dans la première famille, les méthodes de régression évaluent les coefficients du chaos en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre le processus aléatoire et son approximation via le développement en chaos polynomial. Crestaux *et al.* ont testé l'efficacité de cette famille sur un problème d'analyse de sensibilité [27]. Dans la deuxième famille, les méthodes NISP consistent à projeter le processus aléatoire dans la base du chaos polynomial. Le calcul des coefficients de chaos est alors ramené à des calculs numériques d'intégrales. La méthode de collocation de Gauss est une puissante méthode, de cette famille, pour calculer les coefficients de chaos [3]. Les points d'intégration sont définis à partir des racines des polynômes orthogonaux utilisés. Dans plusieurs études, l'approche par régression propose une alternative intéressante par rapport à la méthode NISP du point de vue de coût de simulation.

Nechak a montré dans le cadre de l'étude du comportement dynamique d'un système frottant avec incertitude que la méthode de régression offre de meilleures performances dans la construction de développement en chaos polynomial que la méthode NISP ou l'approche intrusive [103].

d-3. Solutions aux insuffisances du chaos polynomial généralisé. De façon générale, l'utilisation de développements en chaos polynomial pour modéliser des processus stochastiques est efficace pour des processus dépendant d'un nombre réduit de paramètres incertains. Par contre, dès que le nombre de paramètres devient plus élevé le nombre de coefficients à construire augmente rapidement et le coût de construction du chaos devient très vite prohibitif. Ceci est d'autant plus accentué lorsque le processus à modéliser est fortement non linéaire et que l'ordre du chaos à utiliser est alors

élevé. Pour pallier à cet inconvénient, des méthodes alternatives au chaos polynomial généralisé ont été développées. On peut principalement citer le chaos polynomial multi-éléments ainsi que le chaos polynomial creux.

Chaos polynomial multi-éléments. La méthode du Chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC) a été développée par Wan et Karniadakis afin d'améliorer la précision et de réduire le coût de calcul dans le cas où il y a beaucoup de paramètres incertains dans un système non linéaire [154]. La méthode consiste à décomposer l'espace aléatoire en plusieurs éléments et ensuite de construire les coefficients de chaos dans chaque élément. La valeur du processus stochastique globale peut être déterminée à partir de celle calculée dans tous les éléments. L'utilisation de cette méthode permet généralement de réduire l'ordre du chaos polynomial et donc le temps de calcul. Elle a été utilisée pour prédire la stabilité d'un système mécanique frottant [105]. Elle a également été utilisée pour identifier des discontinuités dans des systèmes dynamiques non linéaires [120]. Cette méthode qui sera utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse va être détaillée dans le prochain chapitre.

Chaos polynomial creux. Le chaos polynomial creux a été proposé par Blatman et Sudret [13]. Il consiste à calculer les seuls termes importants de façon adaptative par un algorithme itératif, exploitant ainsi le fait qu'en pratique beaucoup des coefficients de chaos s'avèrent négligeables. L'algorithme sert à rajouter au développement à chaque itération des termes d'ordre supérieur un par un et de ne garder que ceux qui conduisent à un gain de précision. La méthode a été appliquée dans plusieurs applications. Kieu *et al.* l'ont utilisé pour prédire la stabilité d'un système d'embrayage en présence de paramètres incertains [73]. Par exemple, ils ont montré que pour huit paramètres incertains, le nombre de simulations pour construire le chaos polynomial creux est à pratiquement trois fois plus faible que dans une représentation classique par le chaos polynomial généralisé.

1.3.4 Le chaos polynomial et l'analyse du comportement dynamique des systèmes frottants

La théorie du Chaos Polynomial a été utilisée pour analyser le comportement dynamique des systèmes mécaniques frottants avec incertitude. Cette analyse inclut deux étapes complémentaires : l'étude de la stabilité et l'analyse des niveaux vibratoires ou des cycles limites. Dans [103, 106], des études de stabilité et de détermination des cycles limites ont été effectuées sur un modèle d'un système de freinage, non linéaire et auto-excité, tout en tenant compte des incertitudes en utilisant la théorie de chaos polynomial. L'étude stochastique du même modèle, appelé modèle de Hulten, a été effectuée à partir de deux méthodes basées sur le Chaos Polynomial [129]. La stabilité du point d'équilibre a été déterminée à partir du calcul des valeurs propres stochastiques. Ensuite, dans la zone d'instabilité du système, une étude des cycles limites a été menée. L'efficacité des méthodes pour s'adapter aux modes propres complexes ainsi que pour prédire la dispersion des cycles limites avec une bonne précision a été présentée. La méthode a également été utilisée pour les études respectivement d'un système de transmission à engrenages [53, 52] et d'un système d'embrayage [147] avec paramètres incertains.

De plus, le chaos polynomial multi-éléments (ME-gPC) s'est révélé très efficace pour prédire les vibrations induites par le frottement dans le modèle de Hulten [104, 105]. Plus récemment dans [148], le ME-gPC a été utilisé pour effectuer l'analyse de stabilité d'un système d'embrayage, avec une réduction significative du coût de calcul par rapport au gPC standard.

Tous ces travaux cités dans cette section ont été validés par comparaison avec les résultats obtenus avec la méthode de Monte Carlo appliquées sur le modèle incertain et utilisée comme référence. Les résultats obtenus avec ces méthodes basées sur la théorie du chaos polynomial conduisent à un bon compromis entre le coût de calcul et la précision par rapport la méthode de référence.

1.3.5 Conclusion

Dans cette section, différentes méthodes de prise en compte des incertitudes paramétriques dans l'étude du comportement dynamique de systèmes et plus particulièrement de systèmes frottants ont été présentées avec leurs avantages et inconvénients. La méthode de Monte Carlo appliquée directement au modèle incertain étant facile à mettre en œuvre mais très vite prohibitive en coût de calcul, sera utilisée dans ces travaux de thèse comme méthode de référence pour ne valider que certains résultats obtenus avec les méthodes alternatives proposées. Par ailleurs, la méthode de Monte Carlo sera également appliquée directement sur les modèles développées avec les méthodes alternatives proposées dans ces travaux de thèse. De nombreuses études ont été menées dans la littérature pour développer des méthodes alternatives à la méthode de Monte Carlo permettant une prise en compte des incertitudes avec un coût acceptable. Les résultats obtenus avec les méthodes basées respectivement sur le krigage et le chaos polynomial montrent un fort potentiel pour prendre en compte les incertitudes dans le cadre de l'étude dynamique des systèmes frottants. Nous avons pris la partie dans le cadre de ces travaux de thèse de s'appuyer sur les méthodes basées sur le chaos polynomial.

La littérature montre que, malgré la connaissance accrue du comportement dynamique des systèmes frottants avec paramètres incertains, il est encore très difficile voire impossible de concevoir un système robuste c'est à dire stable malgré les incertitudes paramétriques. Ainsi il est nécessaire de concevoir des stratégies pour contrôler le comportement dynamique de ces systèmes. Ainsi l'objet de la prochaine section est de faire une revue bibliographique des principales stratégies de contrôle des instabilités dans les systèmes frottants.

1.4 Contrôle des vibrations induites par le frottement

1.4.1 Introduction

Les structures mécaniques étant soumises à de multiples sources de vibrations tout au long de leur cycle de vie, le contrôle des vibrations (en général, qu'elles soient ou non induites par le frottement) est un domaine de recherche important. Il permet d'une part de limiter les risques de rupture des structures dues à la fatigue vibratoire ou à des oscillations de trop grandes amplitudes et d'autre part de réduire le bruit dans le but d'améliorer le confort acoustique.

1.4.2 Techniques usuelles

Les méthodes d'atténuation peuvent être classifiées en trois catégories principales :

- Les méthodes de contrôle actif ont été largement développées durant les vingt dernières années. Ils exigent de l'énergie pour actionner des sondes qui reçoivent le signal vibratoire. Ces sondes envoient ensuite des signaux d'entraînement aux dispositifs de commande qui émettent une excitation (en opposition de phase avec le signal d'entrée) de façon à réduire les vibrations indésirables. Le contrôle actif donne généralement de bonnes performances mais il est en général complexe, cher et fragile [123].
- Les méthodes de contrôle semi-actif. Parmi ces dernières il y a celles qui consistent à utiliser des fluides électro- et magnéto-rhéologiques. La particularité de ces fluides réside dans leur viscosité variable par rapport au champ électrique ou magnétique dans lequel ils se trouvent. Cette technologie utilise ces fluides dont le comportement est modifié sous l'action d'un champ magnétique ou électrique. Le caractère dissipatif des fluides rend le système intrinsèquement passif ce qui assure la stabilité du système [141]. Nous pouvons aussi citer les travaux de Bryk *et al.* [20, 21] où un absorbeur hybride électro-acoustique non linéaire nommé en anglais « *Electro-Acoustic Nonlinear Energy Sink* » (EA-NES) a été étudié, expérimentalement et numériquement, pour la réduction du bruit à basse fréquence. D'une façon générale, ces

méthodes de contrôle semi-actif sont fiables mais elles sont relativement complexes à mettre en œuvre.

- Les méthodes de contrôle passif sont les plus simples à mettre en œuvre par rapport aux techniques précédemment citées. Elles consistent à modifier la structure primaire (celle soumise aux vibrations non souhaitées) en ajoutant soit un absorbeur dynamique de vibrations soit un matériau dissipatif. L'amortisseur à masse accordée (« *Tuned Mass Damper* » TMD, en anglais) est le dispositif le plus utilisé pour l'atténuation passive des vibrations mécaniques [157]. Le TMD peut efficacement dissiper l'énergie mais il doit être réglé sur la fréquence naturelle du système auquel il est attaché pour être efficace [152]. Si le TMD se désaccorde, par un changement des fréquences naturelles par exemple, son efficacité diminue considérablement [159]. Durant ces dernières années, une alternative aux TMD, appelée absorbeurs dynamiques non linéaires, est apparue comme une méthode prometteuse pour le contrôle passif de vibrations. Il est possible d'en recenser au moins deux types. D'une part les NES (« *Nonlinear Energy Sink* ») dont l'avantage est de pouvoir s'adapter automatiquement à la fréquence du système à protéger. Ils fonctionnent donc sur une large gamme fréquentielle. Leurs principes ainsi que les domaines d'application seront détaillés dans la section suivante. D'autre part, il y a les NLTV (« *Nonlinear Tuned Vibration Absorber* »). Ces absorbeurs, introduits pour la première fois par Habib *et al.* [54], possèdent un ressort linéaire et un ressort non linéaire dont la forme mathématique est déterminée en fonction de la non-linéarité du système à contrôler, elle n'est donc pas imposée a priori comme dans le cas d'un absorbeur non linéaire de type NES [34, 55].

1.4.3 Techniques utilisant des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES

1.4.3.1 Pompage énergétique

Le concept d'absorbeurs non linéaires du type NES est assez récent. Il a été proposé en 2001 [44], et réalisé pour la première fois en 2005 sur un système mécanique [95]. Son principe repose sur le couplage entre un système primaire - dont on souhaite limiter les vibrations - et un absorbeur non linéaire (un système masse-ressort-amortisseur à raideur purement non linéaire) et de placer l'ensemble sur l'un de ses modes non linéaires afin de produire des transferts quasi-irréversibles de l'énergie vibratoire ou acoustique du système à protéger vers l'absorbeur dynamique non linéaire. Ce phénomène est appelé pompage énergétique (où TET pour « *Targeted Energy Transfer* »). Ces absorbeurs non linéaires ont un avantage déterminant pour certaines applications. En effet, comme énoncés précédemment ils s'adaptent automatiquement à la fréquence du système à protéger et fonctionnent donc sur une large gamme fréquentielle. De ce fait ils ont été utilisés dans le cadre de plusieurs applications comme l'atténuation des vibrations mécaniques [153, 28], la réduction du bruit [5] ou encore l'atténuation sismique [113, 90]. Cependant, il a été montré que le NES est caractérisé par un seuil d'activation [151]. Cela signifie que le NES n'est capable d'agir efficacement qu'au-delà d'une certaine quantité d'énergie présente dans le système primaire.

Selon la nature de la non-linéarité, le NES peut être du type vibro-impact (VINES) [46, 50, 119], NES dont la non-linéarité est représentée par des fonctions discontinues [78] ou NES dont la non-linéarité est de type raideur cubique. Ce dernier type du NES est le plus utilisé dans la littérature. L'ouvrage [151] donne un large aperçu de l'utilisation des NES cubiques. Les NES sont utilisés pour atténuer tout type de vibrations. Dans le cas de l'atténuation d'oscillations libres de structures primaires linéaires, le pompage énergétique permet un retour à des amplitudes quasi-nulles plus rapidement qu'un simple amortissement ajouté. Sur ce point l'article de revue [83] décrit de façon détaillée les concepts théoriques mis en jeu et les études expérimentales permettent de les valider. Enfin les applications en ingénierie y sont discutées. Les NES permettent également l'atténuation de vibrations dans le cas de structure soumises à du forçage harmonique ou bien sujette à des instabilités dynamiques. À ce sujet, un second article de revue [45] décrit les résultats théoriques, expérimentaux

et numériques pertinents.

Le cas de l'atténuation d'instabilités dynamiques nous intéresse particulièrement. En effet, ce sont ces dernières qui sont à l'origine des cycles limites d'oscillations (ou LCO pour « *Limit Cycle Oscillations* ») et c'est par ce phénomène que se forment les vibrations induites par le frottement considérées dans ce manuscrit (cf. section 1.2.2). Dans ce contexte il a été montré que les NES permettent d'atténuer, voire de supprimer l'instabilité et ainsi d'élargir la région de l'espace des paramètres du système primaire dans lequel ce dernier fonctionne sans problème de rupture ou de fatigue. D'abord démontrés numériquement dans [80], les quatre régimes de fonctionnement résultants du couplage entre un système instable (en l'occurrence un oscillateur de Van der Pol) et un NES ont ensuite été décrits et prédits théoriquement par Gendelman [47]. Ces quatre régimes sont : la suppression complète de l'instabilité (le NES a stabilisé le système), l'atténuation par réponse périodique (c'est également un LCO mais d'amplitude moins importante que celle du système sans NES), atténuation par réponse fortement modulée (où SMR pour « *Strongly Modulated Response* », il s'agit d'une réponse fortement modulée en amplitude et en phase mais dont l'amplitude reste moins importante que celle du LCO du système primaire seul) et enfin pas d'atténuation de l'instabilité. Dans [81, 82], les auteurs ont démontré numériquement et expérimentalement qu'un NES peut être utilisé efficacement pour atténuer une instabilité aéroélastique. Ils ont observé les mêmes quatre régimes de fonctionnements typiques décrits précédemment. Ces résultats ont été prouvés théoriquement par une analyse asymptotique [43]. Dans [9, 10], les auteurs ont également observé ces régimes dans le cas de l'utilisation de NES pour résonance d'hélicoptère (qui est une instabilité dynamique). Un travail qui nous intéressera particulièrement est celui de Bergeot *et al* [11] où il est montré la possibilité d'atténuer une instabilité induite par le frottement à l'aide de deux NES. En effet, le modèle étudié est celui que sera utilisé dans le cadre de cette thèse. Plus récemment, dans [7, 8], l'efficacité d'un réseau de NES pour atténuer une instabilité est étudiée. Des simulations numériques montrent la présence des mêmes quatre régimes observés dans le cas d'un seul NES et une analyse asymptotique en permet la prédiction. Dans ces travaux, les quatre régimes typiques sont classés en deux catégories : les régimes atténués (où le NES agit, ce sont les trois premiers cités plus haut) et un régime non atténué (où le NES n'agit pas). La présence de ces deux types de régimes conduit à une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire du système couplé. Cette discontinuité rend le comportement dynamique du système très sensible aux variations de certains paramètres.

1.4.3.2 Efficacités des NES avec présence d'incertitudes

Relativement peu d'études traitent des NES en présence d'incertitudes. Il y a d'abord celles qui étudient le pompage énergétique entre un NES et une structure primaire où certains paramètres du système couplé sont incertains. Dans [51], par le biais de l'approche du chaos polynomial, le comportement dynamique d'un système à deux ddl couplé à un NES est analysé. Le but est de vérifier la robustesse du TET lorsque certains paramètres sont incertains. Les auteurs montrent que même en présence de paramètres incertains, il est possible de concevoir un NES de manière à obtenir un pompage d'énergie efficace. Ce travail est jusqu'à maintenant l'unique étude sur les NES au moyen de la théorie du chaos polynomial. Cataldo *et al.* [23] ont également étudié la robustesse du pompage énergétique dans un système linéaire à un ddl couplé avec un NES en présence des trois paramètres incertains. Des variables aléatoires sont associées aux paramètres incertains et les fonctions de densité de probabilité qui y sont associées sont reconstruites en appliquant le principe d'entropie maximale. Les principales conclusions de cette étude sont que le système est plus robuste lorsque des incertitudes liées aux deux amortisseurs présents dans le système sont prises compte, car même avec un niveau de dispersion plus important dans ces paramètres, le phénomène de pompage d'énergie pourrait encore être observé.

Un second aspect (qui nous intéressera moins dans le cadre de cette thèse) est celui de l'étude du système couplé (système primaire + NES) soumis à une excitation stochastique (un bruit blanc en général). Ceci conduit à devoir analyser une équation différentielle stochastique. À notre connais-

sance, la première sur ce sujet est celle de Sapsis *et al.* [127] où un problème du pompage énergétique entre un système primaire linéaire et un NES en présence du bruit est étudié. L'approche conduite à une équation différentielle stochastique dit de Itô qui est résolue numériquement. L'étude révèle qu'en présence du bruit, le régime optimal de TET, prédit dans un contexte déterministe, est préservé et même amélioré en raison de l'interaction entre la non-linéarité et le bruit. Une étude similaire est reportée dans [77]. Les effets des paramètres du système ainsi que l'intensité du bruit sur le régime optimal de TET sont étudiés. L'analyse révèle encore une fois que l'interaction des non-linéarités et du bruit améliore le régime optimal de TET prévu dans l'analyse déterministe.

1.4.4 Conclusion

Dans cette section, un bref état de l'art sur la capacité des NES à atténuer passivement les vibrations d'une structure mécanique primaire a été présenté. Nous nous sommes focalisé sur l'atténuation d'instabilité dynamique puisqu'il en sera question dans le cadre de cette thèse. D'autre part, les travaux, peu nombreux, sur l'efficacité des NES avec présence d'incertitudes paramétriques y ont également été reportés. À notre connaissance, seuls les deux articles cités portent sur cette problématique et ne traitent pas de l'atténuation de cycles limites d'oscillations. Dans ce dernier cas, du fait de la discontinuité dans le profil des LCO du système, le comportement dynamique de ce dernier peut s'avérer très sensible à la variation des paramètres. Il apparaît donc important d'être en mesure, en prenant en compte les incertitudes paramétriques auxquelles le système primaire peut être confronté, de concevoir un NES qui soit robuste, c'est-à-dire agissant au maximum dans l'espace des paramètres incertains correspondant à des régimes non atténués. Quelques travaux évoquent déjà cette problématique et sont listés dans la section suivante.

1.5 Optimisation des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES

1.5.1 Introduction

L'optimisation de structures mécaniques est une préoccupation essentielle des chercheurs qui conçoivent des objets industriels innovants afin d'améliorer leur comportement et de répondre aux différentes exigences des clients et des fabricants. L'optimisation déterministe (« *Deterministic Optimization* » DO) est la plus utilisée. Cependant, durant cette dernière décade, l'optimisation sous incertitude (« *Optimization under Uncertainty* » OU) a largement été utilisée en ingénierie mécanique. L'OU est très demandée en raison des sources illimitées d'incertitudes en mécanique. Ce type d'optimisation, contrairement au DO, est capable de produire des résultats avec un haut degré de robustesse et de fiabilité. Dans cette thèse, l'optimisation robuste sous incertitude d'un absorbeur dynamique non linéaire utilisé pour atténuer les vibrations induites par le frottement est proposée. Nous limiterons aux problèmes d'optimisation mono-objectif dont l'optimum recherché est clairement défini contrairement à l'optimisation multi-objectif où la solution optimale cherchée est un ensemble de points correspondant aux meilleurs compromis possibles entre plusieurs objectifs. Dans un premier temps nous rappellerons le principe et le formalisme de l'optimisation puis nous dresserons un bref état de l'art de son utilisation dans le contexte des NES.

1.5.2 Principe et formalisme de l'optimisation

1.5.2.1 Optimisation déterministe

L'optimisation déterministe est un ensemble d'outils mathématiques qui consistent à trouver la meilleure configuration de la conception d'un système en optimisant sa fonction de réponse appelée aussi un objectif en évitant la violation de ses contraintes. La formulation du DO mono-objectif est

donnée par l'équation suivante :

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimiser} & f(x) \\
 \text{sous la contrainte} & l \leq g(x) \leq u \\
 \text{sujet à} & x_l \leq x \leq x_u
 \end{array} \quad (1.7)$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ représente la fonction objectif et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de n paramètres de contrôle à disposition du concepteur et utilisés pour l'optimisation. Il est borné par les vecteurs inférieur et supérieur $x_l, x_u \in \mathbb{R}^n$ respectivement. La fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^c$ renvoie un vecteur de c contraintes du problème et $u, l \in \mathbb{R}^c$ sont les bornes supérieures et inférieures de ces contraintes.

Dans la littérature, il existe de nombreux algorithmes numériques pour résoudre un problème de DO. Ces algorithmes peuvent être classés d'une part en algorithmes d'optimisation déterministes à l'aide des opérateurs à comportement déterministe qui n'utilisent que les valeurs des fonctions objectifs et des contraintes, on peut citer les méthodes des recherches directes (« *Direct Search* ») [17] et d'autre part en algorithmes d'optimisation stochastique qui s'appuient sur des processus aléatoires pour générer de nouveaux individus, pour ces derniers on peut citer les algorithmes évolutionnaires tels que les algorithmes génétiques [62]. La DO permet de produire des résultats optimaux sans prendre en compte les incertitudes environnementales. En ignorant ces incertitudes, le risque est d'obtenir des résultats sensibles aux variables d'entrée et avec faible degré de fiabilité. Pour plus de détail, le lecteur pourra consulter la thèse de Braydi [18].

1.5.2.2 Optimisation sous incertitudes

L'optimisation sous incertitude permet de traiter différents problèmes d'optimisation dans lesquels un certain degré d'incertitude entoure une ou plusieurs des variables impliquées. Il est utilisé pour surmonter les risques liés au DO évoqués ci-dessus. Les incertitudes liées aux variables d'entrée et aux paramètres sont prises en compte dans le processus d'optimisation [84]. Selon le problème à résoudre, il existe deux catégories d'OU : l'optimisation robuste (« *Robust Design Optimization* » RDO) et l'optimisation fiabiliste (« *Reliability Based Design Optimization* » RBDO). Dans [161], la robustesse est définie par le degré de tolérance du système à être insensible aux variations des paramètres incertains à la fois du système lui-même et de l'environnement. La fiabilité est définie par la probabilité qu'un système remplisse sa fonction prévue sans défaillance pendant une période spécifiée et dans les conditions de fonctionnement.

Optimisation robuste (RDO). La RDO a été introduite par Genichi Taguchi qui a développé une méthode (le méthode dite de Taguchi [144, 117]) pour améliorer la qualité d'un système et le rendre insensible aux variations des paramètres. Cette méthode a été énormément utilisée dans plusieurs domaines comme la mécanique de structure [19] et l'aéronautique [132]. Plusieurs formulations de la RDO sont données dans la littérature. La formulation classique est formulée comme suit :

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimiser} & \mathbf{E}[f(\xi, x)] \\
 \text{sous la contrainte} & l \leq g(x) \leq u \\
 \text{sujet à} & x_l \leq x \leq x_u \\
 & \xi_l \leq \xi \leq \xi_u
 \end{array} \quad (1.8)$$

La mesure de la robustesse est modélisée dans ce cas par l'espérance mathématique $\mathbf{E}[f(\xi, x)]$ de l'ensemble des évaluations de la fonction objectif en fonction des variables de conception à optimiser x dont les valeurs sont comprises entre les bornes inférieure et supérieure x_l et x_u respectivement, et de la dispersion des paramètres incertains ξ dont les tirages sont effectués entre ses bornes inférieure et supérieure ξ_l et ξ_u respectivement et g est la fonction de contrainte comme dans le cas RDO.

Optimisation fiabiliste (RBDO). La RBDO est un type d'optimisation qui produit des résultats très fiables grâce à l'évaluation des contraintes du problème sous incertitude [67, 38, 40]. La formulation RBDO pour un problème mono-objectif est présentée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \mathbf{E}[f(\xi, x)] \\ & \text{sous la contrainte} && Q_\alpha[g(\xi, x)] \leq 0 \\ & \text{sujet à} && x_l \leq x \leq x_u \\ & && \xi_l \leq \xi \leq \xi_u \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dans ce cas la fonction de contrainte déterministe g est remplacée par son quantile $Q_\alpha[g]$, où α est le degré de fiabilité souhaité.

1.5.3 Techniques d'optimisation appliquées aux absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES

1.5.3.1 Optimisation déterministe

Durant ces dernières années, une attention particulière est portée sur la conception optimale du NES dans un contexte déterministe. Nguyen *et al.* [109] ont étudié l'efficacité d'un NES visant à atténuer les oscillations libres d'un oscillateur à un degré de liberté. L'objectif de ce travail est d'établir un critère de conception permettant d'une part de s'assurer que l'absorbeur NES est actif et d'autre part de trouver les valeurs adéquates de la raideur non linéaire du NES pour une absorption d'énergie optimale lors des phases de pompage. La formulation de l'optimisation est basée sur une analyse asymptotique des équations du mouvement. Elle permet de mettre l'accent sur une nouvelle définition de l'énergie d'activation et d'étudier l'influence de l'amortissement sur l'efficacité du transfert d'énergie du système vers le NES. Une étude de l'influence de l'amortissement du NES sur l'efficacité du TET est également présentée.

Une analyse des performances d'un NES fixé à une poutre a été faite par Kani *et al.* [70]. Dans ce travail, les paramètres du NES ont été optimisés par la méthode d'optimisation de l'essaim de particules [71] en utilisant comme fonction objectif la moyenne quadratique de la réponse du système primaire. Les résultats montrent que l'augmentation de la première fréquence propre du système primaire, à laquelle une impulsion externe est imposée, retarde l'activation du NES. De plus, l'augmentation de l'amplitude de l'excitation externe (du type choc) a tendance à diminuer la valeur optimale de la raideur du NES.

Dans [124], l'optimisation d'un NES bistable a été étudié dans le cas du contrôle des vibrations d'un oscillateur linéaire excité par une force périodique. Il est montré que le NES bistable peut être efficace et robuste dans une large gamme d'amplitude d'excitation. Enfin, un critère de conception optimale et une configuration de paramètres correspondants sont proposés pour guider l'application de ce type de NES.

Wang *et al.* [156] l'atténuation de vibrations sismiques de bâtiments de grande hauteur est considérée au moyen d'un « track NES » (un nouveau type du NES constitué d'une masse auxiliaire se déplaçant librement sur une voie de forme spéciale) et de VINES. Ils ont montré que ces deux dispositifs peuvent être des stratégies de contrôle très rentables et offrent une solution prometteuse pour l'atténuation de la réponse sismique des bâtiments de grande hauteur. Des optimisations mono-objectifs et multi-objectifs ont été effectuées et la performance de ces absorbeurs a été évaluée en termes d'efficacité d'atténuation et de facteurs économiques lorsqu'ils sont attachés à un immeuble représentatif de trente-deux étages. Les résultats montrent que le "vibro-impact track NES" (VINES) montre une forte robustesse face aux changements de rigidité structurelle et au niveau de l'énergie d'entrée. De plus, il est le dispositif le plus rentable car il a un très faible coût et ne nécessite qu'un léger amortissement.

Qui *et al.* [125] ont proposé des critères de conception VINES optimisé pour le contrôle de

vibrations transitoires ou dues à une excitation périodique. Les résultats montrent que les critères de conception peuvent non seulement prédire le TET efficace à la fréquence de résonance, mais aussi une performance optimale dans une gamme de fréquences.

Dans le contexte de l'optimisation déterministe des NES on peut aussi citer les travaux de Dolatbadi et al. [37], Nasr *et al.* [99], Tripathi *et al.* [149] et Oliva *et al.* [116].

1.5.3.2 Optimisation sous incertitudes

Il existe peu de travaux sur l'optimisation de NES sous incertitudes. La prise en compte d'incertitudes est pourtant primordiale, car il a été démontré que la dynamique des NES présente une sensibilité très importante aux incertitudes.

Une première étude sur la sensibilité des NES aux incertitudes a été réalisée par Boroson [15] dans son mémoire de fin d'étude. L'auteur parle de « discontinuité dans l'efficacité » des NES, c'est à dire que l'efficacité peut passer d'une valeur élevée à une valeur faible suite à une petite perturbation des paramètres de conception ou des conditions initiales. Ceci est à relier à la notion de seuil d'activation évoquée plus haut. Il en résulte une forte sensibilité du comportement des NES aux incertitudes. Dans ce même travail, quelques critères pour évaluer l'efficacité du NES à réduire des vibrations sont présentés. Le premier est le pourcentage de l'énergie initiale totale absorbée par le NES au cours de son fonctionnement, souvent noté $E_{NES_{inf}}$. On trouve aussi le critère t_{99} qui consiste à mesurer le temps nécessaire pour que l'énergie du système principal diminue de 99 % ou qu'il reste 1 % de l'énergie initiale. Ces critères sont utilisés pour caractériser le NES d'une façon générale.

Par la suite, dans [14], l'optimisation robuste d'un NES est effectuée pour étudier son pouvoir dissipatif dans le cas où il est attaché à un simple système d'un seul degré de liberté. Il est montré à nouveau que la variation de certains paramètres du système ou des conditions initiales, engendre une discontinuité sur l'allure de $E_{NES_{inf}}$. Un algorithme d'optimisation basé sur la technique de Machine à Vecteurs de Support¹ (« *Support Vector machine* » SVM) et un méta-modèle de krigeage ont été utilisés pour prédire cette discontinuité en fonction de la dispersion de certains paramètres incertains.

Khazaee *et al.* [72] ont étudié l'optimisation stochastique de plusieurs NES (configurés en parallèle et en série) attachés à un tuyau transportant un fluide simplement supporté. Les résultats démontrent que les optimums obtenus dans le cadre d'une optimisation stochastique sont beaucoup plus robustes que ceux obtenus avec une optimisation déterministe.

Pidaparthi and Missoum [121, 122] ont effectué l'optimisation sous incertitudes de NES dans le cadre de l'atténuation des vibrations auto-entretenues d'une aile d'avion créées par une instabilité aéroélastique (qui est également due à un couplage de modes). Selon les propriétés non linéaires du système, ce dernier peut présenter des LCO qui sont soit super-critiques soit sous-critiques. Dans ce cas le diagramme de bifurcation du système (qui représente l'amplitude des LCO en fonction de la vitesse de l'écoulement de l'air sur l'aile) peut présenter deux types de discontinuités : celle déjà évoquée plus haut (cf. Sect. 1.4.3.1) inhérente au fonctionnement du NES et celle due la génération de LCO sous-critiques. Toujours en utilisant la technique de Machine à Vecteurs de Support et un méta-modèle de krigeage, plusieurs problèmes d'optimisation stochastique sont présentées dans le but de maximiser la réduction moyenne de l'amplitude des LCO.

1.5.4 Conclusion

L'optimisation sous incertitude du NES peut potentiellement être une technique efficace pour surmonter les difficultés dues à la très grande sensibilité à certains paramètres du comportement vibratoire d'un système couplé à un ou plusieurs NES. Elle peut permettre de concevoir des NES

1. Les machines à vecteurs de support ou séparateurs à vaste marge sont un ensemble de techniques d'apprentissage supervisé destinées à résoudre des problèmes de discrimination et de régression. Les SVM sont une généralisation des classifieurs linéaires.

robustes par rapport aux incertitudes (paramétriques où portant sur les conditions initiales) inhérentes à tout système mécanique réel. Dans cette thèse, une optimisation sous incertitudes, basée sur la théorie de chaos polynomial, va être développée pour la conception robuste de NES attachés à un système mécanique frottant (cf. chapitres 5 et 6).

1.6 Conclusion

Cette étude bibliographique permet de fixer le cadre dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. En effet, la première partie de ce chapitre (section 1.2) a été consacrée à la description générale des concepts de base décrivant les vibrations induites par le frottement. Le mécanisme de couplage de modes, expliquant la genèse d'instabilités dans les systèmes mécaniques frottants, est retenu ici pour modéliser ces vibrations. Pour atténuer les cycles limites résultants de ces instabilités, des absorbeurs dynamiques non linéaires du type NES seront utilisés en raison de leurs avantages par rapport aux autres techniques usuelles de contrôle des vibrations. Néanmoins, il a été démontré que ce type d'absorbeurs a des performances très sensibles aux incertitudes et ne sont par conséquent efficaces que dans des plages données des paramètres de conception. Les incertitudes paramétriques doivent donc être prises en compte pour espérer concevoir un système (constitué du système primaire et d'un ou plusieurs NES) qui soit robuste et optimal. La théorie du chaos polynomial (dont les principes sont rappelés au chapitre 2 de ce manuscrit) est la technique retenue pour prendre en compte ces incertitudes.

Cette étude bibliographique montre finalement qu'à ce jour très peu d'études traitent de la problématique de l'optimisation robuste de NES en présence d'incertitudes paramétriques et qu'au commencement de cette thèse la plupart n'étaient pas encore publiées. De plus, aucune n'utilisent le chaos polynomial ce qui met en évidence l'originalité des travaux présentés dans ce manuscrit.

Première partie

Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial

Chapitre 2

Éléments de théorie

Sommaire

2.1	Introduction	28
2.2	Dynamique des systèmes mécaniques non linéaires	28
2.2.1	Stabilité	28
2.2.2	Détermination des cycles limites par la méthode d'intégration temporelle	30
2.3	Quantification des incertitudes	30
2.3.1	Méthode de Monte Carlo	30
2.3.2	Chaos polynomial généralisé	31
2.3.3	Chaos polynomial généralisé multi-éléments	35
2.4	Conclusion	37

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les éléments de la théorie utilisés dans cette thèse pour étudier le comportement dynamique d'un système mécanique non linéaire et d'exposer les différentes approches de propagation d'incertitudes paramétriques dans une structure mécanique. Dans la première partie, une brève description des outils mathématiques utilisés pour étudier la stabilité ainsi que les cycles limites d'un système dynamique non linéaire est effectuée. La deuxième partie est consacrée à la présentation des différentes méthodes stochastiques utilisées pour prendre en compte les paramètres incertains du système étudié. Les méthodes décrites dans cette deuxième partie sont respectivement la méthode de monte Carlo (MC), la théorie de Chaos Polynomial généralisé (gPC) et la méthode de Chaos Polynomial généralisé (ME-gPC) Multi-Elément.

2.2 Dynamique des systèmes mécaniques non linéaires

Le comportement dynamique d'un système mécanique non linéaire peut être difficile à modéliser et à résoudre. Dans cette section, une brève description de quelques outils, permettant d'analyser la stabilité ainsi que le cycle limite de ce système, est faite. Pour plus des détails sur ces outils, le lecteur pourra consulter les thèses suivantes [135, 103].

2.2.1 Stabilité

Un système dynamique non linéaire est généralement décrit par une équation différentielle de la forme suivante [102] :

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{avec } f \text{ une fonction non linéaire.} \quad (2.1)$$

Le point d'équilibre x_e du système (2.1), s'il existe, est une solution de l'équation algébrique suivante :

$$f(x_e) = 0 \quad (2.2)$$

D'une façon générale, deux définitions de la stabilité sont à noter :

Stabilité de Lyapunov. le point d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov, si le système (2.1) maintient sa position tout près de x_e lorsque celui-ci est perturbé. C'est-à-dire, étant donné un petit nombre $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour toute condition initiale x_0 proche de l'équilibre x_e pour laquelle $\|x_0 - x_e\| < \delta$ pour $k = m$ satisfait $\|\varphi(x_0) - x_e\| < \epsilon$ pour tous les $k > m$, où k et $m \in \mathbb{Z}^+$ sont les paramètres responsables de la perturbation du système (2.1) et φ est le flot dynamique du système (2.1).

Stabilité asymptotique. le point d'équilibre est asymptotiquement stable, s'il est stable au sens de Lyapunov et en plus pour toute condition initiale proche de l'équilibre x_e , le système converge au bout d'un temps suffisamment long vers la position d'équilibre. C'est-à-dire, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour toute condition initiale x_0 proche de l'équilibre x_e pour laquelle $\|x_0 - x_e\| < \delta$ pour $k = m$ satisfait $\|\varphi(x_0) - x_e\| \rightarrow 0$ pour tous les $k > m$, où k et $m \in \mathbb{Z}^+$ sont les paramètres responsables de la perturbation du système (2.1).

2.2.1.1 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas particulier des systèmes linéaires définis par l'équation (2.3), il existe un point d'équilibre unique x_e tel que $f(x_e) = 0$.

$$\dot{x} = f(x) = Ax \quad (2.3)$$

où A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$.

La solution de l'équation (2.3) est donnée par $x_0 e^{At}$, avec x_0 une condition initiale quelconque. Le comportement asymptotique de cette solution est complètement caractérisé par les valeurs propres de la matrice A :

- Cette solution est asymptotiquement stable pour $t \rightarrow \infty$ si et seulement si pour toutes les valeurs propres λ de A , $Re(\lambda) < 0$.
- S'il existe une valeur propre λ de A avec $Re(\lambda) > 0$, alors la solution est instable pour $t \rightarrow \infty$.

2.2.1.2 Stabilité des systèmes non linéaires

Contrairement aux systèmes linéaires, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibre. Deux approches principales sont définies pour analyser la stabilité des solutions d'équilibre des systèmes dynamiques non linéaires (2.1) :

- La première est la méthode directe de Lyapunov qui consiste à étudier la stabilité d'un système non linéaire en cherchant à lui construire une fonction de Lyapunov.
- La deuxième est la méthode indirecte de Lyapunov qui consiste à étudier la stabilité d'un système non linéaire en analysant le système linéarisé autour du point d'équilibre x_e .

Une étude comparative sur l'analyse de la stabilité des comportements dynamiques du système frottant par la méthode directe de Lyapunov d'une part et la méthode indirecte de Lyapunov d'autre part a été faite dans les travaux de Nechak *et al.* [103]. Les résultats montrent que la méthode directe de Lyapunov est non concluante dans le cas où aucune fonction de Lyapunov n'est construite. Ainsi, la méthode indirecte de Lyapunov sera utilisée dans notre travail pour analyser la stabilité des comportements dynamiques du système frottant sans et avec NES.

Méthode indirecte de Lyapunov. La méthode indirecte de Lyapunov est basée sur la linéarisation du système non linéaire (2.1). L'obtention du linéarisé du système se fait en déterminant son approximation du premier ordre au voisinage d'un point d'équilibre x_e pour une perturbation δx . Cette approximation est donnée par le développement du premier ordre de Taylor suivant :

$$f(x_e + \delta x) = f(x_e) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_e} \delta x + O(\delta x) \quad (2.4)$$

$$\delta \dot{x} = Df_{x_e} \delta x \quad (2.5)$$

où $Df_{x_e} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e}$ est la matrice Jacobienne du système (2.1) au point d'équilibre.

L'approche indirecte de Lyapunov peut être résolue par deux techniques différents :

- La première dite de Routh-Hurwitz consiste à calculer de façon analytique des critères à partir des coefficients du polynôme caractéristique du système linéarisé. Le signe de ces critères permet alors d'évaluer l'état de stabilité du système.
- La deuxième est basée sur l'analyse des valeurs propres, de la matrice Jacobienne Df_{x_e} , du système linéarisé :
 - Si toutes les parties réelles des valeurs propres de Df_{x_e} sont strictement négatives, alors x_e est asymptotiquement stable.
 - S'il existe au moins une valeur propre de Df_{x_e} dont sa partie réelle est strictement positive, alors x_e est instable.
 - Si toutes les parties réelles des valeurs propres de Df_{x_e} sont strictement négatives et qu'il existe au moins une valeur propre qui soit imaginaire pure ou nulle, alors le point d'équilibre x_e peut être stable, asymptotiquement stable ou instable.

2.2.2 Détermination des cycles limites par la méthode d'intégration temporelle

L'étude paramétrique de la stabilité d'un système dynamique non linéaire permet d'identifier les zones pour lesquelles les valeurs des paramètres conduisent le système à un comportement soit stable soit instable. Dans des zones d'instabilité, et après un régime transitoire, le système peut tendre et saturer vers un comportement dynamique décrivant des cycles limites. Plusieurs techniques existent pour résoudre les équations différentielles décrivant le comportement dynamique du système non linéaire [35], tel que la méthode d'intégration temporelle, la méthode de différence finies, la méthode de Shooting, la méthode de perturbation, la méthode de balance harmonique et la méthode de collocation.

La méthode d'intégration temporelle est adaptable à tous les types de non-linéarités. De plus, elle permet de calculer tout type de réponses vibratoires, aussi bien transitoire que périodique, voir même chaotique. Son principe consiste à intégrer, pas à pas les équations différentielles régissant la solution à partir d'une condition initiale quelconque jusqu'à atteindre le régime permanent.

En mécanique, la forme générale des équations différentielles ordinaires temporelles du second ordre d'un système dynamique non linéaire est donnée par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)) \quad (2.6)$$

où M , C et K sont respectivement les matrices masse, raideur et amortissement et $\mathbf{F}_{\text{NL}}$ est le vecteur des forces non linéaires.

L'équation différentielle (2.6) peut s'exprimer dans l'espace d'état sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t) \\ \ddot{\mathbf{X}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \dot{\mathbf{X}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}(t)) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Cette opération permet d'exploiter les nombreux intégrateurs du premier ordre existants. La résolution du système (2.7) se fait par la détermination du vecteur $\{\mathbf{X}(t) \dot{\mathbf{X}}(t)\}$ en plusieurs instants consécutifs à partir d'un instant initial jusqu'à un instant final. Les algorithmes d'intégration les plus utilisés sont ceux de Newmark et de Runge-Kutta. Dans ces travaux de thèse, l'algorithme de Runge-Kutta, effectué par le solveur ODE45 dans Matlab, sera utilisé pour déterminer les cycles limites du système mécanique frottant sans et avec NES.

2.3 Quantification des incertitudes

2.3.1 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo (MC) est une méthode numérique utilisée pour déterminer l'impact des incertitudes dans des modèles mathématiques. Selon le modèle mathématique sur lequel elle est appliquée, cette méthode permet d'obtenir des solutions de référence ou des solutions estimées. La modélisation de l'incertitude via l'algorithme de la méthode MC est basée sur 5 étapes principales comme indiqué ci-dessous :

- Identification probabiliste des paramètres incertains du modèle.
- Génération d'un plan d'expérience des paramètres incertains selon les lois probabilistes identifiées.
- Propagation du plan d'expérience généré dans le modèle et détermination du jeu de sortie appelée également réponse du modèle ou quantité d'intérêt (QI).
- Analyse statistique de la QI correspondant aux différentes valeurs de jeu de paramètres correspondant au plan d'expériences.
- Analyse de la convergence de la distribution de la QI.

Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mathématique analytique (ou algorithmique) décrivant un système stochastique quelconque et X un vecteur de paramètres incertains modélisés par un vecteur aléatoire $X = [X_1, X_2, \dots, X_d]$. La réponse Y du modèle est aléatoire, solution de l'équation du modèle

$$Y = g(X). \quad (2.8)$$

Via un ensemble de N tirages des paramètres incertains, il est possible par la méthode de MC d'estimer la loi de distribution de la réponse aléatoire en évaluant les caractéristiques statistiques données par la valeur moyenne $\hat{\mu}_Y$ et l'écart type $\hat{\sigma}_Y^2$ comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X^{(i)}) \\ \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(g(X^{(i)}) - \hat{\mu}_Y \right)^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

La convergence de la méthode de MC est affirmée par le théorème de la limite centrale [134] dont la normalisation de $\hat{\mu}_Y$ notée $\hat{\mu}_{\text{normalisé}}$ et calculée avec l'équation (2.10) converge vers une loi normale standard. lorsque N est grand.

$$\hat{\mu}_{\text{normalisé}} = \sqrt{N} \frac{\hat{\mu}_Y - \mu_Y}{\hat{\sigma}_Y}. \quad (2.10)$$

Pour N tirages, l'intervalle de confiance pour la valeur moyenne est donné par :

$$\mu_Y \in \left[\hat{\mu}_Y - \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_Y + \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N}} \right] \quad (2.11)$$

avec un niveau de confiance de $100(1 - \alpha)\%$, où $u_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\Phi(x)$ étant la fonction de répartition de la loi normale standard définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.12)$$

Le nombre minimal de tirages, pour un niveau de confiance de $100(1 - \alpha)\%$, est donné par :

$$N_{\min} = \text{ceil} \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} \hat{C}_Y}{\epsilon_{\mu_Y}} \right)^2 \right], \quad (2.13)$$

où

- la fonction $\text{ceil}[x]$ arrondit x au nombre entier supérieur suivant,
- $\hat{C}_Y = \hat{\sigma}_Y / \hat{\mu}_Y$ désigne le coefficient de variation de la réponse Y ,
- ϵ_{μ_Y} est l'erreur relative de la valeur moyenne calculé à partir de l'intervalle de confiance (2.11) et donné par :

$$\pm \epsilon_{\mu_Y} = \frac{\mu_Y - \hat{\mu}_Y}{\hat{\mu}_Y}. \quad (2.14)$$

2.3.2 Chaos polynomial généralisé

Le formalisme du chaos polynomial généralisé (gPC acronyme en anglais de « *Generalized Polynomial Chaos* ») est basé sur la séparation entre la partie déterministe et la partie stochastique d'une grandeur aléatoire. Soit (Ω, β, Pr) un espace de probabilité où Ω est l'espace des événements aléatoires ω , β est le σ -algèbre des sous-ensembles de Ω et $Pr : \beta \rightarrow [0, 1]$ est la mesure de probabilité. Soit $\xi(\omega) = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ un vecteur de r variables aléatoires indépendantes. Pour des raisons de

commodité, $\xi(w)$ sera noté ξ .

D'après la théorie du gPC [158, 22, 1, 160], tout processus aléatoire de second ordre $Z(\xi)$, appelé aussi quantité d'intérêt (QI), dans un espace d'Hilbert $L^2(\Omega, \beta, Pr)$, peut être approximé par une série de fonctions polynomiales comme suit :

$$Z(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} \bar{z}_\alpha \phi_\alpha(\xi), \quad (2.15)$$

où :

- $\phi_\alpha(\xi)$ sont les polynômes du chaos basés sur une famille de polynômes orthogonaux correspondant à la distribution des r variables $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ comme indiqué dans le tableau 2.1.
- $\bar{z}_\alpha$ sont les coefficients du gPC qui correspondent au partie déterministe du processus aléatoire.

Les variables incertaines utilisées, dans cette thèse, sont exprimées selon la loi uniforme. Le choix de cette loi est justifié par le fait qu'elle est la mieux adaptée aux processus aléatoires dont ses lois de probabilités ne sont pas ou peu connues. Soit, alors, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r) \in \prod_{i=1}^r [a_i, b_i]$ le vecteur de r paramètres physiques incertains du système supposés être uniformément distribués dans un intervalle donné. Il est lié au vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in [-1, 1]^r$ comme suit :

$$\zeta_i = \frac{b_i + a_i}{2} + \xi_i \frac{b_i - a_i}{2}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.16)$$

où a_i et b_i sont les limites de l'intervalle uniforme correspondant au $i^{\text{ème}}$ paramètre .

Comme mentionnée dans la section 1.3.3.2, pour avoir une convergence en termes de rapidité et de précision dans une représentation par le gPC, la base orthogonale est choisie de telle sorte à ce que la fonction poids qui lui est associée soit identique à la fonction densité de probabilité des variables de l'espace probabilisé. Le Tableau 2.1 présente quelques exemples de correspondances définies globalement par le schéma d'Askey [1]. Dans le cadre de cette thèse, la famille de polynômes $\phi_\alpha(\xi)$ de type Legendre sera exploitée puisque les distributions des paramètres incertains sont considérés uniforme.

Variable aléatoire ξ	Famille de polynômes $\phi_\alpha(\xi)$	Support
Gaussienne	Hermite	$(-\infty, \infty)$
Gamma	Laguerre	$[0, \infty)$
Beta	Jacobi	$[-1, 1]$
Uniforme	Legendre	$[-1, 1]$

TABLEAU 2.1 – Correspondance entre les familles de polynômes orthogonaux et les distributions des variables aléatoires

En pratique, la fonction aléatoire $Z(\xi)$ est approchée par une expansion tronquée impliquant un nombre fini de termes comme suit :

$$Z(\xi) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p}} \bar{z}_\alpha \phi_\alpha(\xi), \quad (2.17)$$

où p est l'ordre du chaos polynomial et $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ un multi-indice en $\mathbb{N}^r$, de longueur :

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i. \quad (2.18)$$

L'ensemble d'indices utilisé dans l'expansion tronquée (2.17) est alors défini par :

$$\mathcal{A}^{r,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : \|\alpha\|_1 \leq p\}. \quad (2.19)$$

Par conséquent, pour obtenir les valeurs approximatives de la QI, les coefficients $\bar{z}_j$ de la sé-

rie tronquée (1.6) doivent être calculés. Le nombre de termes $N_p + 1$ est donné par l'expression suivante [160] :

$$N_p = \text{card}(\mathcal{A}^{r,p}) = \frac{(p+r)!}{p!r!}. \quad (2.20)$$

L'expansion tronquée (2.17) peut être réécrite comme suit :

$$Z(\xi) \approx \sum_{j=0}^{N_p-1} \bar{z}_j \phi_j(\xi), \quad (2.21)$$

Le polynôme ϕ_j est une base orthogonale dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \beta, Pr)$ avec la relation d'orthogonalité suivante :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \phi_i, \phi_i \rangle \delta_{ij} \quad (2.22)$$

où δ_{ij} désigne le delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (2.23a)$$

$$(2.23b)$$

et $\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int \phi_i \phi_i W(\xi) d\xi$ où $W(\xi)$ est la fonction de densité de probabilité de ξ .

2.3.2.1 Calcul pratique du développement en polynômes du gPC : approches non intrusives

Comme mentionné dans la section 1.3.3.2, il existe deux approches pour estimer les coefficients du développement en chaos d'une quantité d'intérêt $Z(\xi)$: une approche intrusive et une approche non intrusive. Non décrivons en détail dans cette section la méthode non-intrusive dite de regression qui est celle retenue dans cette thèse.

La quantité d'intérêt que l'on souhaite approximer avec un développement en chaos polynomial peut s'écrire sous la forme de l'équation (2.21). Les coefficients de gPC sont construits à partir d'un certain nombre de valeurs de la QI, obtenues à partir de simulations numériques du modèle mathématique du système mécanique considéré. La technique de régression nécessite un minimum de $Q = N_p$ simulations qui peuvent être effectuées à des points choisis par exemple par la méthode d'échantillonnage par Hypercubes Latins (LHS pour « *Latin Hypercube Sampling* ») [96]. Dans ce dernier cas, on utilise $Q = kN_p$ simulations, avec k un petit entier généralement égal à 2, 3 ou 4).

Dans l'approche par régression, les coefficients du gPC sont déterminés par la minimisation du critère défini par [12] :

$$\varepsilon_{reg}^2 = \sum_{q=1}^Q \left[Z(\xi^{(q)}) - \sum_{l=0}^{N_p-1} \bar{z}_l \phi_l(\xi^{(q)}) \right]^2, \quad (2.24)$$

où $\xi^{(q)} = (\xi_1^{(q)}, \dots, \xi_r^{(q)})$, avec $q = 1, \dots, Q$ désigne un Plan d'Expérience numérique (PEN). Dans le cadre de cette thèse, la méthode de Hypercubes Latins [155] est utilisée pour construire le PEN.

Les coefficients du gPC $\bar{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{N_p})^T$ sont calculés comme suit :

$$\bar{z} = \left(\phi^T(\xi^{(q)}) \phi(\xi^{(q)}) \right)^{-1} \phi^T(\xi^{(q)}) Z, \quad (2.25)$$

avec $Z = (Z(\xi^{(1)}), Z(\xi^{(2)}), \dots, Z(\xi^{(q)}))$ désigne le vecteur des évaluations de la QI par le modèle

mathématique. $\phi(\xi^{(q)})$ est une matrice définie par :

$$\phi(\xi^{(q)}) = \begin{pmatrix} \phi_0(\xi^{(1)}) & \dots & \phi_{N_p}(\xi^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(\xi^{(Q)}) & \dots & \phi_{N_p}(\xi^{(Q)}) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

2.3.2.2 Caractéristiques statistiques du gPC et critère de choix de l'ordre de troncation

Cette section est dédiée à la présentation des formules théoriques utilisées pour estimer la précision des résultats trouvés avec le gPC et également pour déterminer l'ordre optimal de troncation en termes de précision et de coût de calcul. Plus de détails sur cette section peuvent se trouver dans cet article [148] et la thèse de Trinh [147]. L'intérêt principal de l'expansion du gPC est de permettre d'estimer les caractéristiques statistiques de la QI aléatoire à partir des coefficients du chaos polynomial sans avoir besoin d'utiliser des tirages de paramètres incertains générés par la méthode de MC. Les valeurs de la moyenne μ et de la variance théoriques σ^2 de la QI $Z(\xi)$ sont directement estimées à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} \mu \approx \bar{z}_0 \\ \sigma^2 \approx \sum_{j=1}^{N_p-1} \bar{z}_j^2 E[\phi_j^2(\xi)] \end{cases} \quad (2.27)$$

Soit $\bar{z}_{j,p}$ et $\bar{z}_{j,p-1}$ les vecteurs des coefficients de gPC calculés respectivement pour deux développements d'ordre successifs p et $p-1$. Les évaluations correspondantes de la QI par les gPC sont données par :

$$\begin{cases} Z_p(\xi) \approx \sum_{j=0}^{N_p-1} \bar{z}_j \phi_j(\xi) \\ Z_{p-1}(\xi) \approx \sum_{j=0}^{N_{p-1}-1} \bar{z}_j \phi_j(\xi) \end{cases} \quad (2.28)$$

Les valeurs théoriques des moyennes $\hat{z}_p$ et $\hat{z}_{p-1}$ et des variances σ_p^2 et σ_{p-1}^2 évaluées par les gPC respectivement d'ordre p et $p-1$ sont données par :

$$\begin{cases} \hat{z}_p = \hat{z}_{p-1} = \bar{z}_0 \\ \sigma_p^2 = \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{N_p-1} \bar{z}_j^2 \langle \phi_j^2 \rangle \\ \sigma_{p-1}^2 = \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{N_{p-1}-1} \bar{z}_j^2 \langle \phi_j^2 \rangle \end{cases} \quad (2.29)$$

L'erreur sur la variance $e_{\sigma^2,p}$ entre deux ordres successifs de gPC est donnée par :

$$e_{\sigma^2,p} = \sigma_p^2 - \sigma_{p-1}^2 = \frac{1}{2^r} \sum_{j=N_{p-1}-1}^{N_p-1} \bar{z}_j^2 \langle \phi_j^2 \rangle. \quad (2.30)$$

L'erreur moyenne au sens des moindres carrés entre deux développements d'ordres successifs est donnée par :

$$\epsilon_p^2 \approx \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} (Z_p(\xi_k) - Z_{p-1}(\xi_k))^2 \approx \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} \left(\sum_{j=N_{p-1}}^{N_p-1} \bar{z}_j \phi_j(\xi_k) \right)^2 \quad (2.31)$$

où N' est le nombre d'échantillons. L'erreur moyenne au sens des moindres carrés entre la référence

et le gPC d'ordre p est donnée par :

$$E1 = \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} (Z_p(\xi_k) - Z^{\text{REF}}(\xi_k))^2 \quad (2.32)$$

où Z^{REF} est la quantité d'intérêt déterminée par la méthode de la référence.

À partir de la propriété d'orthogonalité du gPC (2.22), l'erreur moyenne (2.31) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\epsilon_p^2 \approx \sum_{j=N_{p-1}}^{N_p-1} \bar{z}_j^2 \langle \phi_j^2 \rangle = e_{\sigma^2, p}. \quad (2.33)$$

L'équation (2.33) montre un résultat très intéressant ; l'erreur sur la variance et l'erreur sur la moyenne au sens des moindres carrés sont approximativement égales entre deux développements d'ordre successifs.

Le critère, qui permet de choisir l'ordre de troncation, est alors basé sur le calcul du taux de décroissance de l'erreur relative de la variance entre deux développements d'ordre successifs et il est donné par [154] :

$$\delta = \frac{e_{\sigma^2, p}}{\sigma_p^2}. \quad (2.34)$$

Il est à noter que le critère (2.34) peut être estimé directement à partir des coefficients du gPC, il n'est pas nécessaire d'effectuer des simulations supplémentaires avec le modèle mathématique pour calculer cette erreur. Cette caractéristique représente un intérêt majeur de la méthode de gPC.

La qualité de la valeur d'une QI approximée par un développement en gPC peut être également évaluée par le calcul de la moyenne des erreurs relatives entre deux gPC d'ordres successifs :

$$E2 = \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} \frac{|Z_p(\xi_k) - Z_{p-1}(\xi_k)|}{Z_{p-1}(\xi_k)}. \quad (2.35)$$

Pour une QI, la moyenne des erreurs relatives entre la référence et un développement en gPC d'ordre p est donnée par :

$$E3 = \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} \frac{|Z_p(\xi_k) - Z^{\text{REF}}(\xi_k)|}{Z^{\text{REF}}(\xi_k)}. \quad (2.36)$$

2.3.3 Chaos polynomial généralisé multi-éléments

Le gPC peut être interprétée comme une approximation polynomiale de la QI en fonction de ξ . Pour réduire l'erreur d'approximation, des ordres polynomiaux élevés peuvent être nécessaires. Ainsi, lorsque la QI admet un comportement non linéaire et que le nombre de paramètres incertains est élevé, le nombre de simulations nécessaires pour calculer les coefficients de gPC peut être élevé. Ainsi, avec un nombre élevé de degrés de liberté du système, le coût du calcul peut être prohibitif. La solution consiste donc à diviser l'espace stochastique ξ en une collection de m d'éléments qui ne se recoupent pas et à utiliser une approximation polynomiale d'ordre inférieur sur chaque élément. C'est essentiellement ce sur quoi repose le schéma du ME-gPC [154].

Pour les r variables aléatoires uniformes $\xi(\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathcal{B}$, $B = [-1, 1]^r$, une décomposition D de B est considérée comme suit

$$D = \begin{cases} B_k = [a_1^k, b_1^k] \times [a_2^k, b_2^k] \times \dots \times [a_r^k, b_r^k], \\ B = \bigcup_{k=1}^m B_k, \\ B_{k1} \cap B_{k2} = \emptyset \text{ si } k1 \neq k2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Sur la base de la décomposition D, la variable indicatrice aléatoire I_k est définie pour chaque élément par :

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in \mathcal{B}_k \\ 0 & \text{si } \xi \notin \mathcal{B}_k \end{cases} \quad (2.38)$$

Ainsi, il peut être démontré à partir de (2.37) et (2.38) que :

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{k=1}^m I_k^{-1}(1) \\ I_{k_1}^{-1}(1) \cap I_{k_2}^{-1}(1) = \emptyset, \quad k_1 \neq k_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

Dans chaque élément B_k , un vecteur de variables aléatoires locales $\zeta_k : I_k^{-1}(1) \mapsto B_k$, peut être définie avec la fonction de probabilité conditionnelle f_{ζ^k} :

$$f_{\zeta^k} = \frac{1}{2^r \Pr(I_k = 1)}, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.40)$$

et

$$J_k = \Pr(I_k = 1) = \prod_{i=1}^r \frac{b_i^k - a_i^k}{2} \quad (2.41)$$

où $J_k = \Pr(I_k = 1)$ est la mesure de probabilité.

Les variables locales $\bar{\zeta}_i^k$, dans chaque élément $k \prod_{i=1}^r [a_i^k, b_i^k]$, sont exprimées en termes de variables aléatoires uniformes indépendantes $\bar{\xi}_j^k$ dans $[-1, 1]^r$ de telle sorte que les polynômes de Legendre peuvent être exploités

$$\bar{\zeta}_j^k = \frac{b_j^k + a_j^k}{2} + \frac{b_j^k - a_j^k}{2} \bar{\xi}_j^k, \quad j = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.42)$$

Le gPC peut être utilisé localement pour le k^{th} élément comme suit :

$$Z_k(\bar{\xi}^k) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p}} \bar{z}_\alpha^k \phi_\alpha(\bar{\xi}^k), \quad (2.43)$$

où $Z_k(\bar{\xi}^k)$ est le processus aléatoire correspondant à l'élément k . L'approximation du processus stochastique est finalement exprimée en utilisant les mesures de probabilité J_k [154] comme suit :

$$Z(\xi) \approx \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p}} \bar{z}_\alpha^k \phi_\alpha(\bar{\xi}^k) J_k \quad \text{avec } J_k = \prod_{i=1}^r \frac{b_i^k - a_i^k}{2} \quad (2.44)$$

La moyenne locale $\hat{z}_{p,k}$ et la variance $\sigma_{p,k}^2$ approximées dans l'élément k^{th} par le gPC avec l'ordre p sont :

$$\begin{cases} \hat{z}_{p,k} = \bar{z}_{k,0} \\ \sigma_{p,k}^2 = \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{N_p-1} \bar{z}_{k,j}^2 \langle \phi_j^2 \rangle. \end{cases} \quad (2.45)$$

La moyenne et la variance globales approximées par le gPC à l'ordre p peuvent être écrites respectivement :

$$\begin{cases} \hat{z}_{i,p} &= \sum_{k=1}^m \bar{z}_{i,k,0} J_k \\ \sigma_{i,p}^2 &= \sum_{k=1}^m [\sigma_{i,p,k}^2 + (\bar{z}_{i,k,0} - \hat{z}_{i,p})] J_k, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.46)$$

Plusieurs critères ont été proposés dans la littérature pour déterminer la convergence de l'algorithme ME-gPC et ils dépendent de l'objectif de l'utilisation du ME-gPC. Pour cette étude, les critères sont présentés dans la section [4.2.2.1](#).

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des éléments théoriques qui seront utilisés dans la suite de la thèse pour étudier le comportement dynamique d'un système mécanique frottant sans et avec NES ainsi que des méthodes de quantifications des incertitudes. Dans un premier temps, des méthodes d'analyse de la stabilité et de détermination des cycles limites d'un système dynamique non linéaire ont été présentés. À travers cette investigation, les choix suivants ont été faits. L'étude de la stabilité sera effectuée par la méthode indirecte de Lyapunov. Les cycles limites seront déterminées par la méthode d'intégration temporelle. Dans un second temps, la méthode de Monte Carlo ainsi que la théorie de chaos polynomial généralisé et multi-élément ont été exposées. La théorie du chaos polynomial basée sur son approche non intrusive sera utilisée pour prendre en compte les paramètres incertains du système.

Chapitre 3

Propension à être dans un régime atténué

Sommaire

3.1	Introduction	40
3.2	Description du modèle de frein couplé à deux NES	40
3.3	Analyse de stabilité par la méthode indirecte de Lyapunov	41
3.3.1	Analyse de stabilité du modèle de Hultèn sans NES	43
3.3.2	Analyse de stabilité du modèle de Hultèn avec NES	44
3.4	Étude des cycles limites	44
3.4.1	Étude des cycles limites du système sans NES	46
3.4.2	Étude des cycles limites du système avec NES	46
3.5	Propension à être dans un régime atténué	48
3.6	Conclusion	49

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, un modèle phénoménologique permettant de reproduire le comportement typique d'un système de freinage à tambour est couplé à deux absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES. La dispersion de certains paramètres physiques en raison de leur nature incertaine peut générer une instabilité dynamique conduisant à des cycles limites d'oscillations (nous utiliserons aussi parfois l'acronyme LCO pour « *Limit Cycle Oscillations* »). Le concept de pompage énergétique, c.-à-d. le transfert quasi-irréversible de l'énergie vibratoire du système primaire vers les NES, est proposé pour atténuer ces cycles limites. Dans ce type de problème on observe en général, lorsque l'on suit le comportement du système en régime permanent en fonction d'un paramètre, une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire de l'ensemble du système (c.-à-d. le système primaire couplé aux NES). Cette discontinuité correspond au passage brutal d'un régime où les cycles limites sont atténués à un régime où les cycles limites ne sont pas atténués. Elle nous permet également de définir un critère sur l'efficacité des NES à atténuer les LCO. Ce critère, qui est la **propension du système à être dans un régime atténué** (PHSSR pour « *the Propensity of the system to undergo an Harmless Steady-State Regime* »), est la probabilité d'obtenir un régime atténué étant donné les lois de probabilité régissant la dispersion des paramètres du système primaire et des NES. Cela suppose de connaître, dans l'espace des paramètres incertains, la frontière séparant le domaine des régimes atténués de celui des régimes non atténués. La localisation de cette frontière par des méthodes basées sur le chaos polynomial sera l'objet du chapitre 4. Dans ce chapitre nous commencerons par établir les équations du mouvement des systèmes frottants sans et avec NES (cf. section. 3.2) dont l'analyse de stabilité puis des cycles limites seront effectuées aux sections 3.3 et 3.4 respectivement. Le PHSSR sera défini rigoureusement en section 3.5.

Ce chapitre, ainsi qu'une partie du chapitre 4 sont la reproduction en français de [142]. C'est la raison pour laquelle certaines notations anglophones ont été conservées.

3.2 Description du modèle de frein couplé à deux NES

Le modèle de système frottant utilisé est le modèle dit de Hultén [64, 63] à deux degrés de liberté. Ce modèle très simple à deux degrés de liberté est capable de reproduire le comportement typique d'un système frottant, en particulier le phénomène de couplage des modes.

Le modèle de Hultén est composé d'une masse m maintenue contre une paroi mobile. Le contact entre la masse et la paroi est modélisé par deux plaques supportées par deux ressorts différents comprenant chacun une composante linéaire (k_1 et k_2) et une composante cubique (k_1^{NL} et k_2^{NL}) (voir la figure 3.1). L'amortissement est intégré comme indiqué dans la figure 3.1, les coefficients d'amortissement sont notés c_1 et c_2 . On suppose qu'il y a toujours un contact glissant entre la masse et la bande. La paroi se déplace à une vitesse constante et la direction de la force de frottement ne change pas car la vitesse relative entre la paroi et la masse est supposée positive. Le contact est modélisé par la loi de Coulomb qui stipule que la force de frottement tangentielle F_T est proportionnelle à la force normale F_N , c'est-à-dire $F_T = \mu F_N$, où μ est le coefficient de frottement supposé constant. Les équations du mouvement sont obtenues par application du Principe Fondamental de la Dynamique, elles ont la forme suivante :

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 - \mu k_2 x_2 + k_1^{NL} x_1^3 - \mu k_2^{NL} x_2^3 = 0 \quad (3.1a)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 \frac{dx_2}{dt} + k_2 x_2 + \mu k_1 x_1 + \mu k_1^{NL} x_1^3 + k_2^{NL} x_2^3 = 0. \quad (3.1b)$$

Deux NES fortement cubiques et identiques de masses m_h , de coefficients d'amortissement c_h , de raideur linéaire k_h et de raideur cubique k_h^{NL} sont couplé au modèle de Hultén comme indiqué sur la figure 3.2. Fortement cubique signifie que l'on suppose que $k_h \ll k_h^{NL}$.

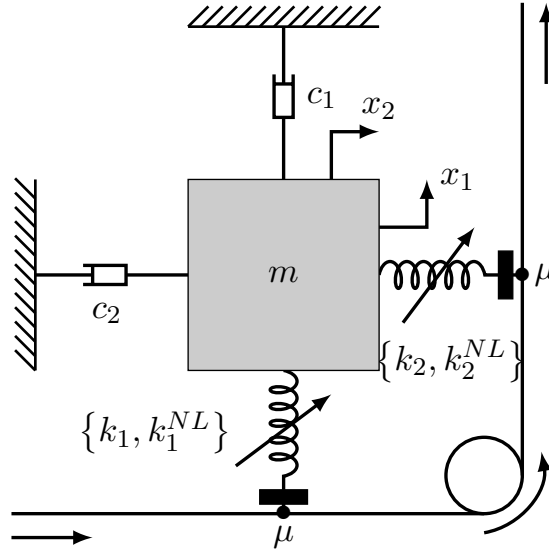


FIGURE 3.1 – Modèle de Hultén sans NES.

En prenant en compte les déplacements des NES, notés h_1 et h_2 , les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \eta_1 \omega_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 - \mu \omega_2^2 x_2 + \varphi_1 x_1^3 - \mu \varphi_2 x_2^3 + \\ \eta_h \omega_1 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dh_1}{dt} \right) + \xi_h (x_1 - h_1) + \varphi_h (x_1 - h_1)^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\epsilon \frac{d^2 h_1}{dt^2} + \eta_h \omega_1 \left(\frac{dh_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + \xi_h (h_1 - x_1) + \varphi_h (h_1 - x_1)^3 = 0 \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \eta_2 \omega_2 \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 + \mu \omega_1^2 x_1 + \mu \varphi_1 x_1^3 + \varphi_2 x_2^3 + \\ \eta_h \omega_1 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dh_2}{dt} \right) + \xi_h (x_2 - h_2) + \varphi_h (x_2 - h_2)^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.2c)$$

$$\epsilon \frac{d^2 h_2}{dt^2} + \eta_h \omega_1 \left(\frac{dh_2}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + \xi_h (h_2 - x_2) + \varphi_h (h_2 - x_2)^3 = 0, \quad (3.2d)$$

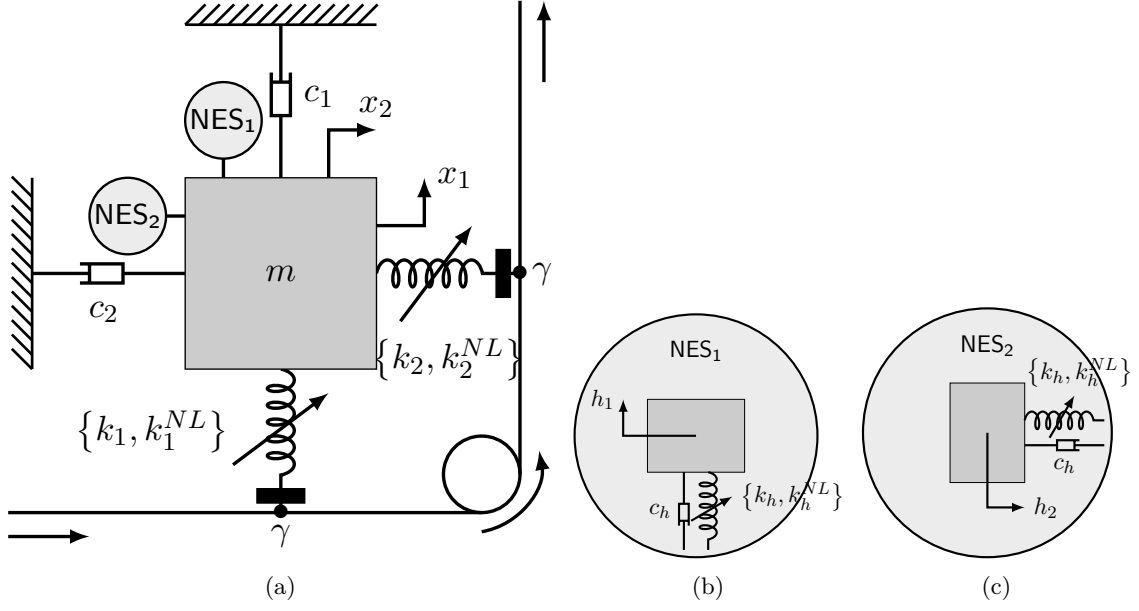
où les notations suivantes ont été introduites :

- le coefficient d'amortissement système primaire $\eta_i = c_i / \sqrt{m k_i}$ (avec $i = 1, 2$),
- les pulsations propres $\omega_i = \sqrt{k_i / m}$ (avec $i = 1, 2$),
- $\varphi_i = k_i^{NL} / m$ (avec $i = 1, 2$),
- $\epsilon = m_h / m$,
- $\xi_h = k_h / m$,
- $\eta_h = c_h / \sqrt{m k_1}$
- $\varphi_h = k_h^{NL} / m$.

En supposant que la masse du NES est faible par rapport à la masse m du système primaire, on a $0 < \epsilon \ll 1$. Dans les travaux théoriques et expérimentaux consacrés aux NES, le rapport de masse ϵ est en général choisi dans l'intervalle de $[0.001 \text{ } 0.1]$. Dans cette thèse nous choisissons $\epsilon = 0.05$.

3.3 Analyse de stabilité par la méthode indirecte de Lyapunov

Les systèmes frottants peuvent être soumis à des oscillations auto-entretenues (autre nom des cycles limites d'oscillations) induites par le frottement. Le couplage de mode (cf. section 1.2.3) est


 FIGURE 3.2 – (a) Modèle de Hultén sans NES. (b) Zoom sur le NES₁ et (c) Zoom sur le NES₂.

le mécanisme adopté dans le cadre de cette thèse pour justifier l'apparition de ces LCO. En effet, le couplage de modes attribue la naissance des oscillations à une instabilité dynamique causée par une bifurcation de Hopf. Pour rappel, une bifurcation de Hopf est une bifurcation locale dans laquelle un point d'équilibre du système perd sa stabilité donnant naissance à une solution oscillante (c.-à-d. qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour du point d'équilibre franchit l'axe imaginaire du plan complexe). Le cycle limite est ensuite obtenu par saturation des oscillations due aux non-linéarités.

L'analyse de stabilité permet de localiser la bifurcation de Hopf dans l'espace des paramètres et ainsi délimiter deux zones principales : une zone stabilité et une zone d'instabilité. La méthode indirecte de Lyapunov est ici utilisée pour analyser la stabilité des systèmes (3.1) et (3.2) que l'on écrit de façon générale sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

avec

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2]^T, \quad (3.4)$$

pour le système mécanique sans NES (3.1), et

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ h_1 \ h_2]^T, \quad (3.5)$$

pour le système mécanique avec NES (3.2). Les matrices de masse $\mathbf{M}$, d'amortissement $\mathbf{C}$ et de raideur $\mathbf{K}$ ainsi que la fonction vectorielle $\mathbf{f}_{\text{NL}}$ sont déduites de (3.1) (qui est au préalable divisée par m) et de (3.2), leurs expressions sont :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \eta_1 \omega_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \omega_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & -\mu \omega_2^2 \\ \mu \omega_1^2 & \omega_2^2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \varphi_1 x_1^3 - \mu \varphi_2 x_2^3 \\ \mu \varphi_1 x_1^3 + \varphi_2 x_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

pour (3.1), et

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \eta_1\omega_1 + \eta_h\omega_1 & 0 & -\eta_h\omega_1 & 0 \\ 0 & \eta_2\omega_2 + \eta_h\omega_1 & 0 & -\eta_h\omega_1 \\ -\eta_h\omega_1 & 0 & \eta_h\omega_1 & 0 \\ 0 & -\eta_h\omega_1 & 0 & \eta_h\omega_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \xi_h & -\mu\omega_2^2 & -\xi_h & 0 \\ \mu\omega_1^2 & \omega_2^2 + \xi_h & 0 & -\xi_h \\ -\xi_h & 0 & \xi_h & 0 \\ 0 & -\xi_h & 0 & \xi_h \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \varphi_1 x_1^3 - \mu\varphi_2 x_2^3 + \varphi_h(x_1 - h_1)^3 \\ \mu\varphi_1 x_1^3 + \varphi_2 x_2^3 + \varphi_h(x_2 - h_2)^3 \\ \varphi_h(h_1 - x_1)^3 \\ \varphi_h(h_2 - x_2)^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

pour (3.2).

La stabilité de la solution d'équilibre trivial $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$ est déterminée en calculant les valeurs propres λ obtenues en résolvant l'équation caractéristique suivante

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0. \quad (3.8)$$

Parce que le système (3.1) (resp. (3.2)) est un système de second ordre à 2 ddl (resp. $N = 4$ ddl) ; il possède 4 (resp. $N = 8$) valeurs propres.

La méthode indirecte de Lyapunov relie la stabilité de $\mathbf{X}_0$ aux signes des parties réelles des valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, N$) :

- $\mathbf{X}_0$ est asymptotiquement stable si $\forall i \in (1, \dots, N), \text{Re}(\lambda_i) < 0$;
- $\mathbf{X}_0$ est instable si $\exists i \in (1, \dots, N) / \text{Re}(\lambda_i) > 0$.

3.3.1 Analyse de stabilité du modèle de Hultèn sans NES

La figure 3.3 montre l'évolution des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres de (3.1) en fonction du coefficient de frottement μ . Les paramètres suivants ont été utilisés :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi 100 \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}, \\ \omega_2 &= 2\pi 85 \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}, \\ \eta_1 &= 0.02, \\ \eta_2 &= 0.06, \\ \varphi_1 &= 10^5 \text{ (N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}\text{)}, \\ \varphi_2 &= 0 \text{ (N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}\text{)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

En analysant la figure 3.3 on trouve que le système (3.1) possède deux paires de valeurs propres complexes conjugués, chaque paire étant associée à un mode. Les deux modes sont stables lorsque $\mu < \mu_b$ où μ_b représente le point de bifurcation de Hopf et est égal à 0.1514 avec le jeu de paramètres (3.9). En $\mu = \mu_b$, au niveau de la bifurcation, l'une des paires de valeurs propres est imaginaire pure tandis que l'autre paire reste à parties réelles négatives. Quand $\mu > \mu_b$, après le point de bifurcation de Hopf, le phénomène de couplage de modes apparaît : les parties imaginaires se rapprochent tandis que les parties réelles s'écartent, l'une devenant positive en rendant le système instable. À noter qu'ici la coalescence non parfaite est due au caractère non iso-amorti, une coalescence parfaite étant toujours observée pour le système amorti de façon équi-répartie sur les deux modes qui coalescent.

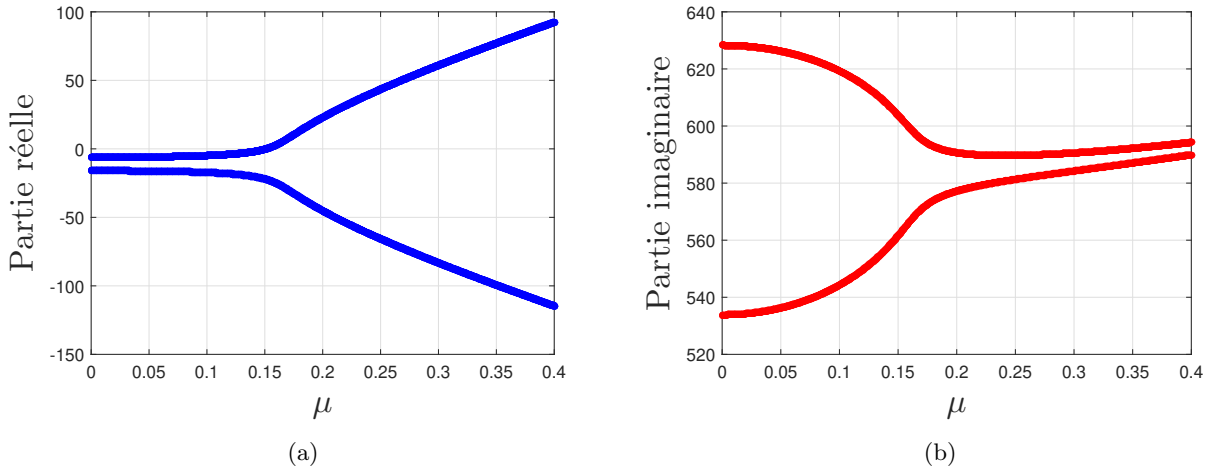


FIGURE 3.3 – Évolution des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres du système mécanique sans NES (3.1) en fonction du coefficient de frottement. (a) Parties réelles des deux modes et (b) parties imaginaires d'un des deux modes (celles du second mode étant les opposées du premier). Le jeu de paramètres (3.9) est utilisé.

3.3.2 Analyse de stabilité du modèle de Hultèn avec NES

La figure 3.4 montre l'évolution des parties réelles et imaginaires des huit valeurs propres de (3.2) en fonction du coefficient de frottement μ . Les paramètres suivants ont été utilisés :

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 2\pi 100 \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}, \\
 \omega_2 &= 2\pi 85 \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}, \\
 \eta_1 &= 0.02, \\
 \eta_2 &= 0.06, \\
 \varphi_1 &= 10^5 \text{ (N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}\text{)}, \\
 \varphi_2 &= 0 \text{ (N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}\text{)}, \\
 \epsilon &= 0.05, \\
 \xi_h &= 0.001 \text{ (N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\text{)}, \\
 \eta_h &= 0.02, \\
 \varphi_h &= 1.4 \cdot 10^5 \text{ (N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}\text{)}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

La figure 3.5 se focalise sur les deux modes correspondant au système primaire seul et compare l'évolutions des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système avec NES (3.2) (en rouge) à celles du système sans NES (3.1) (en bleu). On peut observer que l'ajout des NES déplace le point de bifurcation vers une valeur plus grande de μ . Avec les paramètres (3.10), le point de bifurcation devient $\mu_b = 0.1658$. Il a pour conséquence de stabiliser le système sur un domaine, en général relativement étroit, du paramètre de bifurcation (ici entre $\mu = \mu_b(\text{sans NES}) = 0.1514$ et $\mu = \mu_b(\text{avec NES}) = 0.1658$). C'est le régime de « suppression complète » de l'instabilité évoqué en section 1.4.3.

3.4 Étude des cycles limites

L'analyse de la stabilité du système sans NES (3.1), effectuée en section 3.3.1, a permis de délimiter deux zones principales, une de stabilité et une autre d'instabilité. L'analyse de la stabilité

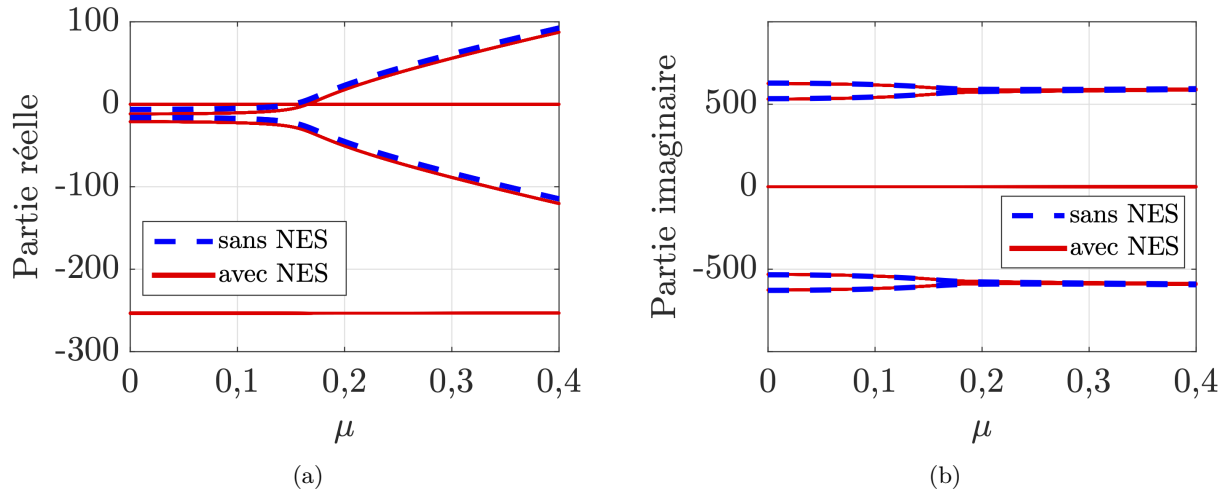


FIGURE 3.4 – Évolution, en fonction du coefficient de frottement μ , des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres du système mécanique sans NES (3.1) (en pointillé bleu) et des huit valeurs propres du système mécanique avec NES (3.2) (en rouge). (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires. Le jeu de paramètres (3.10) est utilisé.

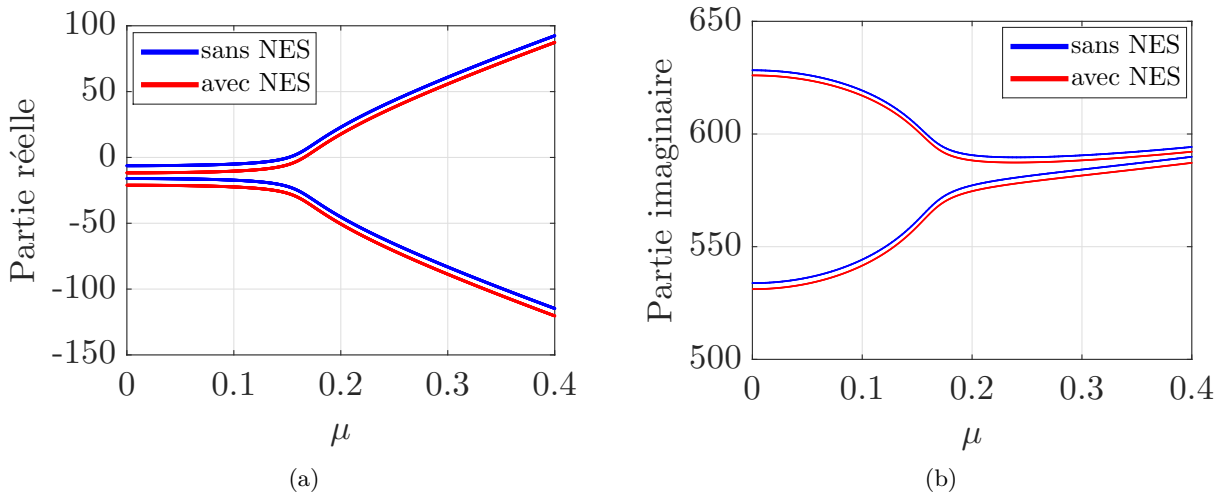


FIGURE 3.5 – Évolution, en fonction du coefficient de frottement μ , des parties réelles et imaginaires des quatre valeurs propres du système mécanique sans NES (3.1) (en bleu) et avec NES (en rouge). Seul les deux modes correspondant au système primaire seul sont représentés. (a) Parties réelles des deux modes et (b) parties imaginaires d'un des deux modes (celles du second mode étant les opposées du premier). Le jeu de paramètres (3.10) est utilisé.

du système avec NES (3.2), effectuée en section 3.3.2, a montré que l'ajout du NES permettait d'agrandir légèrement la zone de stabilité.

Cependant cet effet linéaire du NES est limité et n'est pas le plus intéressant. Comme évoqué en section 1.4.3, le NES agit principalement par effets non linéaires. En effet, le système peut être instable mais atténué, c.-à-d qu'il présente un cycle limite (périodique ou quasi-périodique) mais d'amplitude plus faible que celui que subit le système sans NES pour le même jeu de paramètres. Ce comportement typique des systèmes instables couplés à des NES est illustré dans cette section par l'étude des cycles limites des systèmes sans et avec NES.

3.4.1 Étude des cycles limites du système sans NES

Tout d'abord, dans cette section, le cycle limite du système sans NES, que l'on souhaite atténué à l'aide de NES, est représenté en intégrant numériquement (3.1) à l'aide du solveur ODE45 de Matlab. Le jeu de paramètre (3.9) est utilisé avec $\mu = 0.3$.

Le résultat de la simulation est représenté en figure 3.6. La figure 3.6(a) montre l'évolution de déplacement x_1 en fonction du temps et la figure 3.6(b) montre le portrait de phase du système dans le plan $(x_1, \frac{dx_1}{dt})$ permettant d'observer le cycle limite. On constate sur la figure 3.6(a) que le cycle limite est atteint à $t \approx 0.4$ sec. Dans cette section, les simulations temporelles sont effectuées uniquement sur les quatre premières secondes.

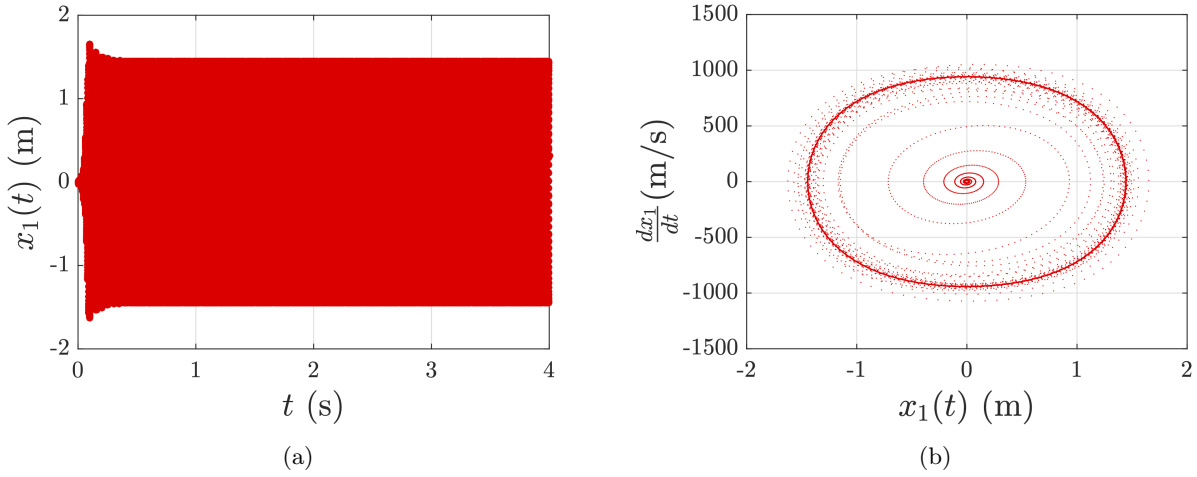


FIGURE 3.6 – Intégration temporelle numérique de (3.1) . (a) déplacement x_1 en fonction du temps et (b) portrait de phase dans le plan $(x_1, \frac{dx_1}{dt})$. Le jeu de paramètre (3.9) est utilisé avec $\mu = 0.3$.

3.4.2 Étude des cycles limites du système avec NES

Dans cette section, le rôle du NES pour atténuer les amplitudes des cycles limites est présenté. Dans [11], l'étude numérique et théorique de (3.2) a montré que, comme c'est le cas en général lorsqu'un NES est couplé à un système dynamique instable (cf. section 1.4.3), quatre types principaux de régimes permanents sont observés : (i) la **suppression complète** de l'instabilité (le NES a stabilisé le système, cf. section 3.3.2 du présent document), (ii) l'**atténuation par réponse périodique** (c'est également un cycle limite mais d'amplitude moins importante que celle du système sans NES), (iii) l'**atténuation par réponse fortement modulée** (où SMR pour « *Strongly Modulated Response* », il s'agit d'une réponse fortement modulée en amplitude et en phase mais dont l'amplitude reste moins importante que celle du cycle limite du système primaire seul) et enfin (iv) **pas d'atténuation** de l'instabilité.

Une illustration de ces différents régimes est présentée en figure 3.7 qui montre l'évolution temporelle des déplacements x_1 avec et sans NES ainsi que le cycle limite dans l'espace des phases. Comme dans [7] les quatre régimes sont classés en deux catégories : (1) les **régimes atténués** constitués par les trois premiers régimes décrits ci-dessus (représentés aux figures 3.7(a)-3.7(b), 3.7(c)-3.7(d) et 3.7(e)-3.7(f) respectivement) et (2) le **régime non atténué** qui correspond au quatrième régime (voir. figures 3.7(g)-3.7(h)).

Dans les études qui suivent la QI considérée est l'amplitude de la variable x_1 du système avec

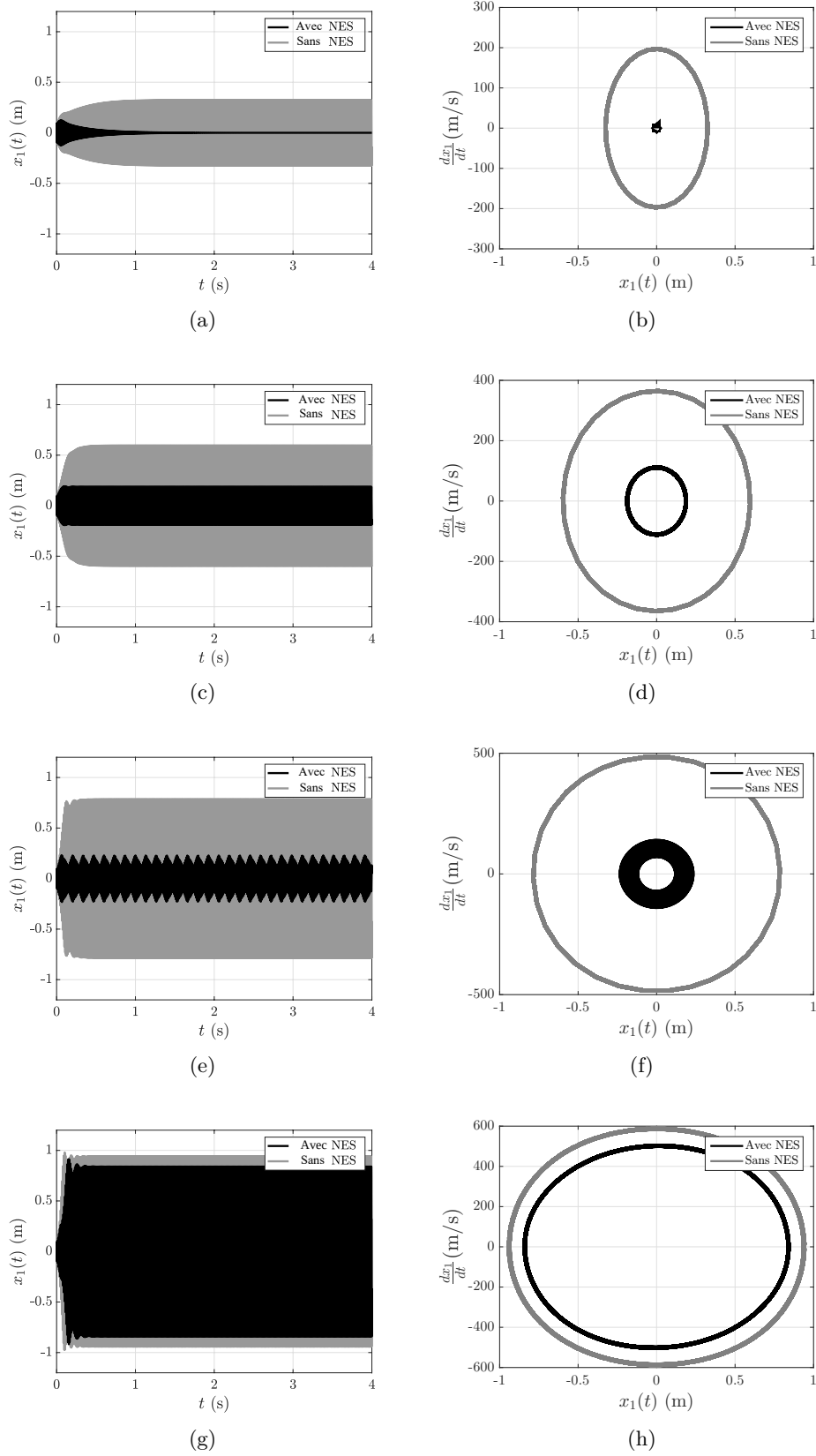


FIGURE 3.7 – Comparaison entre $x_1(t)$ résultant de l'intégration numérique des systèmes frottants avec et sans NES (3.1) et (3.2). (a et b) Suppression complète, $\mu = 0, 16$; (c et d) atténuation par réponse périodique, $\mu = 0, 18$; (e et f) atténuation par réponse fortement modulée (SMR), $\mu = 0, 2$; (g et h) pas d'atténuation, $\mu = 0, 22$. Le jeu des paramètres (3.10) est utilisé.

NES (3.2) en régime permanent. Cette amplitude, notée A_1^{wNES} , est définie de la façon suivante :

$$A_1^{wNES} = \frac{\max [x_1^{SSR}(t)] - \min [x_1^{SSR}(t)]}{2}, \quad (3.11)$$

où $x_1^{SSR}(t)$ (SSR pour « *Steady-State Regime* ») est la partie de la série temporelle de la variables x_1 , obtenue à partir de l'intégration numérique du système couplé (3.2), correspondant au régime permanent. À des fins de comparaisons, l'amplitude A_1^{woNES} correspondant au système sans NES (3.2) est également définie.

En pratique, l'intégration temporelle de (3.2) (resp. (3.1)) se fait entre $t_b = 0$ et $t_e = 4$ secondes et l'amplitude A_1^{wNES} (resp. A_1^{woNES}) est calculée dans l'intervalle $[0.9t_e ; t_e]$ dans lequel nous supposons que le système a atteint son régime permanent.

Les amplitudes A_1^{wNES} et A_1^{woNES} des systèmes avec et sans NES respectivement sont tracées en fonction du coefficient de frottement μ en figure 3.8 (le jeu de paramètres (3.10) est encore une fois utilisé). μ_b^{wo} et μ_b^w représentent les valeurs des points de bifurcation de Hopf des système sans et avec NES respectivement. La figure montre clairement les quatre régimes permanents décrits dans la section précédente et met en évidence un saut (ou une discontinuité) dans le profil d'amplitude A_1^{wNES} . Cette discontinuité correspond, lorsque μ augmente, à la transition d'un régime atténué (un SMR) à un régime régime non atténué. La valeur de μ pour laquelle le saut se produit est appelée **limite d'atténuation** (« *mitigation limit* » en anglais) et notée μ_{ml} . Cette limite d'atténuation sépare l'espace des paramètres incertains (ici un espace unidirectionnel selon le paramètre μ) en deux régions, l'une où l'instabilité est atténuée et l'autre où elle ne l'est pas.

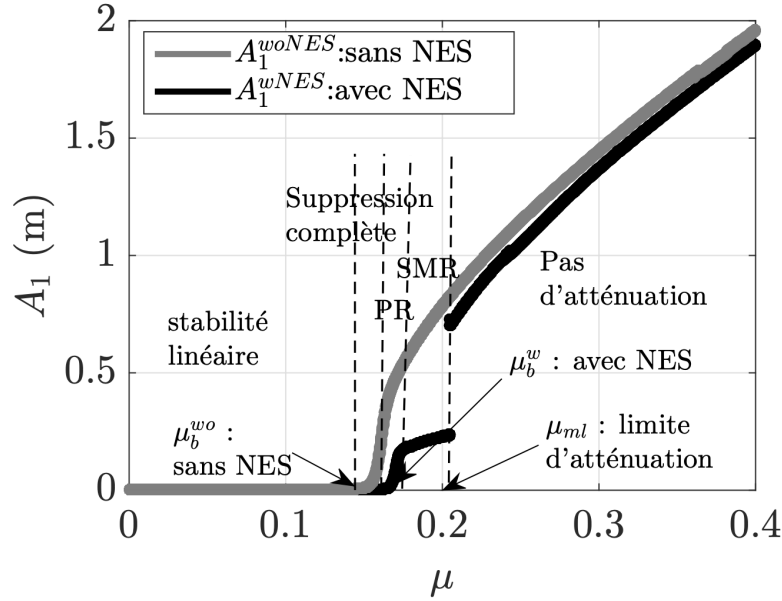


FIGURE 3.8 – Amplitudes A_1^{wNES} et A_1^{woNES} en fonction du coefficient de frottement μ . L'ensemble des paramètres Eq. (3.10) est utilisé.

3.5 Propension à être dans un régime atténué

Le chapitre suivant est consacrée à la détermination de la **propension à être dans un régime atténué** (ou PHSSR pour « *the Propensity of the system to undergo an Harmless Steady-State Regime* ») en considérant que deux paramètres du système frottant primaire peuvent être incertains : μ le coefficient de frottement et η_1 le coefficient d'amortissement dans la direction x_1 .

Dans cette section nous donnons donc la définition mathématique de la PHSSR qui est, comme énoncé dans l'introduction de ce chapitre, la probabilité d'obtenir un régime atténué étant donné les lois de probabilité régissant la dispersion des paramètres du système primaire (et éventuellement des NES). Pour déterminer cette probabilité, la discontinuité dans le profil A_1^{wNES} est localisée dans l'espace des paramètres incertains V (un espace unidimensionnel si seul μ est incertain ou le plan (μ, η_1) si les deux paramètres sont incertains). La partie de V dans laquelle les régimes permanents sont des régimes atténués et notées V_H . Il est à noter que V_H inclue la partie de V dans laquelle le système est stable même en l'absence de NES. De façon générale, la **limite d'atténuation** évoquée dans la section précédente correspond à la frontière entre V_H et le reste de V .

De façon générale, si $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r)$ est le vecteur des r paramètres physiques incertains considérés et $f(\zeta)$ la fonction de densité de probabilité associée. On définit alors par le PHSSR de la façon suivante :

$$\text{PHSSR} = \int_{V_H} f(\zeta) d\zeta, \quad (3.12)$$

qui devient pour les paramètres uniformément répartis dans l'espace $\prod_{i=1}^r [a_i, b_i]$:

$$\text{PHSSR} = \int_{V_H} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (b_i - a_i)} d\zeta. \quad (3.13)$$

Dans cette thèse les lois de probabilité des paramètres incertains μ et η_1 seront toujours uniformes.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini mathématiquement la **propension à être dans un régime atténué** (PHSSR), un critère permettant d'évaluer l'efficacité de NES à atténuer une instabilité dynamique. Pour cela nous avons tout d'abord présenté puis fourni une analyse préliminaire du modèle de frein couplé à deux NES. Ce modèle a le comportement typique d'un système instable couplé à un ou plusieurs NES. Une discontinuité est effet observée lorsque l'on trace l'amplitude des cycles limites en fonction des paramètres de bifurcation. Cette discontinuité sépare l'espace des paramètres incertains en une zone où les cycles limites sont atténués et une zone où ils ne le sont pas. La propension à être dans un régime atténué est définie comme la probabilité d'obtenir un régime atténué étant donné les lois de probabilité régissant la dispersion des paramètres du système primaire (ici μ et η_1 sont régis par des lois uniformes).

Dans le chapitre suivant, des méthodes basées sur le chaos polynomial sont développées pour prédire cette propension.

Chapitre 4

Prédiction de la propension à être dans un régime atténué par des méthodes basées sur le chaos polynomial

Sommaire

4.1	Introduction	52
4.2	Méthodes de prédiction de la propension à être dans un régime atténué	52
4.2.1	Méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé	52
4.2.2	Méthode basée sur le chaos polynomial multi-éléments (Méthode ME-gPC)	55
4.3	Application et résultats	57
4.3.1	Référence	57
4.3.2	Méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé	61
4.3.3	Utilisation du chaos polynomial Généralisé-Multi-élément	66
4.4	Conclusion	73

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la prédiction de la discontinuité observée dans le profil de l'amplitude des cycles limites du système mécanique avec NES (3.2) présenté au chapitre précédent. Cette discontinuité représente la frontière, dans l'espace des paramètres incertains, séparant les régimes atténués des régimes non atténués et est appelée *limite d'atténuation*. Trois méthodes basées sur la théorie du chaos polynomial sont développées pour localiser cette discontinuité : deux méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé (méthodes gPC1 et gPC2 présentées en section 4.2.1) et une méthode basée sur le chaos polynomial multi-éléments (méthode ME-gPC présentées en section 4.2.2). Ces différentes méthodes sont appliquées au système mécanique avec NES (3.2) dans la section 4.3. L'objectif de ces méthodes est la réduction du coût de calcul par rapport à la méthode de référence qui consiste, comme nous le verrons, à discrétiser finement de façon déterministe l'espace des paramètres incertains. La localisation de la discontinuité permet ensuite de prédire la *propension à être dans un régime atténué* (PHSSR). Une comparaison est d'abord effectuée avec la référence puis entre les méthodes elles-mêmes afin de choisir la plus performante, en termes de coût de calcul et des précisions, pour réaliser l'optimisation sous incertitudes des NES dans la partie II de ce manuscrit.

4.2 Méthodes de prédiction de la propension à être dans un régime atténué

Cette section est dédiée à la présentation des trois méthodes utilisées pour localiser la limite d'atténuation du système mécanique avec NES (3.2). Ces méthodes sont basées sur la théorie du chaos polynomial dont le principe a été rappelé au chapitre 2. Si l'on considère que l'amplitude A_1^{wNES} (cf. équation (3.11)) est la quantité d'intérêt (QI), l'objectif est donc de modéliser une fonction discontinue pas un polynôme ce qui de fait peut poser des difficultés. Chacune des trois méthodes présentée dans la suite propose une solution différente pour répondre à cette problématique. Les deux premières, appelées *méthodes gPC1 et gPC2*, utilisent le chaos polynomial généralisé (cf. section 2.3.2). La méthode gPC1 propose de ne pas considérer l'amplitude comme QI mais la limite d'atténuation qui n'est pas une quantité discontinue. La méthode gPC2 considère cette fois directement l'amplitude des cycles limites comme QI et localise la limite d'atténuation (c-à-d. la discontinuité) au niveau du maximum de la dérivée, par rapport aux paramètres incertains, de l'amplitude des cycles limites. Finalement, la troisième méthode, appelé *méthode ME-gPC*, utilise la théorie du chaos polynomial généralisé multi-éléments (cf. section 2.3.3) et considère également l'amplitude des cycles limites comme quantité d'intérêt. Le principe général de la méthode repose sur l'idée que la discontinuité donc la limite d'atténuation se trouve dans les éléments où la variance de la QI est la plus élevée.

Deux paramètres sont supposés être incertains : le coefficient de frottement μ et le coefficient d'amortissement η_1 du système mécanique sans NES.

4.2.1 Méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé

4.2.1.1 La quantité d'intérêt est la limite d'atténuation (Méthode gPC1)

Dans cette première méthode, la limite d'atténuation va être considérée comme QI et ainsi modéliser par un développement en chaos polynomial. Seul le frottement μ va être considéré comme paramètre incertain. La limite d'atténuation est déterminée à partir du paramètre η_1 supposé ici déterministe. Pour cela N_{η_1} valeurs de η_1 réparties de façon homogène dans l'intervalle $[\eta_{1min}, \eta_{1max}]$ sont d'abord générées. Ensuite un vecteur $\hat{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_Q)$ est construit à partir d'un Plan d'Expérience Numérique (PEN) de Q tirages du coefficient de frottement μ obtenu par la méthode LHS (cf. section (2.3.2.1)). Le nombre de simulations du modèle mathématique (3.2) nécessaire pour construire une représentation par le gPC de la QI (c-à-d. le coût de calcul de la méthode) est donc $N_{\eta_1} \times Q$.

Dans un premier temps, pour chacune des Q valeurs le point de bifurcation de Hopf du système couplé (3.2) par rapport à η_1 est déterminé à partir d'une étude aux valeurs propres ((3.8)), elle est notée η_{1b}^{wNES} . Dans un second temps, pour chacune des Q valeurs de coefficients de frottements, la limite d'atténuation notée η_{1ml} est déterminée à partir d'une approche itérative. La figure 4.2 montre deux exemples de la variation des amplitudes des LCO du système mécanique avec NES (A_1^{wNES}) et sans NES (A_1^{woNES}) en fonction du coefficient d'amortissements η_1 pour $\mu = 0.3$ (figure 4.2(a)) et $\mu = 0.4$ (figure 4.2(b)) avec $N_{\eta_1} = 250$. Ce choix de N_{η_1} est effectué pour avoir des bonnes précisions de valeurs de la limite d'atténuation. Pour les faibles valeur de η_1 on peut voir que le système est d'abord instable (voir figure 4.2), η_{1b}^{wNES} correspondant à la première valeur de η_1 pour laquelle le système est stable car les parties réelles des valeurs propres deviennent toutes négatives.

Dans l'approche itérative, chaque valeur $\eta_{1,i}$ est testée avec i incrémentant de 1 à N_{η_1} . On vérifie d'abord si $\eta_{1,i} = \eta_{1b}^{wNES}$, si c'est le cas l'algorithme est stoppé car il n'y a pas eu de discontinuité dans la zone d'instabilité du système avec NES. Pour $\eta_{1,i} \geq \eta_{1b}^{wNES}$, le système mécanique avec NES est stable. Donc, l'amplitude A_1^{wNES} est nulle dans la zone de stabilité c'est à dire pour $\eta_1 \in [\eta_{1b}^{wNES}, \eta_{1max}]$. Si $\eta_{1,i} < \eta_{1b}^{wNES}$ alors l'amplitude $A_1^{wNES}(\mu, \eta_{1,i})$ à l'itération i est comparée à l'amplitude $A_1^{wNES}(\mu, \eta_{1,i-1})$ à l'itération $i - 1$. Si cette différence est supérieure, en valeur absolue, à un seuil α , c.-à-d. :

$$|A_1^{wNES}(\mu, \eta_{1,i-1}) - A_1^{wNES}(\mu, \eta_{1,i})| > \alpha \quad (4.1)$$

alors la limite d'atténuation pour la q -ième valeur de μ vaut $\eta_{1ml,q} = \eta_{1,i}$. En général nous choisissons $\alpha = 0.4$. A la fin de cette méthode itérative effectué pour les Q valeurs de μ , Q valeurs de la limite d'atténuation sont obtenues ($\eta_{1ml,q}$ avec $q = 1, \dots, Q$) qui nous permettent de déterminer, par la méthode de régression décrite en section 2.3.2.1, les coefficients d'un chaos polynomial généralisé modélisant la limite d'atténuation η_{1ml} en fonction du coefficient de frottement μ .

L'algorithme de la méthode gPC1 est présenté dans la figure 4.1.

4.2.1.2 La quantité d'intérêt est l'amplitude de déplacement (Méthode gPC2)

Dans cette section, une seconde technique est proposée pour localiser la limite d'atténuation. L'amplitude A_1^{wNES} du système mécanique avec NES (3.2) est maintenant considérée comme la quantité d'intérêt modélisée par un développement en chaos polynomial et les paramètres μ et η_1 sont incertains.

Le principe est d'abord de générer un PEN de Q points dans l'espace des paramètres incertains, ici le plan (μ, η_1) . Un chaos polynomial généralisé est ensuite construit, toujours par la méthode de régression décrite en section (2.3.2.1), à partir des Q valeurs de la QI A_1^{wNES} correspondantes. Ce gPC représente, par une fonction polynomiale, l'amplitude des cycles limites du système avec NES (3.2) en fonction de μ et η_1 . Une fois le gPC construit, l'amplitude A_1^{wNES} est évaluée avec ce gPC pour N_μ valeurs de μ et N_{η_1} valeurs de η_1 . Ensuite, pour chaque valeur donnée de η_1 , la dérivée partielle de A_1^{wNES} par rapport à μ est évaluée numériquement. La valeur du coefficient de frottement qui correspond au maximum de cette dérivée représente la limite d'atténuation μ_{ml} . Cette opération répétée pour chacune des N_{η_1} valeurs de η_1 permet de reconstruire dans le plan (μ, η_1) la frontière séparant les régimes atténués des régimes non atténués et ainsi de calculer la PHSSR. L'algorithme de la méthode gPC2 est présenté en figure 4.3.

À titre d'exemple, la figure 4.4 montre l'évolution de A_1^{wNES} , obtenue directement à partir de la simulation de (3.2) (la référence) et par le gPC (avec un ordre $p = 20$), en fonction de μ pour $\eta_1 = 0.3980$. La figure montre également l'évolution de la dérivée $\partial A_1^{wNES} / \partial \mu$ obtenue par le gPC. La valeur de la limite d'atténuation donnée par la référence est $\mu_{ml} = 0.3081$. La valeur du coefficient de frottement qui correspond au maximum de la dérivée de l'amplitude donnée par le gPC est $\mu_{ml} = 0.3182$, soit une erreur relative de 3.28 %.

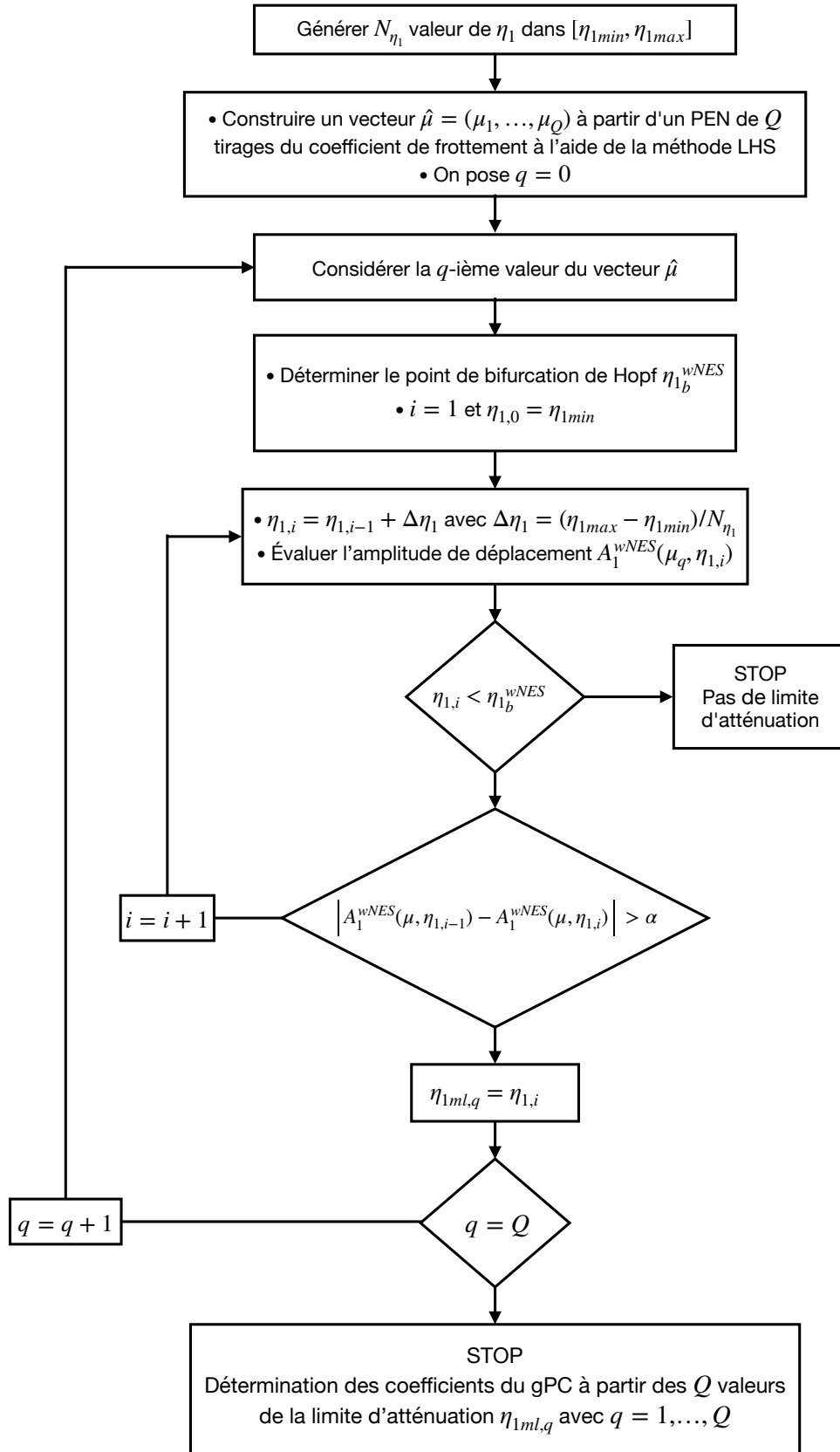


FIGURE 4.1 – Algorithme de la méthode gPC1.

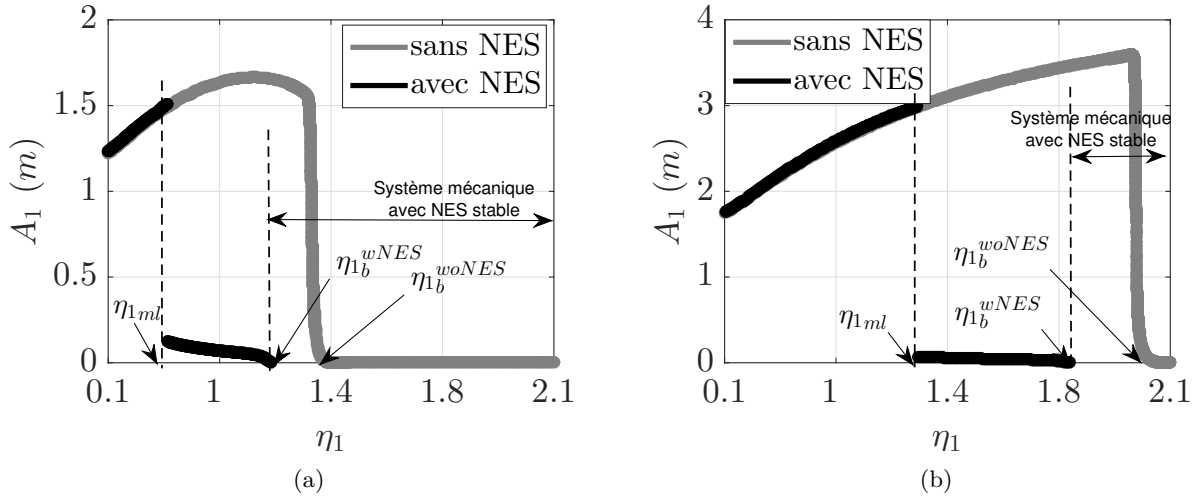


FIGURE 4.2 – Variation des amplitudes des cycles limites A_1^{wNES} du système mécanique avec NES et A_1^{woNES} su système sans NES en fonction du coefficient d'amortissements η_1 pour (a) $\mu = 0.3$ et (b) $\mu = 0.4$. $N_{\eta_1} = 250$.

4.2.2 Méthode basée sur le chaos polynomial multi-éléments (Méthode ME-gPC)

Comme dans la section précédente, cette troisième méthode considère que l'amplitude A_1^{wNES} du système mécanique avec NES (3.2) est la QI à modéliser avec le formalisme du chaos polynomial et que les paramètres μ et η_1 peuvent être incertains. La méthode est basée sur la théorie du chaos polynomial généralisé multi-éléments qui a été décrite en section 2.3.3. Pour résumer, le ME-gPC découpe l'espace des paramètres incertains en sous-espaces appelés *éléments*. Une représentation de la quantité d'intérêt par le chaos polynomial est ensuite construite dans chaque élément.

4.2.2.1 Algorithme de la méthode

La méthode est basée sur l'idée qu'une discontinuité est présente dans le profil de la quantité d'intérêt A_1^{wNES} elle va être localisée dans les éléments où la variance de la QI est la plus élevée. Le but ici n'est donc pas d'obtenir une représentation précise de A_1^{wNES} mais de pouvoir localiser la discontinuité.

C'est sur cette idée qu'un algorithme de localisation de la limite d'atténuation est construit et représenté en figure 4.5.

À une itération i donnée l'espace des paramètres incertains est divisé en K éléments (pour la première itération on a $K = 1$). Un gPC est construit dans chaque élément (c'est le principe de ME-gPC) en utilisant des ordres faibles pour les polynômes ($p = 1, 2$ ou 3). N' simulations du modèle mathématique (3.2) sont nécessaires pour construire les K gPC. Dans la section 4.3.3, une comparaison est effectuée avec une méthode de référence qui nécessite N simulations avec le modèle (3.2) pour localiser la limite d'atténuation. Par conséquent, la méthode proposée est efficace si le nombre de simulations numériques N' nécessaires pour obtenir les coefficients du gPC dans tous les éléments est inférieur à N :

$$N' \leq N. \quad (4.2)$$

Si la condition (4.2) n'est pas respectée l'algorithme est stoppé car, le but étant la réduction du coût de calcul, la méthode n'a plus d'intérêt. Si (4.2) est vérifiée, alors, pour chaque élément, la variance $\sigma_{p,k}^2$ ($k = 1, \dots, K$), calculée directement à partir des coefficients de la série du chaos polynomial en utilisant l'équation (2.45), est comparée à un seuil θ_1 . Si pour un élément donné k on a :

$$\sigma_{p,k}^2 \geq \theta_1, \quad (4.3)$$

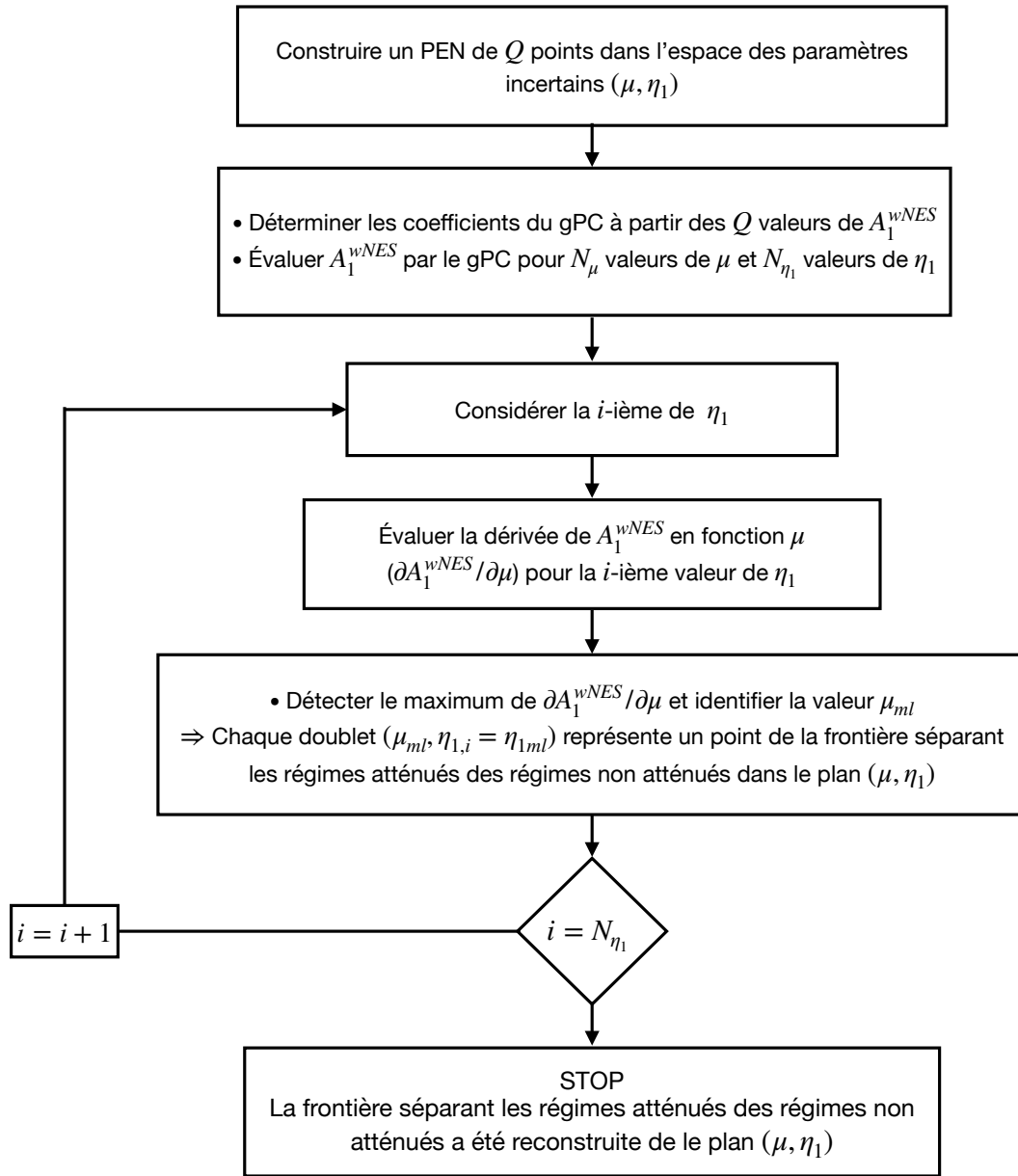


FIGURE 4.3 – Algorithme de la méthode gPC2.

on suppose alors que la discontinuité est dans l'élément k . Au contraire, si la condition (4.3) n'est pas vérifiée, on suppose que l'élément k ne contient pas de discontinuité. Cette information est sauvegardée et l'élément est retiré de l'algorithme. Une fois les K éléments passés en revue, un certain nombre a donc été retiré de l'algorithme et il reste K' éléments.

Le seuil θ_1 est choisi de manière à ce que la variance de l'élément qui contient la discontinuité satisfasse toujours la condition (4.3). Ainsi trouver ce seuil est l'une des difficultés de la méthode. Un autre critère (en plus de (4.2)) est introduit pour arrêter l'algorithme. Il est basé sur la taille de l'élément. Ainsi, après avoir défini la taille minimale $J_{\min}$ d'un élément comme suit :

$$J_{\min} = \theta_2 J_0 \quad (4.4)$$

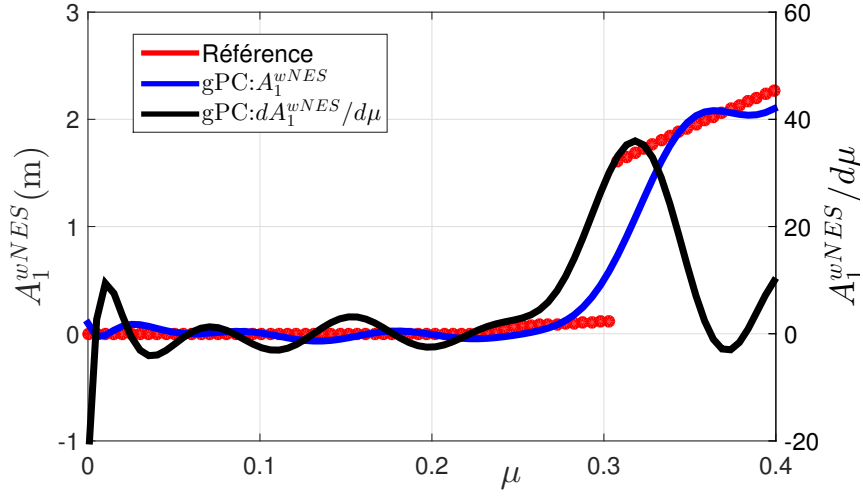


FIGURE 4.4 – Exemple de la variation de l’amplitude du déplacement du système avec NES en fonction de μ . L’ordre de gPC est $p = 20$ et $\eta_1 = 0.3980$.

où J_0 est la taille de l’élément initial correspondant à tout l’espace des paramètres incertains et θ_2 est un pourcentage. Chacun des K' éléments, de taille J_i , vérifiant

$$J_i \geq J_{\min} \quad (4.5)$$

est divisé en deux parties égales dans chaque direction de l’espace des paramètres incertains, puis une nouvelle itération commence ($i = i + 1$) avec $K = 2^r K'$. Les tailles J_i de tous les éléments sont identiques car à chaque itération la division est effectuée dans chaque direction de l’espace stochastique. Si la condition (4.5) n’est pas vérifiée, l’algorithme est arrêté et nous supposons que la discontinuité dans le profil de la QI est dans les K' éléments restants.

4.2.2.2 Construction du Plan d’Expérience Numérique (PEN)

La méthode présentée ci-dessus, basée sur le ME-gPC, nécessite un nombre maximum $K \times Q$ de simulations du modèle (3.2) pour calculer les coefficients du gPC dans chacun des K éléments. Dans la pratique, il est possible de réduire ce nombre. En effet, les points utilisés pour calculer les coefficients des gPC des éléments à l’itération i peuvent être utilisés pour calculer les coefficients du gPC des éléments de l’itération $i + 1$. L’ensemble des points l’itération $i + 1$ pour un élément est donc égal à $Q' = Q_{\text{hérité}} + Q_{\text{additionné}}$ où $Q_{\text{hérité}}$ est le nombre de points hérités de l’itération i et $Q_{\text{additionné}}$ est l’ensemble des nouveaux points générés à l’itération $i + 1$.

La méthode est illustrée en figure 4.6 pour $r = 1$, $p = 1$ et $k = 2$ ($N_p = 2$, $Q = 4$). Dans le cadre de cette thèse, le PEN est construit selon cette méthode.

4.3 Application et résultats

4.3.1 Référence

4.3.1.1 Un paramètre incertain : le coefficient de frottement μ

Dans cette section, seul le coefficient de frottement μ est incertain et on suppose que la loi de probabilité associée est uniforme dans l’intervalle $[0, 0.4]$. L’amplitude A_1^{wNES} est déterminée à partir de la simulation numérique du système mécanique avec NES (3.2) pour $N = 100$ valeurs de μ réparties de façon uniforme dans $[0, 0.4]$. Cet intervalle est choisi pour diminuer le coût de

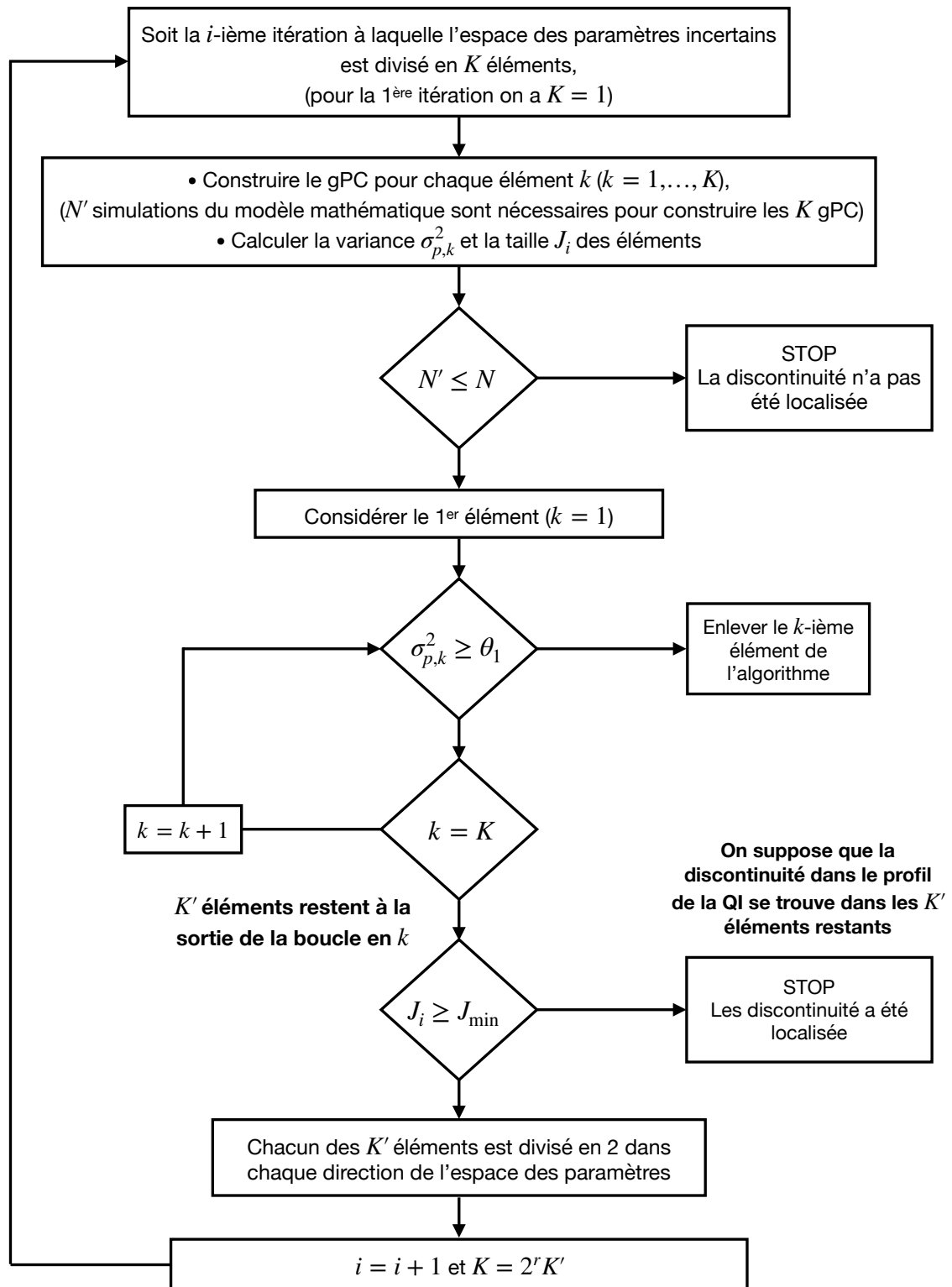


FIGURE 4.5 – Algorithme appliqué pour détecter le saut dans le cas où la quantité d'intérêt est calculée par la méthode de ME-gPC.

calcul. De plus, il est suffisant pour étudier la problématique de notre étude qui est la prédiction de la limite d'atténuation dans A_1^{wNES} et donc la transition entre les régimes atténués et les régimes

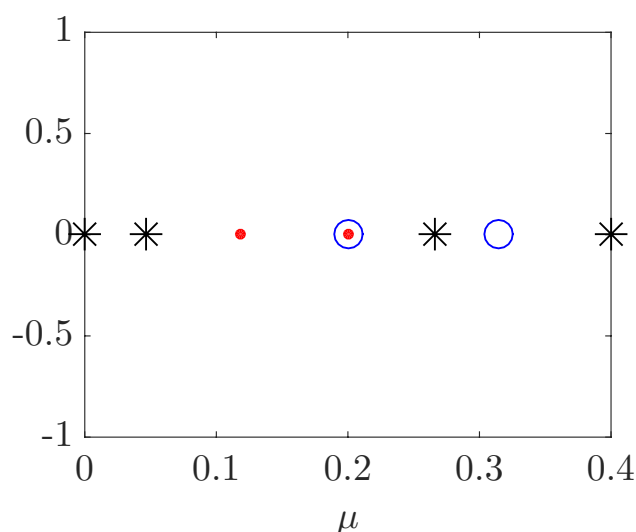


FIGURE 4.6 – Exemple d’un plan d’expérience par la méthode de LHS pour deux itérations avec $r = 1$, $p = 1$, $k = 2$ et $Q = 4$. (*) Points hérités de l’élément $[0, 0.4]$ de l’itération 1. (•) Nouveaux points LHS du premier élément $[0, 0.2]$ à l’itération 2. (○) Les nouveaux points LHS du deuxième élément $[0.2, 0.4]$ à l’itération 2.

non atténués. Les valeurs des autres paramètres sont données par le jeu (3.10). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1. On trouve une valeur de limite d’atténuation égale à $\mu_{ml} = 0,2061$, ce qui conduit, par l’intermédiaire de (3.13), à une valeur de référence de la propension à être dans un régime atténué $\text{PHSSR}_{\text{REF}}$ donnée par :

$$\text{PHSSR}_{\text{REF}} = \int_0^{\mu_{ml}} \frac{1}{0.4 \times 2} d\mu = \frac{\mu_{ml}}{0.4} = 0.5152 \quad (4.6)$$

soit 51,52%.

Max_{REF}	Min_{REF}	Limite d’atténuation μ_{ml}	$\text{PHSSR}_{\text{REF}}(\%)$	Nbr de simulations
1.89	$2.32 \cdot 10^{-8}$	0.2061	51.52	100

TABLEAU 4.1 – Résultats de la référence, le paramètre μ est incertain.

4.3.1.2 Deux paramètres incertains : le coefficient de frottement μ et le coefficient d’amortissement η_1

La référence est ici obtenue dans le cas où μ et η_1 sont incertains. Pour cela l’amplitude A_1^{wNES} est déterminée à partir de $N = 100 \times 100 = 10000$ simulations numériques du système mécanique avec NES (3.2). Ces simulations correspondent à une discrétisation en 100 points uniformément répartis dans chacune des deux dimension de l’espace des paramètres incertains avec $\mu \in [0, 0.4]$ et $\eta_1 \in [0.1, 2.1]$. Cet intervalle de η_1 est choisi de tel sorte que, dans l’espace des paramètres incertains μ et η_1 , les système mécaniques sans et avec NES peuvent être stable et/ou instable. Les valeurs des autres paramètres sont celles du jeu (3.10). La figure 4.7 montre un graphique 3D contenant les $N = 10000$ réalisations de l’amplitude du déplacement A_1^{wNES} , en fonction des deux paramètres incertains. La discontinuité dans la surface de l’amplitude est visible ; la limite d’atténuation qui est une courbe correspond à la projection de cette discontinuité dans le plan (μ, η_1) .

Cette projection est représentée dans la figure 4.8 (ligne noire). Pour bien rendre compte de

l'effet des NES les lignes correspondant aux points de bifurcation de Hopf avec et sans NES sont aussi représentées (lignes rouge et bleue respectivement). Les régimes décrits dans la section 3.4 et représentés dans le cas d'un seul paramètre incertain dans la figure 3.8 sont également représenté ici : (2) suppression complète de l'instabilité, (3) atténuation du cycle limite par un régime périodique ou un SMR et (4) pas d'atténuation du cycle limite. La surface (1) correspond à la région où le système est stable sans l'ajout des NES.

Dans le plan (μ, η_1) , la limite d'atténuation peut être définie comme la courbe $\eta_{1,ml}$ en fonction de μ . Toujours selon (3.13), la propension à être dans un régime atténué de référence est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \text{PHSSR}_{\text{REF}} &= \int_0^{0.4} \int_{0.1}^{\eta_{1,ml}(\mu)} \frac{1}{0.4 \times 2} d\mu d\eta_1 \\ &= \frac{\int_0^{0.4} [\eta_{1,ml}(\mu) - 0.1] d\mu}{0.8}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'intégrale de (4.7) est évaluée numériquement et on trouve $\text{PHSSR}_{\text{REF}} = 92,16\%$. Les résultats de la référence sont présentés dans le tableau 4.2.

Max_{REF}	Min_{REF}	$\text{PHSSR}_{\text{REF}}(\%)$	Nombre de simulations
2.86	$1.15 \cdot 10^{-11}$	92.16	10 000

TABEAU 4.2 – Résultats de la référence, les deux paramètres μ et η_1 sont incertains.

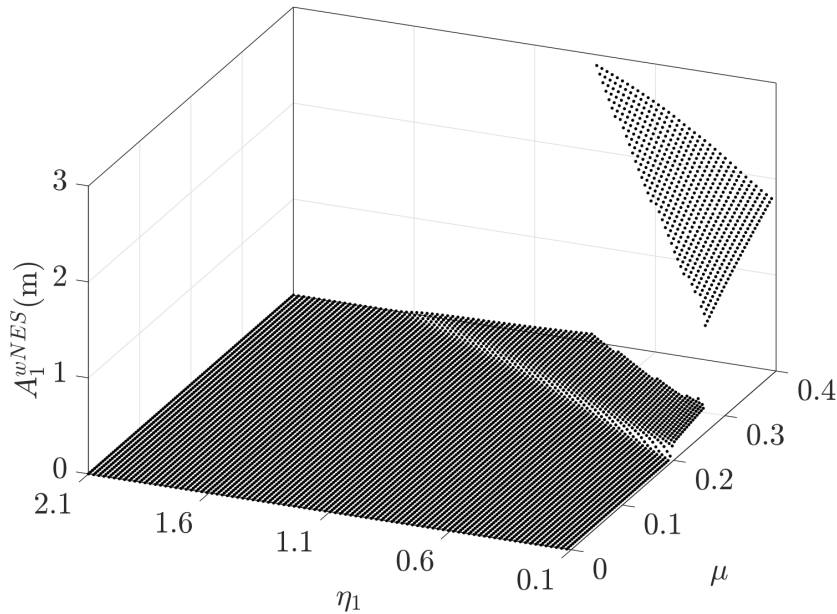


FIGURE 4.7 – Amplitude A_1^{wNES} en fonction du coefficient de frottement μ et du coefficient d'amortissement η_1 . Le jeu de paramètres (3.10) est utilisé.

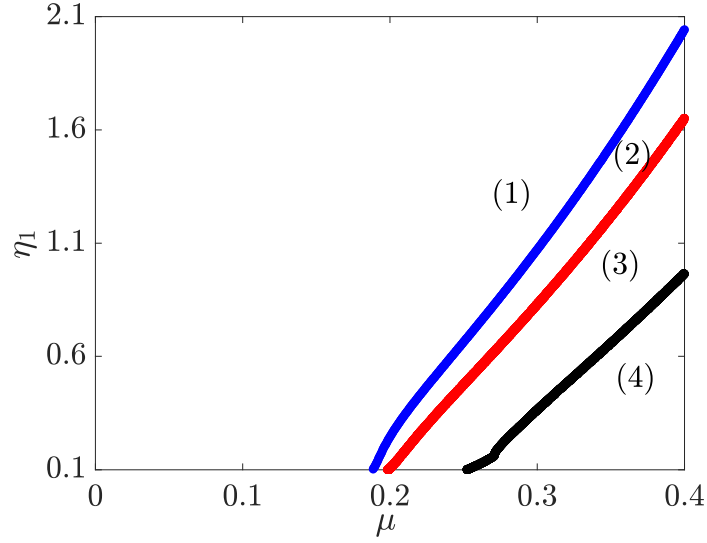


FIGURE 4.8 – Évolution de la limite d'atténuation et des points de bifurcation de Hopf avec et sans NES. (—) Point de bifurcation de Hopf sans NES (η_{1b}^{wo}); (—) point de bifurcation de Hopf avec NES (η_{1b}^w); (—) limite d'atténuation (η_{1ml}). (1) Stabilité linéaire sans NES; (2) stabilité linéaire avec NES; (3) régimes atténués (régimes périodiques ou SMR); (4) régimes non atténués.

4.3.2 Méthodes basées sur le chaos polynomial généralisé

4.3.2.1 Coût de calcul et critères d'évaluation

La validation des résultats obtenus par les deux méthodes basées sur le gPC s'effectue en termes de coût de calcul et de précision par rapport à la référence déterminée dans la section précédente. Pour cela, les quantités suivantes sont introduites :

- le nombre de simulations qui vaut $N_{\eta_1} \times Q$ pour la méthode gPC1 et Q pour la méthode gPC2 avec $Q = kN_p$ où k est un entier (en général $k = 2, 3$ ou 4) et N_p est le nombre de termes dans la série du chaos polynomial tronquée à l'ordre p avec r paramètres incertains (voir équation (2.20)).
- La valeur de la PHSSR trouvée par les méthodes gPC1 et gPC2 notée $\text{PHSSR}_{\text{gPC}}$.
- L'erreur relative E_{PHSSR} de la PHSSR obtenue avec la méthode basée sur le gPC ($\text{PHSSR}_{\text{gPC}}$) et la PHSSR obtenu avec la méthode de référence ($\text{PHSSR}_{\text{REF}}$). Cette erreur est définie comme suit :

$$E_{\text{PHSSR}} = \frac{|\text{PHSSR}_{\text{gPC}} - \text{PHSSR}_{\text{REF}}|}{\text{PHSSR}_{\text{REF}}} \quad (4.8)$$

- La moyenne des erreurs relatives E_3 entre la référence et le gPC d'ordre p donnée par l'équation (2.36).
- Le taux de décroissance δ donné par l'équation (2.34). Cette quantité permet de choisir l'ordre de troncation sans passer par la référence.

4.3.2.2 Résultats de méthode gPC1 - la quantité d'intérêt est la limite d'atténuation

Dans cette section, la méthode décrite en section (4.2.1.1) et dont l'algorithme est présenté dans la figure 4.1 est appliqué pour évaluer la limite d'atténuation ce qui permet ensuite d'estimer la valeur de la PHSSR.

Le coefficient de frottement μ est incertain et sa densité de probabilité est uniforme dans l'intervalle $[0, 0.4]$. Selon le principe de la méthode, la limite d'atténuation η_{1ml} (la QI) doit être déterminé pour chaque tirage de μ . Pour ce faire, on fait varier linéairement le coefficient d'amortissement η_1

dans l'intervalle $[0.1, 2.1]$ avec $N_{\eta_1} = 250$. Le coefficient d'amortissement η_2 est ici fixé à 0.09.

On utilise ici $Q = kN_p$ avec $k = 2$. Après avoir obtenue les Q valeurs de η_{1ml} , les coefficients de la série du chaos sont déterminée par la méthode de régression. L'ordre du gPC varie de $p = 1$ à $p = 12$.

La figure 4.9 montre deux exemples de résultats de la méthode pour $p = 2$ (figure 4.9(a)) et $p = 8$ (figure 4.9(b)). On observe déjà que la variation de η_{1ml} en fonction μ est presque linéaire et qu'un ordre peu élevé du gPC est suffisant pour reconstruire correctement la QI.

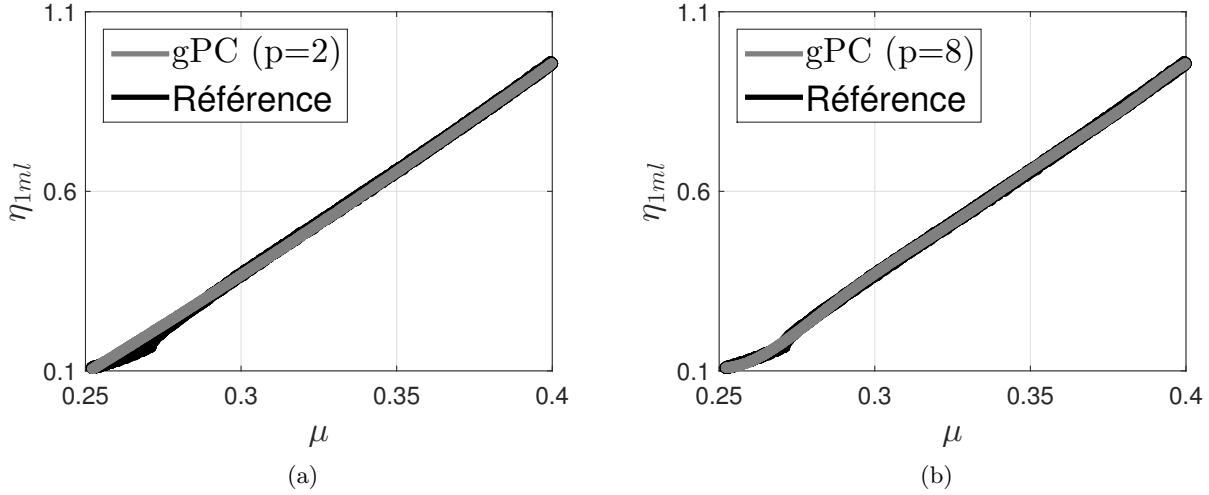


FIGURE 4.9 – Comparaison entre la limite d'atténuation η_{1ml} estimée par la référence (en noir) et par la méthode gPC1 (en gris) : (a) $p = 2$; (b) $p = 8$.

Cette observation est confirmée par résultats présentés dans le tableau 4.3. En effet, on voit que la moyenne des erreurs relatives que l'on peut également appelé erreur relative moyenne E_3 et l'erreur relative sur la propension à être dans un régime atténué E_{PHSSR} sont déjà très faibles pour $p = 1$. En effet, dans ce cas la PHSSR est égal à 92.00% ce qui conduit à une erreur relative par rapport

Ordre p	Nombre de simulations $N_{\eta_1} \times Q$	E_3 (%)	Taux de décroissance δ (%)	PHSSR _{gPC} (%)	E_{PHSSR} (%)
1	1000	3.92	–	92.00	0.12
2	1500	2.67	0.0340	92.06	0.05
6	3500	0.89	0.0020	92.12	0.01
8	4500	0.78	0.0013	92.13	0.02
12	6500	0.71	0.0010	92.14	0.03

TABEAU 4.3 – Comparaison entre les résultats trouvés par la méthode gPC1 et la référence.

à la référence égale à 0,12%. L'erreur relative moyenne, toujours par rapport à la référence, vaut 3,92%. De plus quand $p = 1$, $N_p = 2$ ce qui conduit à une nombre de simulations nécessaire pour déterminer les coefficients de série du gPC égal à $N_{\eta_1} \times k \times N_p = 250 \times 2 \times 2 = 1000$. Dans le cas où $p = 6$, l'erreur relative moyenne et l'erreur relative sur la PHSSR valent respectivement $E_3 = 0.89\%$ et $E_{PHSSR} = 0.01\%$. Le taux de décroissance δ commence à se stabiliser à partir de l'ordre $p = 6$ comme le montre également la figure 4.10 qui représente ce taux en fonction de p . Le nombre Q indiqué dans le tableau représente le nombre de simulations nécessaire pour construire le gPC à un ordre p donné. Dans le pratique pour ne pas avoir à recalculer tous les points du PEN pour chaque

ordre, les points obtenu à un ordre p sont garder pour construire le PEN à l'ordre $p + 1$ et seul la différence $kN_{p+1} - kN_p$ est à calculer. Cette technique est connue sous le nom d'Hypercube Latin Imbriqué [155].

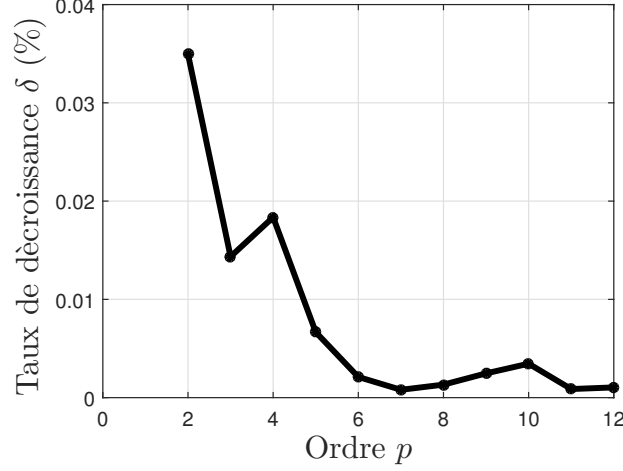


FIGURE 4.10 – Évolution du taux de décroissance δ en fonction de l'ordre p dans le cas de la méthode gPC1.

Finalement, même si l'erreur relative moyenne E_3 est relativement importante pour $p = 1$ (mais est quand même inférieure à 5 %), l'erreur relative sur la PHSSR E_{PHSSR} est inférieure au pour cent. Le choix de $p = 1$ semble ici être le meilleur compromis entre précision des résultats et coût de calcul.

Le défaut de cette méthode est qu'il faut, pour chaque tirage du paramètre incertain μ , un nombre non négligeable de simulations du modèle mathématique (3.2) pour obtenir la valeur de la limite d'atténuation η_{1ml} ce qui augmente le coût de calcul. Cependant, comme nous l'avons vu plus haut ceci est en partie compenser par le fait qu'un ordre $p = 1$ est suffisant pour obtenir une valeur précise de la PHSSR mais risque de poser problème si l'on souhaite augmenter le nombre de paramètre incertains.

4.3.2.3 Résultats de méthode gPC2 - la quantité d'intérêt est l'amplitude du déplacement

Dans cette section, les résultats relatifs à la seconde méthode basée sur le gPC, présentée en section 4.2.1.2 et décrit par l'algorithme 4.3, sont exposés. La QI est maintenant directement l'amplitude des cycles limites A_1^{wNES} de (3.2) et le coefficient de frottement μ tandis que le coefficient d'amortissement η_1 sont incertains. Les densités de probabilité de ces deux paramètres sont uniformes avec $\mu \in [0, 0.4]$ et $\eta_1 \in [0, 1, 2, 1]$.

À partir d'un PEN de Q points dans le plan (μ, η_1) , le gPC représentant l'amplitude A_1^{wNES} est construit par la méthode de régression. Comme dans le cas de la méthode gPC1, la technique de LHS est utilisée construire le PEN avec $Q = kN_p$ et $k = 3$.

La figure 4.11 compare les amplitudes A_1^{wNES} , respectivement obtenues par le gPC et la référence pour $N = 10000$ points répartis de façon uniforme dans le plan (μ, η_1) (c.-à-d. $N_\mu = 100$ et $N_{\eta_1} = 100$ et $N = N_\mu \times N_{\eta_1} = 10000$).

Ensuite, pour localiser la limite d'atténuation, pour une valeur donnée de η_1 , la dérivée partielle de A_1^{wNES} par rapport à μ est évaluée numériquement à partir du gPC et son maximum est déterminé afin de trouver μ_{ml} . Ceci est répété pour chacune des N_{η_1} valeurs de η_1 pour reconstruire, dans le plan (μ, η_1) , la frontière séparant les régimes atténués des régimes non atténués et ainsi calculer la PHSSR. La figure 4.12 montre trois exemples de résultats de la méthode pour $p = 8$ (figure 4.12(a)), $p = 15$ (figure 4.12(b)) et $p = 20$ (figure 4.12(c)). Cette figure met en évidence que la

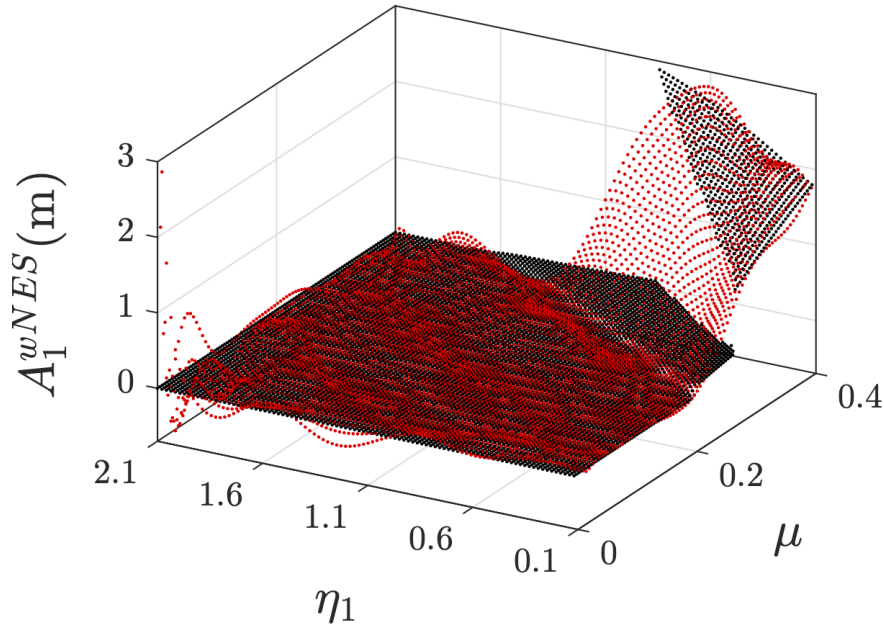


FIGURE 4.11 – 10 000 simulations de l'amplitude du déplacement du système mécanique avec NES en fonction de μ et η_1 . (noire) : la référence ; (rouge) : gPC. L'ordre du chaos polynomial est $p = 15$.

méthode, contrairement à la précédente, nécessite des ordres p élevés pour être en mesure d'évaluer correctement la PHSSR.

Le tableau 4.4 montre les résultats pour $p = 8, 12, 15, 18$ et 20 . Dans le cas où $p = 8$, la PHSSR est égal à 95.78% ce qui conduit à une erreur relative de la PHSSR par rapport à la référence égale à 3.98%. L'erreur relative moyenne entre la référence et le gPC est égale à 10.22% et le nombre de simulations est égal à 135. Dans le cas où $p = 18$, la PHSSR est égal à 90.53% ce qui conduit à une erreur relative de la PHSSR par rapport à la référence égale à 1.71%. On trouve pour $p = 20$, $E_3 = 3.15\%$ et $E_{PHSSR} = 0.48\%$ avec 693 simulations. On trouve donc des résultats avec $p = 20$, en terme de précision, comparables à ceux obtenus avec la méthode gPC1 pour $p = 1$ avec un coût de calcul plus faible, 693 simulations ici contre 1000 pour la méthode gPC1. Comme dans la section précédente, la technique Hypercube Latin Imbriqué a été utilisée pour ne pas avoir à calculer un PEN complet à chaque ordre.

Ainsi, pour un même niveau de précision (de l'ordre de 3% pour E_3) la méthode gPC2 nécessite moins de calcul que la méthode gPC1.

De façon générale concernant la précision sur la PHSSR, avec la méthode gPC1 pour laquelle la QI est la limite d'atténuation, les coûts de calcul sont très vite significatifs (1000 à 6500 simulations) mais permettent rapidement une très grande précision des résultats ($< 1, 2\%$ jusqu'à $0, 03\%$) même avec des ordres du chaos faibles. La précision très vite élevée même avec un ordre du chaos faible vient de la forme de la limite d'atténuation quasi-linéaire et le niveau vite élevé du coût de calcul provient du coût significatif pour l'obtention de chaque valeur de la limite d'atténuation pour construire le chaos polynomial.

La méthode gPC2 pour laquelle la QI est l'amplitude des vibrations, permet quant à elle, d'obtenir une précision raisonnable ($< 4\%$ jusqu'à $0, 48\%$) avec des coûts de calcul bien plus faibles (135 à 693 simulations) et avec des ordres du chaos vite élevés. La faible coût de calcul total provient du faible coût d'obtention de valeur d'amplitude pour construire le chaos polynomial. La difficulté d'avoir une précision élevée vient de la non linéarité du profil de l'amplitude. Il faudrait utiliser un ordre de chaos très élevé pour améliorer la précision de façon significative.

Ainsi ces deux méthodes sont complémentaires selon si on veut privilégier la précision ou bien le

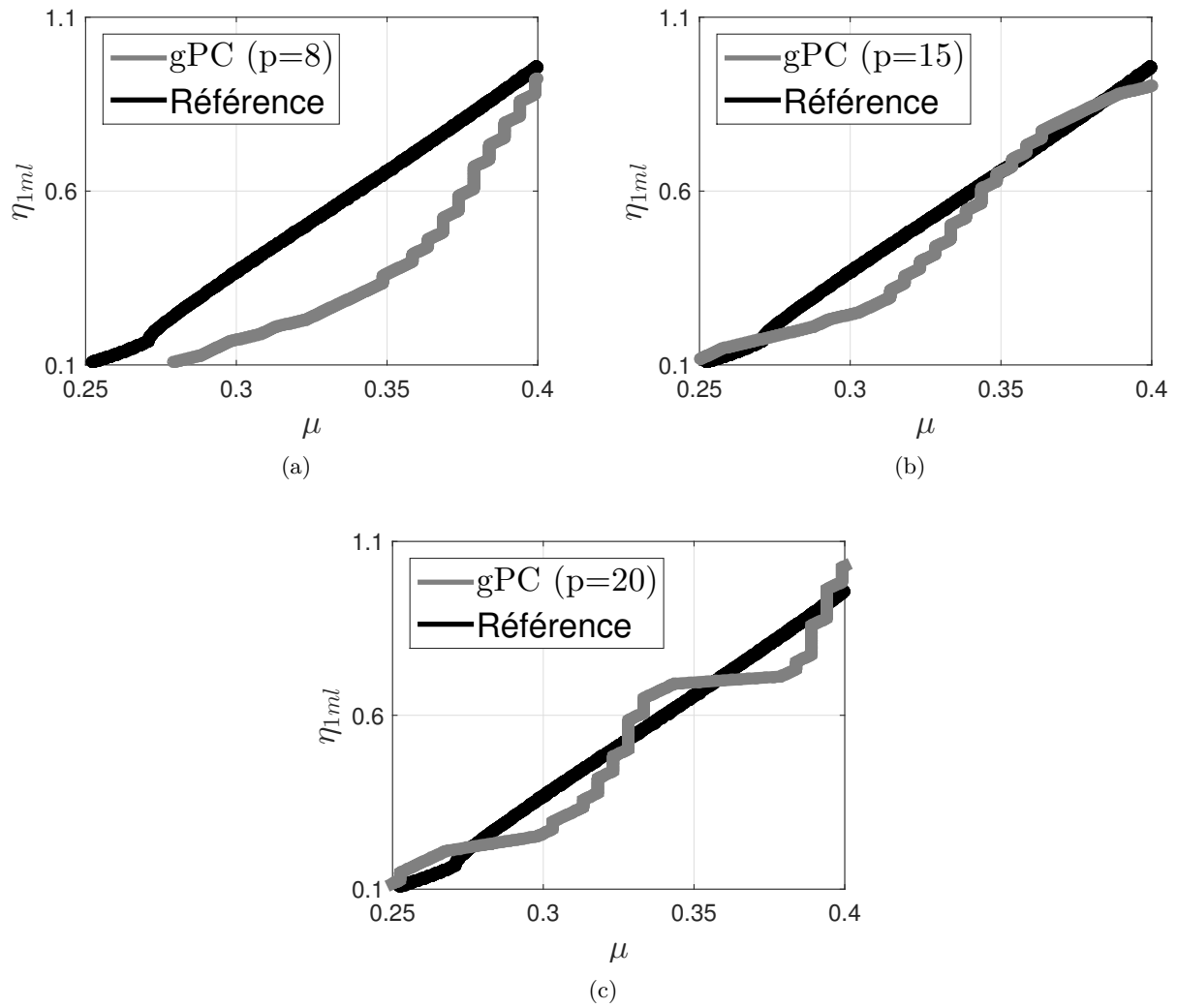
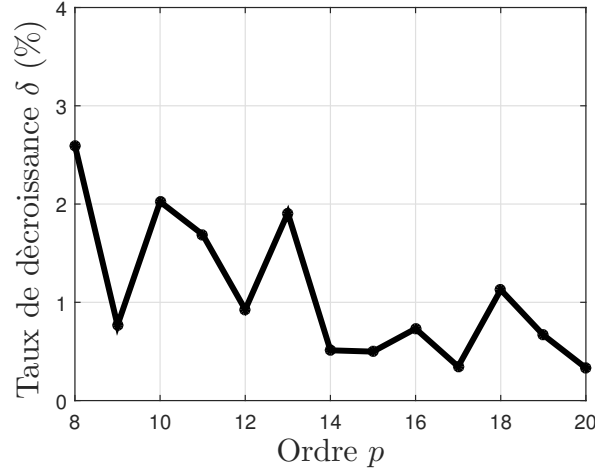


FIGURE 4.12 – Comparaison entre la limite d’atténuation estimée par la référence (en noir) et par la méthode gPC2 (en gris) : (a) $p = 8$; (b) $p = 15$; (c) $p = 20$.

coût de calcul. On peut noter que le taux de décroissance pour la méthode gPC2, comme le montre la figure 4.13, diminue en fonction de l’ordre du chaos p mais pas de façon monotone contrairement à celui de la méthode gPC1 ce qui rend son utilisation plus délicate pour choisir l’ordre de troncation.

Ordre p	Nombre de simulations Q	E_3 (%)	Taux de décroissance δ (%)	PHSSR _{gPC} (%)	E_{PHSSR} (%)
8	135	10.22	–	95.78	3.98
12	273	6.10	0.92	94.14	2.20
15	408	3.03	0.49	93.06	1.03
18	570	2.88	1.12	90.53	1.71
20	693	3.15	0.33	91.66	0.48

TABLEAU 4.4 – Comparaison entre les résultats trouvés par la méthode gPC2 et la référence.


 FIGURE 4.13 – Évolution du taux de décroissance δ en fonction de l'ordre p dans le cas de la méthode gPC2.

4.3.3 Utilisation du chaos polynomial Généralisé-Multi-élément

Dans cette section, la méthode ME-gPC présentée dans la section 4.2.2.1 est appliquée pour localiser la discontinuité dans les profils d'amplitude A_1^{wNES} (cf. Eq. (3.11) et Fig. 3.8) du système (3.2). On considérera d'abord que seul le coefficient de frottement μ est incertain puis que le coefficient d'atténuation η_1 l'est aussi.

4.3.3.1 Coût de calcul et critères d'évaluation

Dans les sections qui suivent, les résultats sont présentés en termes de coût de calcul, d'une part, et en termes de précision par rapport à la méthode de référence, d'autre part. À cette fin, les quantités suivantes sont introduites :

- Le rapport $\theta_1/(\text{Max}_{\text{REF}} - \text{Min}_{\text{REF}})$ pour comparer la proportion de la valeur du critère de variance θ_1 par rapport à la référence en terme d'amplitude (Max_{REF} et Min_{REF} représentent respectivement le maximum et le minimum de l'amplitude trouvée par la référence).
- Le nombre de simulations afin d'estimer le coût de calcul de la méthode (voir section 4.2.2.2).
- La valeur de la PHSSR trouvée par la méthode ME-gPC estimée en utilisant les bornes supérieures des derniers intervalles trouvés par l'algorithme présenté dans la figure 4.5 afin de ne pas surestimer cette PHSSR.
- L'erreur relative E_{PHSSR} de la PHSSR obtenue avec la méthode ME-gPC ($\text{PHSSR}_{\text{ME-gPC}}$) et la PHSSR obtenu avec la méthode de référence ($\text{PHSSR}_{\text{REF}}$) définie comme suit

$$E_{\text{PHSSR}} = \frac{|\text{PHSSR}_{\text{ME-gPC}} - \text{PHSSR}_{\text{REF}}|}{\text{PHSSR}_{\text{REF}}}. \quad (4.9)$$

Dans le cas où seul μ est incertain, le dernier intervalle trouvé par la méthode ME-gPC est noté $I_{ml} = [\mu_1, \mu_2]$. Cet intervalle contient le saut (c'est-à-dire $\mu_{ml} \in I_{ml}$). Ensuite, le point milieu μ_{mid} de l'intervalle est calculé, ce qui donne deux critères. Le premier est l'erreur relative E entre le point milieu de l'intervalle et la valeur de référence de la limite d'atténuation trouvée par la méthode de référence :

$$E = \frac{|\mu_{\text{mid}} - \mu_{ml}^{\text{REF}}|}{\mu_{ml}^{\text{REF}}} \quad (4.10)$$

où μ_{ml}^{REF} est la limite d'atténuation trouvée par la méthode de référence. La seconde est la différence

relative D entre le point milieu et les limites de l'intervalle :

$$D = \frac{|\mu_1 - \mu_{\text{mid}}|}{\mu_{\text{mid}}}. \quad (4.11)$$

Dans le cas où μ et η_1 sont incertains, le résultat de l'algorithme de la méthode ME-gPC sera sous forme de plusieurs rectangles $[\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}] \times [\eta_{11}^{(k)}, \eta_{12}^{(k)}]$ (avec $k = 1, \dots, K$) contenant la limite d'atténuation (voir la ligne noire dans la figure 4.8). Les différences relatives D_μ et D_{η_1} entre les points milieux μ_{mid} et $\eta_{1\text{mid}}$ dans chaque direction de l'espace des paramètres incertains et les bornes correspondantes de ces intervalles sont calculées comme suit

$$D_\mu = \frac{|\mu_1^{(k)} - \mu_{\text{mid}}^{(k)}|}{\mu_{\text{mid}}^{(k)}}, \quad (k = 1, \dots, K) \quad (4.12)$$

et

$$D_{\eta_1} = \frac{|\eta_{11}^{(k)} - \eta_{1\text{mid}}^{(k)}|}{\eta_{1\text{mid}}^{(k)}}, \quad (k = 1, \dots, K). \quad (4.13)$$

Il est à noter que comme dans chaque direction de l'espace des paramètres incertains les différences $\mu_1^{(k)} - \mu_{\text{mid}}^{(k)}$ (resp. $\eta_{11}^{(k)} - \eta_{1\text{mid}}^{(k)}$) sont égales, D_μ (resp. D_{η_1}) est le même pour chaque élément.

4.3.3.2 Résultat pour un paramètre incertain : le coefficient de frottement μ

Dans cette section, seul le coefficient de frottement μ est incertain et est régi comme précédemment par une loi uniforme dans l'intervalle $[0, 0.4]$.

Critère de la taille d'élément $\theta_2 = 1\%$. Tout d'abord, pour bien illustrer la méthode, la figure 4.14 montre les itérations successives de l'algorithme présenté en figure 4.5. L'ordre est $p = 1$ et les critères suivants sont utilisés : $\theta_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$. L'algorithme s'arrête à la huitième itération, ce qui signifie que la variance du dernier élément est supérieure à θ_1 (voir équation (4.3)) mais que sa taille est inférieure à $\theta_2 = 1\%$ de la taille de l'élément initial (voir équation (4.5)). Par conséquent, la limite d'atténuation μ_{ml} se situe dans cet élément.

La figure 4.15 montre également l'évolution de différents critères d'arrêt de l'algorithme toujours pour $\theta_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. L'algorithme nécessite 50 éléments pour localiser la valeur de la limite d'atténuation. On peut bien voir que pour la dernière itération (les deux derniers éléments), la taille des éléments devient inférieure au seuil du critère de la taille $J_{\min} = \theta_2 J_0$ où J_0 est la taille de l'élément initial et $\theta_2 = 1\%$. De plus, dans la dernière itération, seule la variance du deuxième élément est supérieure au seuil θ_1 . Ce dernier contient alors la discontinuité.

Ensuite, afin de trouver la bonne combinaison entre les valeurs des différents critères et le coût de calcul, plusieurs simulations ont été réalisées avec des valeurs différentes de θ_1 et de l'ordre de p du gPC. Le PEN est construit à chaque fois selon la méthode décrite dans la section 4.2.2.2.

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5 qui montre la comparaison entre les résultats de la référence et ceux de la méthode ME-gPC pour $\theta_2 = 1\%$, $p = 1, 2$ et 3 et pour différentes valeurs du critère sur la variance θ_1 .

Dans le cas où il existe un saut, l'algorithme est toujours stoppé à cause du critère sur la taille θ_2 . Par conséquent, la largeur du dernier intervalle I_{ml} est la même quelle que soit la valeur du critère θ_1 et de l'ordre p . Le dernier intervalle trouvé est $I_{ml} = [0.2031, 0.2063]$ (ou $I_{ml} = 0.2047 \pm 0.78\%$ où 0.78% est lié aux bornes de l'intervalle). La taille de cet intervalle représente 0.8% du premier intervalle $[0, 0.4]$ ce qui est bien inférieur à $\theta_2 = 1\%$. La valeur du point milieu est comparée à la limite d'atténuation trouvée par la méthode de référence (voir tableau 4.1), l'erreur relative est égale à 0.68% . La PHSSR, calculée à partir de la borne supérieure de l'intervalle $[\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}]$, est égal à

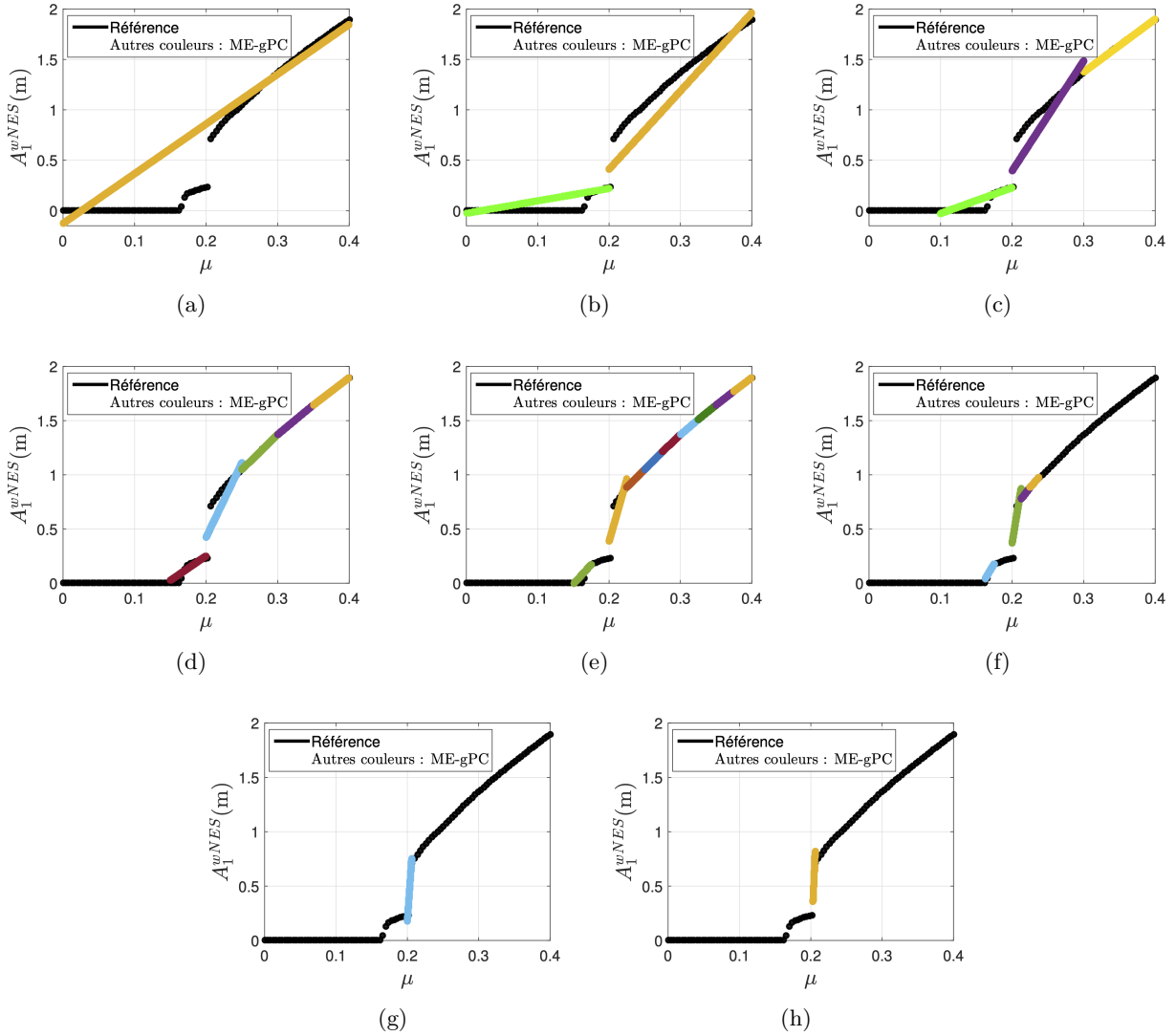


FIGURE 4.14 – Huit itérations jusqu'à l'arrêt, par violation de (4.5), de l'algorithme de la méthode ME-gPC. Le coefficient de frottement μ est incertain, $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. (courbe noire) : la référence; (autres couleurs) : ME-gPC. (a) Itération 1; (b) Itération 2; (c) Itération 3; (d) Itération 4; (e) Itération 5; (f) Itération 6; (g) Itération 7; (h) Itération 8.

51.57% ce qui conduit à une erreur relative par rapport à la méthode de référence égale à 0.097%. Il est à noter que quand le nombre de simulations dépasse $N' = 100$, l'algorithme est stoppé en vertu de (4.2), 100 est indiqué dans le tableau et la discontinuité n'a pas été localisée.

Dans tous les cas, la valeur maximale du critère de variance θ_1 représente la valeur correspondant à un changement du critère qui arrête l'algorithme. C'est-à-dire qu'après cette valeur, c'est le critère de variance θ_1 qui stoppe l'algorithme et non le critère sur la taille θ_2 . Cela veut dire que pour chaque élément on a $\sigma_{p,k}^2 \leq \theta_1$, et donc soit il n'y effectivement pas de discontinuité soit la discontinuité n'a pas été localisée. Dans la cas où il y a présence d'une discontinuité, la valeur maximale de θ_1 est la valeur optimale car elle correspond au nombre minimal de simulations nécessaire pour localiser la limite d'atténuation. On observe également, que le nombre de simulations est plus faible lorsque $p = 1$ que dans le cas où $p = 2$ et $p = 3$ et la PHSSR reste constante puisque les intervalles I_{ml} sont les mêmes pour chacune des valeurs de p . Il apparaît donc que $p = 1$ est le meilleur choix pour l'ordre du gPC en termes de précision et de coût de calcul.

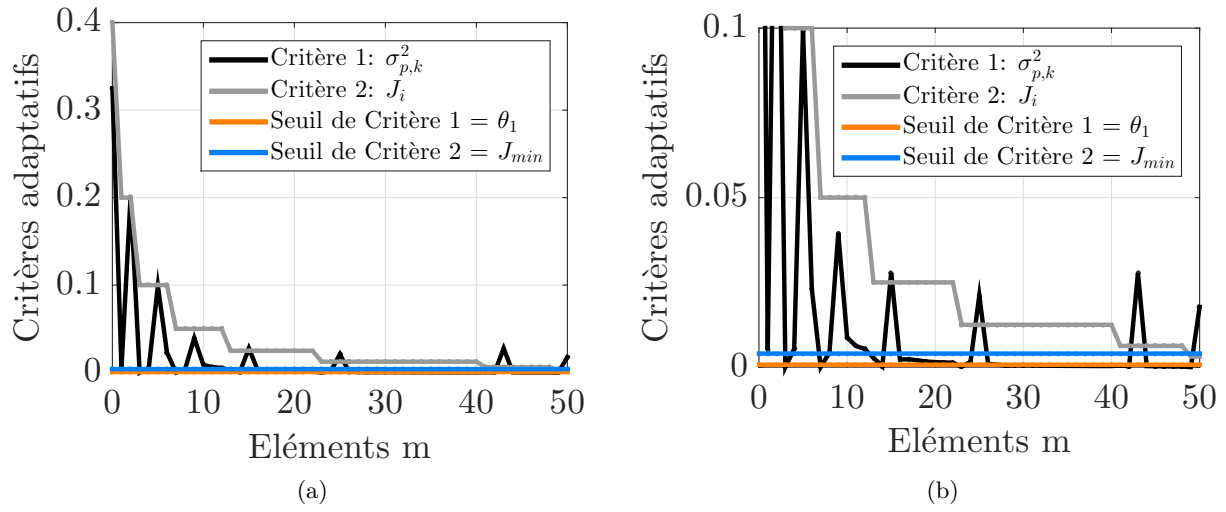


FIGURE 4.15 – (a) Critère d'arrêt de l'algorithme basé sur la méthode de ME-gPC, $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. (b) Zoom de la figure 4.15(a).

	ME-gPC					
Critère de variance $\theta_1 (.10^{-3})$	$p = 1$	0.7	2	10	15	17
	$p = 2$	0.05	0.1	0.5	0.7	0.9
	$p = 3$	0.05	0.07	0.1	0.3	0.4
$\frac{\theta_1}{\text{Max}_{\text{REF}} - \text{Min}_{\text{REF}}} (\%)$	$p = 1$	0.03	0.1	0.52	0.79	0.89
	$p = 2$	0.002	0.005	0.02	0.03	0.04
	$p = 3$	0.002	0.003	0.005	0.01	0.02
Nbr de simulations	$p = 1$	100	100	52	53	53
	$p = 2$	94	79	78	78	71
	$p = 3$	100	99	99	89	80
PHSSR (%)	$p = 1$	51.57				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
$E_{\text{PHSSR}} (\%)$	$p = 1$	0.097				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
I_{ml}	$p = 1$	[0.2031, 0.2063]				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
μ_{mid}	$p = 1$	0.2047				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
$E (\%)$	$p = 1$	0.68				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
$D (\%)$	$p = 1$	0.78				
	$p = 2$					
	$p = 3$					

TABLEAU 4.5 – Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur la ME-gPC, $\theta_2 = 1\%$ et le paramètre μ est incertain.

Critère de la taille d'élément $\theta_2 = 5\%$. Afin de réduire le coût de calcul, il est possible d'augmenter la valeur du seuil θ_2 . Les résultats obtenus pour $\theta_2 = 5\%$ sont présentés dans le tableau 4.6. Dans ce cas, le dernier intervalle est $I_{ml} = [0.2, 0.2125]$. La taille de l'intervalle augmente par rapport au

cas où $\theta_2 = 1\%$, ce qui fait augmenter l'erreur relative E_{PHSSR} de 0.097% dans le cas où $\theta_2 = 1\%$ à 3.10% dans le cas présent. Le nombre de simulations diminue et devient égal à 40 pour $\theta_1 = 10 \cdot 10^{-3}$ et $p = 1$. Ces valeurs sont évidemment beaucoup plus faibles que celles requises par la méthode de la référence. L'ordre $p = 1$ reste le meilleur choix.

	ME-gPC					
Critère de variance $\theta_1 (.10^{-3})$	$p = 1$	10	15	20	25	29
	$p = 2$	0.5	1	2	3	4
	$p = 3$	0.05	0.1	0.3	0.4	0.5
$\frac{\theta_1}{\text{Max}_{\text{REF}} - \text{Min}_{\text{REF}}} (\%)$	$p = 1$	0.52	0.79	1.05	1.31	1.52
	$p = 2$	0.02	0.05	0.1	0.15	0.21
	$p = 3$	0.002	0.005	0.01	0.02	0.02
Nbr de simulations	$p = 1$	40	40	40	34	34
	$p = 2$	54	54	46	46	46
	$p = 3$	88	68	68	58	58
PHSSR(%)	$p = 1$	53.12				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
$E_{\text{PHSSR}} (\%)$	$p = 1$	3.10				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
I_{ml}	$p = 1$	[0.2,0.2125]				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
μ_{mid}	$p = 1$	0.20625				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
$E (\%)$	$p = 1$	0.072				
	$p = 2$					
	$p = 3$					
$D (\%)$	$p = 1$	3.03				
	$p = 2$					
	$p = 3$					

TABEAU 4.6 – Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur la ME-gPC, $\theta_2 = 5\%$ et le paramètre μ est incertain.

4.3.3.3 Résultat pour deux paramètres incertains : le coefficient de frottement μ et le coefficient d'amortissement η_1

Dans cette section, le coefficient d'amortissement η_1 est également supposé incertain et déterminé par une distribution uniforme à l'intérieur de l'intervalle $[0.1, 2.1]$. Le coefficient d'amortissement η_2 est égal à 0,09.

Critère de la taille d'élément $\theta_2 = 1\%$. Comme précédemment pour illustrer la méthode, la figure 4.16(g) montre les itérations successives de l'algorithme présenté en figure 4.5 jusqu'à son arrêt à l'itération 7. L'ordre est $p = 1$ et les critères suivants sont utilisés : $\theta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$.

Le tableau 4.7 résume les résultats obtenus pour $\theta_2 = 1\%$. Les différences relatives D_μ et D_{η_1} sont égales à 0.61% et 6.62% respectivement. Comme précédemment, l'augmentation de la valeur de θ_1 réduit le nombre de simulations. Comme dans le cas avec un paramètre incertain, la valeur maximale du critère de variance 1 représente la valeur correspondant à un changement du critère qui arrête l'algorithme. C'est-à-dire qu'après cette valeur, c'est le critère de variance 1 qui stoppe l'algorithme et non le critère sur la taille 2. Quelle que soit la valeur de p , la PHSSR, calculé à partir

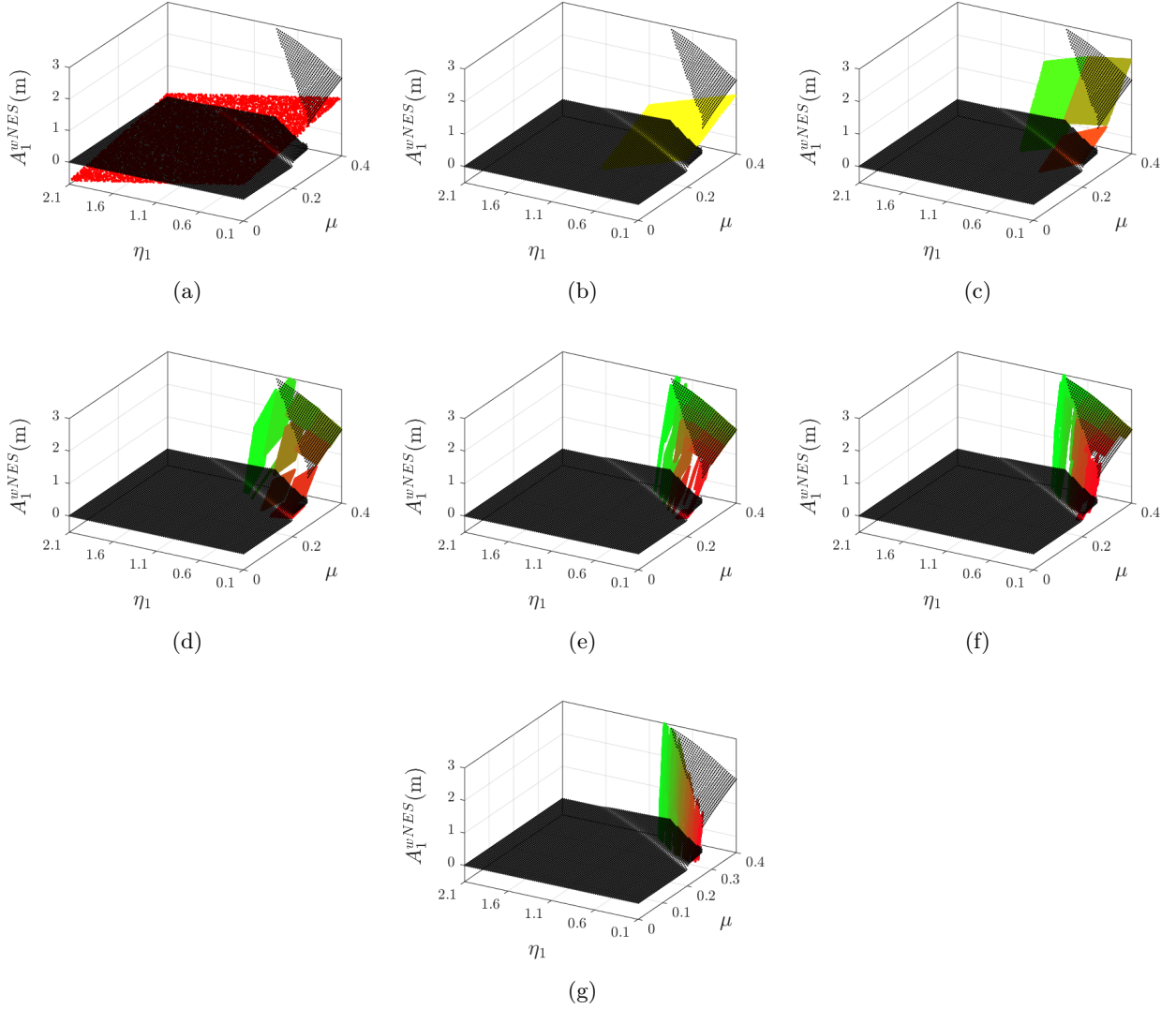


FIGURE 4.16 – Sept itérations jusqu'à l'arrêt, par violation de (4.5), de l'algorithme de la méthode ME-gPC. Les paramètres μ et η_1 sont incertains, $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$. (courbe noire) : la référence ; (autres couleurs) : ME-gPC. (a) Itération 1 ; (b) Itération 2 ; (c) Itération 3 ; (d) Itération 4 ; (e) Itération 5 ; (f) Itération 6 ; (g) Itération 7.

des bornes supérieures des intervalles $[\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}] \times [\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)}]$ (avec $k = 1, \dots, K$) (voir la figure 4.17), est égal à 92,39% avec une erreur relative E_{PHSSR} égale à 0,24%.

Critère de la taille d'élément $\theta_2 = 5\%$. Les résultats pour $\theta_2 = 5\%$ sont présentés dans le tableau 4.8. L'erreur relative E_{PHSSR} augmente par rapport à la valeur obtenue pour $\theta_2 = 1\%$ et elle atteint $E_{\text{PHSSR}} = 1.31\%$. Le nombre de simulations diminue et devient égal à 448 pour $\theta_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ et $p = 1$.

Ainsi, pour deux paramètres incertains, $p = 1$ demeure le choix optimal pour l'ordre de gPC en termes de précision et de coût de calcul. La difficulté de la méthode est de trouver la valeur de θ_1 qui permet d'identifier le saut et en même temps d'obtenir le nombre de simulations le plus bas possible.

En conclusion, cette méthode basée sur une estimation de la limite d'atténuation à partir d'une modélisation de l'amplitude des vibrations avec un chaos polynomial multi-éléments permet d'obtenir des résultats satisfaisants. En effet, l'erreur sur la PHSSR ($< 1,31\%$ jusqu'à 0,24%) est faible avec un coût de calcul limité (448 à 2122 simulations). L'idée de cette méthode n'étant pas tant de

	ME-gPC					
Critère de variance $\theta_1 (.10^{-3})$	$p = 1$	1	10	20	26	29
	$p = 2$	0.8	1	2	4	5
	$p = 3$	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\frac{\theta_1}{\text{Max}_{\text{REF}} - \text{Min}_{\text{REF}}} (\%)$	$p = 1$	0.03	0.34	0.69	0.9	1.01
	$p = 2$	0.02	0.03	0.06	0.13	0.20
	$p = 3$	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03
Nbr de simulations	$p = 1$	3723	2188	2183	2144	2122
	$p = 2$	4198	4236	4181	4172	4195
	$p = 3$	7168	7214	7239	7164	7293
PHSSR (%)	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	92.39				
$E_{\text{PHSSR}} (\%)$	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	0.24				
D_μ	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	0.61				
D_{η_1}	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	6.62				

 TABLEAU 4.7 – Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur le ME-gPC, $\theta_2 = 1\%$ et les deux paramètres μ et η_1 sont incertains.

	ME-gPC					
Critère de variance $\theta_1 (.10^{-3})$	$p = 1$	6	9	16	20	23
	$p = 2$	0.5	1	2	6	8
	$p = 3$	0.4	0.6	0.8	1	2
$\frac{\theta_1}{\text{Max}_{\text{MC}} - \text{Min}_{\text{MC}}} (\%)$	$p = 1$	0.2	0.31	0.55	0.69	0.8
	$p = 2$	0.01	0.03	0.06	0.2	0.27
	$p = 3$	0.01	0.02	0.02	0.03	0.06
Nbr de simulations	$p = 1$	591	473	544	448	495
	$p = 2$	938	706	704	583	585
	$p = 3$	1330	1265	1204	1265	1265
PHSSR(%)	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	93.37				
$E_{\text{PHSSR}} (\%)$	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	1.31				
$D_\mu (\%)$	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	2.43				
$D_\beta (\%)$	$p = 1$					
	$p = 2$					
	$p = 3$	22.11				

 TABLEAU 4.8 – Comparaison des résultats entre la méthode de référence et la méthode basée sur le ME-gPC, $\theta_2 = 5\%$ et les deux paramètres μ et η_1 sont incertains.

modéliser très finement amplitude des vibrations mais plutôt de localiser une discontinuité dans le profil de cette amplitude, l'utilisation d'un chaos d'ordre un suffit ce qui enlève la difficulté du choix optimal de l'ordre. Un avantage majeur de cette méthode est la possibilité de choisir la précision sur l'estimation de la limite d'atténuation donc sur la PHSSR à partir du choix de la valeur du seuil du

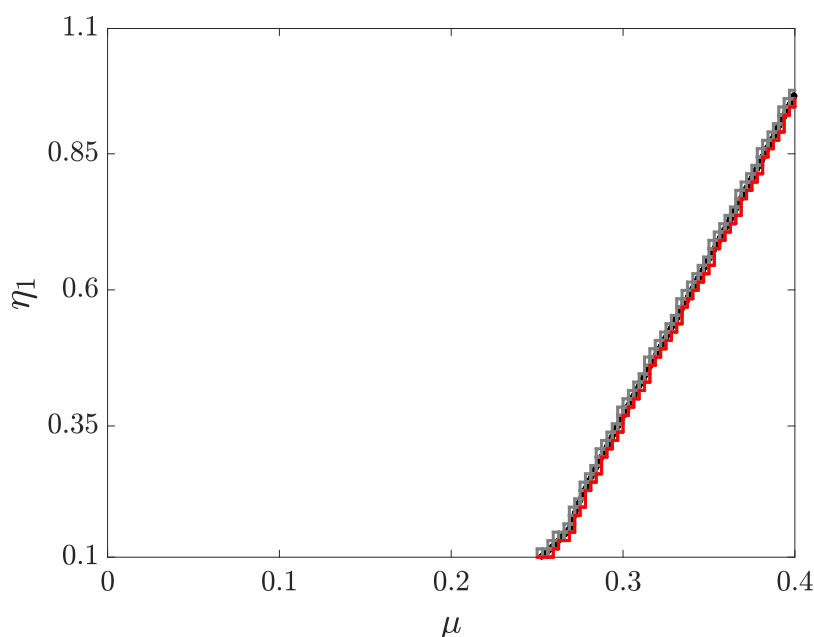


FIGURE 4.17 – La limite d’atténuation dans le plan (μ, η_1) . La référence est la ligne noire. Les derniers éléments K' qui restent à la fin de l’algorithme présenté en figure. 4.5 sont représentés par des carrés gris. Le côté droit des carrés (en rouge) constitue la valeur de la limite d’atténuation à partir de laquelle la PHSSR est estimée. Les paramètres μ et η_1 sont incertains, $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $\theta_2 = 1\%$ et $p = 1$.

critère θ_2 sur la taille minimale de l’élément, qui peut être exprimée en pourcentage de l’espace des paramètres incertains. La principale difficulté de cette méthode réside dans le choix de la valeur du seuil du critère θ_1 sur le niveau de variance correspondant à un saut. Ce choix qui peut être exprimée en pourcentage des niveaux d’amplitudes est empirique.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, trois méthodes basées sur la théorie de chaos polynomial sont développées pour prédire la propension à être dans un régime atténué (PHSSR). Les deux premières méthodes sont basées sur la théorie de chaos polynomial généralisé avec comme quantité d’intérêt respectivement la limite d’atténuation pour la méthode gPC1 et l’amplitude des déplacements pour la méthode gPC2. La troisième méthode, appelée méthode ME-gPC, est basée sur le chaos polynomial multi-élément avec comme quantité d’intérêt l’amplitude des déplacements. Il est à noter que pour les deux méthodes qui considèrent l’amplitude comme quantité d’intérêt (c.-à-d. les méthodes gPC2 et ME-gPC), l’idée n’est pas tant de modéliser finement le profil de l’amplitude mais de localiser la limite d’atténuation qui permet d’estimer la PHSSR.

Ainsi les trois méthodes présentées dans ce chapitre permettent d’estimer la PHSSR avec des niveaux de précision et des coûts de calcul différents et des avantages et inconvénients propres.

Afin de choisir la méthode la mieux adaptée à la phase d’optimisation des NES avec prise en compte des incertitudes paramétriques, une comparaison des performances de ces trois méthodes doit être effectuée. La méthode gPC1 même avec un ordre de chaos le plus bas (égal à 1) génère un coût bien plus élevé que les deux autres. Ainsi le choix doit se faire entre les méthodes gPC2 et ME-gPC. Pour cela, les performances des deux méthodes sont comparées pour un même niveau de précision de l’ordre de 1 à 2% (cf. tableau 4.9). Pour ce niveau d’erreur de très bonne qualité en ingénierie, les deux méthodes génèrent des coûts de calcul du même ordre de grandeur. Ainsi le choix doit s’appuyer sur d’autres critères que le coût. Comme d’une part, pour la méthode gPC2, il

est très difficile de choisir l'ordre de troncation du chaos à cause de la non monotonie du taux de décroissance et que d'autre part, pour la méthode ME-gPC l'ordre du chaos optimal est toujours 1 et que la précision de la PHSSR peut être choisie à travers la valeur du seuil sur le critère de la taille minimale des éléments, le choix s'est porté sur la méthode ME-gPC. Il peut être noté que ce choix est conforté par le fait que cette méthode est plus facile à mettre en œuvre que la méthode gPC2 pour un nombre de paramètres incertains plus élevé.

	ordre p	Nombre de simulations	$E_{\text{PHSSR}}(\%)$
Méthode gPC2	$p = 15$	408	1.03
	$p = 18$	570	1.71
Méthode ME-gPC	$p = 1$	448	1.31

TABLEAU 4.9 – Comparaison des résultats entre la méthode gPC2 et la méthode ME-gPC.

Deuxième partie

Optimisation sous incertitudes d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES

Chapitre 5

Étude théorique du modèle de système frottant couplé à deux NES

Sommaire

5.1	Introduction	78
5.2	Analyse asymptotique du modèle	78
5.2.1	Réécriture des équations du mouvement	78
5.2.2	Calcul du flot lent	79
5.2.3	Calcul de la variété critique	81
5.3	Lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites	84
5.4	Conclusion	84

5.1 Introduction

Dans la partie I de ce manuscrit, il a été montré que, dans le cadre de l'atténuation de cycles limites d'un système mécanique instable à l'aide des NES, une discontinuité est observée dans le profil de l'amplitude vibratoire du système. Cette discontinuité, qui correspond au passage brutal d'un régime où les cycles limites sont atténués à un régime où les cycles limites ne sont pas atténués, rend l'efficacité des NES très sensible à la dispersion des paramètres du système mécanique primaire. Afin de concevoir des NES robustes, c'est à dire qui permettent au système primaire avec NES d'avoir un comportement « sûr » (stable ou avec des cycles limites atténués) malgré les incertitudes paramétriques du système primaire mais également des NES, une stratégie d'optimisation est proposée dans cette seconde partie de la thèse. Les résultats de cette optimisation seront présentés au chapitre suivant.

Dans ce présent chapitre, des aspects théoriques sont présentés en détail. La section 5.2 reprend l'analyse asymptotique, tirée de [11], du système étudié (3.2). Le but est d'obtenir la valeur maximale du coefficient d'amortissement des NES permettant l'existence de régime SMR. Le lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites est étudié en section 5.3 à l'aide de simulations numériques.

5.2 Analyse asymptotique du modèle

5.2.1 Réécriture des équations du mouvement

Afin d'obtenir un système écrit sous une forme qui facilite l'étude théorique, quelques notations sont introduites. Tout d'abord, l'échelle de temps est changée en passant de t à $t^* = \omega_1 t$ puis la notation " $\cdot$ " pour la dérivée par rapport au temps t^* est utilisée. En considérant ces notations, le système mécanique avec NES (3.2) prend la forme suivante :

$$\ddot{x}_1 + \eta_1 \dot{x}_1 + x_1 - \mu(1-a)^2 x_2 + \delta_1 x_1^3 - \mu \delta_2 x_2^3 + \eta_h(\dot{x}_1 - \dot{h}_1) + \alpha_1(x_1 - h_1) + \alpha(x_1 - h_1)^3 = 0 \quad (5.1a)$$

$$\epsilon \ddot{h}_1 + \eta_h(\dot{h}_1 - \dot{x}_1) + \alpha_1(h_1 - x_1) + \alpha(h_1 - x_1)^3 = 0 \quad (5.1b)$$

$$\ddot{x}_2 + \eta_2(1-a)\dot{x}_2 + (1-a)^2 x_2 + \mu x_1 + \mu \delta_1 x_1^3 + \delta_2 x_2^3 + \eta_h(\dot{x}_2 - \dot{h}_2) + \alpha_1(x_2 - h_2) + \alpha(x_2 - h_2)^3 = 0 \quad (5.1c)$$

$$\epsilon \ddot{h}_2 + \eta_h(\dot{h}_2 - \dot{x}_2) + \alpha_1(h_2 - x_2) + \alpha(h_2 - x_2)^3 = 0, \quad (5.1d)$$

avec $\omega_2/\omega_1 = 1 - a$, $\delta_1 = \varphi_1/\omega_1^2$, $\delta_2 = \varphi_2/\omega_1^2$, $\alpha_1 = \xi_h/\omega_1^2$ et $\alpha = \varphi_h/\omega_1^2$. De plus $\epsilon = m_h/m$ et $0 < \epsilon \ll 1$ en supposant que la masse du NES est très inférieures à celle du système primaire.

Nous supposons également que les paramètres $\eta_1, \eta_2, \mu, \delta_1, \delta_2, \eta_h, \alpha$ et a sont petits (c.-à-d. de l'ordre de grandeur de ϵ et donc $\eta_1, \eta_2, \mu, \delta_1, \delta_2, \eta_h, \alpha, a \sim O(\epsilon)$). De plus, comme la raideur linéaire du NES est censée être très inférieure à la raideur cubique, il est indiqué que $\alpha_1/\alpha \sim O(\epsilon^2)$.

Afin d'effectuer l'analyse asymptotique, les paramètres du système sont redimensionnés en tenant compte des hypothèses précédentes :

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\epsilon}; \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\delta_1}{\epsilon}; \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\epsilon}; \quad (5.2a)$$

$$\tilde{\eta}_h = \frac{\eta_h}{\epsilon}; \quad \tilde{\eta}_2 = \frac{\eta_2}{\epsilon}; \quad \tilde{\delta}_2 = \frac{\delta_2}{\epsilon}; \quad (5.2b)$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{\epsilon}; \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\epsilon}; \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\epsilon^3}, \quad (5.2c)$$

avec $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\mu}, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\eta}_h, \tilde{a}, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_1 \sim O(1)$.

En utilisant les paramètres redimensionnés (5.2), l'équation (5.1) devient :

$$\ddot{x}\tilde{\eta}_1 + \epsilon\tilde{\eta}_1\dot{x}_1 + x_1 - \epsilon\tilde{\mu}(1 - \epsilon\tilde{a})^2x_2 + \epsilon\tilde{\delta}_1x_1^3 - \epsilon^2\tilde{\mu}\tilde{\delta}_2x_2^3 + \epsilon\tilde{\eta}_h(\dot{x}_1 - \dot{h}_1) + \epsilon^3\tilde{\alpha}_1(x_1 - h_1) + \epsilon\tilde{\alpha}(x_1 - h_1)^3 = 0 \quad (5.3a)$$

$$\ddot{h}_1 + \tilde{\eta}_h(\dot{h}_1 - \dot{x}_1) + \epsilon^2\tilde{\alpha}_1(h_1 - x_1) + \tilde{\alpha}(h_1 - x_1)^3 = 0 \quad (5.3b)$$

$$\ddot{x}_2 + \epsilon\tilde{\eta}_2(1 - \epsilon\tilde{a})\dot{x}_2 + (1 - \epsilon\tilde{a})^2x_2 + \epsilon\tilde{\mu}x_1 + \epsilon^2\tilde{\mu}\tilde{\delta}_1x_1^3 + \epsilon\tilde{\delta}_2x_2^3 + \epsilon\tilde{\eta}_h(\dot{x}_2 - \dot{h}_2) + \epsilon^3\tilde{\alpha}_1(x_2 - h_2) + \epsilon\tilde{\alpha}(x_2 - h_2)^3 = 0 \quad (5.3c)$$

$$\ddot{h}_2 + \tilde{\eta}_h(\dot{h}_2 - \dot{x}_2) + \epsilon^2\tilde{\alpha}_1(h_2 - x_2) + \tilde{\alpha}(h_2 - x_2)^3 = 0. \quad (5.3d)$$

Dans la suite l'analyse asymptotique de (5.3) est effectuée.

5.2.2 Calcul du flot lent

La dynamique lente ou flot lent de (5.3) est calculée dans cette section. Pour cela une méthode de moyennage appelée **méthode de complexification-moyennage** (ou en anglais « *Complexification-Averaging method* » (CA-X)) est utilisée. Cette méthode a été introduite par Manevitch [91] puis discutée en détail dans l'ouvrage [153].

Tout d'abord, pour simplifier les calculs suivants, il convient d'introduire les coordonnées barycentriques $u_i(t)$ et $v_i(t)$ (avec $i = 1, 2$) par le changement de variables suivant :

$$u_1 = x_1 + \epsilon h_1, \quad v_1 = x_1 - h_1, \quad (5.4)$$

$$u_2 = x_2 + \epsilon h_2, \quad v_2 = x_2 - h_2, \quad (5.5)$$

et réciproquement,

$$x_1 = \frac{u_1 + \epsilon v_1}{\epsilon + 1}, \quad h_1 = \frac{u_1 - v_1}{\epsilon + 1}, \quad (5.6)$$

$$x_2 = \frac{u_2 + \epsilon v_2}{\epsilon + 1}, \quad h_2 = \frac{u_2 - v_2}{\epsilon + 1}. \quad (5.7)$$

En utilisant les équations (5.4-5.7), l'équation (5.3) est écrite comme suit

$$\ddot{u}_1 + \frac{\tilde{\eta}_1\epsilon(\dot{u}_1 + \epsilon\dot{v}_1)}{\epsilon + 1} + \frac{u_1 + \epsilon v_1}{\epsilon + 1} - \frac{\epsilon\tilde{\mu}(\tilde{a}\epsilon - 1)^2(u_2 + \epsilon v_2)}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon\tilde{\delta}_1(u_1 + \epsilon v_1)^3}{(\epsilon + 1)^3} - \frac{\epsilon^2\tilde{\delta}_2\tilde{\mu}(u_2 + \epsilon v_2)^3}{(\epsilon + 1)^3} = 0 \quad (5.8a)$$

$$\ddot{v}_1 + \epsilon^2\tilde{\alpha}_1(1 + \epsilon)v_1 + \frac{\tilde{\eta}_1\epsilon(\dot{u}_1 + \epsilon\dot{v}_1)}{\epsilon + 1} + \frac{u_1 + \epsilon v_1}{\epsilon + 1} - \frac{\epsilon\tilde{\mu}(\tilde{a}\epsilon - 1)^2(u_2 + \epsilon v_2)}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon\tilde{\delta}_1(u_1 + \epsilon v_1)^3}{(\epsilon + 1)^3} - \frac{\epsilon^2\tilde{\delta}_2\tilde{\mu}(u_2 + \epsilon v_2)^3}{(\epsilon + 1)^3} = 0 \quad (5.8b)$$

$$\ddot{u}_2 - \frac{\tilde{\eta}_2\epsilon(\tilde{a}\epsilon - 1)(\dot{u}_2 + \epsilon\dot{v}_2)}{\epsilon + 1} + \frac{(\tilde{a}\epsilon - 1)^2(u_2 + \epsilon v_2)}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon\tilde{\mu}(u_1 + \epsilon v_1)}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon\tilde{\delta}_2(u_2 + \epsilon v_2)^3}{(\epsilon + 1)^3} + \frac{\epsilon^2\tilde{\delta}_1\tilde{\mu}(u_1 + \epsilon v_1)^3}{(\epsilon + 1)^3} = 0 \quad (5.8c)$$

$$\ddot{v}_2 + \epsilon^2\tilde{\alpha}_1(1 + \epsilon)v_2 - \frac{\tilde{\eta}_2\epsilon(\tilde{a}\epsilon - 1)(\dot{u}_2 + \epsilon\dot{v}_2)}{\epsilon + 1} + \frac{(\tilde{a}\epsilon - 1)^2(u_2 + \epsilon v_2)}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon\tilde{\mu}(u_1 + \epsilon v_1)}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon\tilde{\delta}_2(u_2 + \epsilon v_2)^3}{(\epsilon + 1)^3} + \frac{\epsilon^2\tilde{\delta}_1\tilde{\mu}(u_1 + \epsilon v_1)^3}{(\epsilon + 1)^3} = 0. \quad (5.8d)$$

La complexification consiste à introduire les variables complexes suivantes :

$$\psi_1 = \dot{u}_1 + j\omega_{st}u_1, \quad \psi_2 = \dot{v}_1 + j\omega_{st}v_1, \quad (5.9a)$$

$$\psi_3 = \dot{u}_2 + j\omega_{st}u_2, \quad \psi_4 = \dot{v}_2 + j\omega_{st}v_2. \quad (5.9b)$$

où $j^2 = -1$ et ω_{st} est la pulsation pour laquelle la réponse du système en régime permanent est supposée osciller. Ici, $\omega_{st} = 1$.

Ensuite, les variables u_1, v_1, u_2, v_2 et leurs première et deuxième dérivées par rapport au temps t^* sont exprimées en fonction des variables complexes ψ_i (avec $i \in [1, 4]$) :

$$u_1 = \frac{\psi_1 - \bar{\psi}_1}{2j}, \quad u_2 = \frac{\psi_3 - \bar{\psi}_3}{2j}, \quad (5.10a)$$

$$\dot{u}_1 = \frac{\psi_1 + \bar{\psi}_1}{2}, \quad \dot{u}_2 = \frac{\psi_3 + \bar{\psi}_3}{2}, \quad (5.10b)$$

$$\ddot{u}_1 = \dot{\psi}_1 - \frac{j}{2}(\psi_1 + \bar{\psi}_1), \quad \ddot{u}_2 = \dot{\psi}_3 - \frac{j}{2}(\psi_3 + \bar{\psi}_3), \quad (5.10c)$$

$$v_1 = \frac{\psi_2 - \bar{\psi}_2}{2j}, \quad v_2 = \frac{\psi_4 - \bar{\psi}_4}{2j}, \quad (5.10d)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{\psi_2 + \bar{\psi}_2}{2}, \quad \dot{v}_2 = \frac{\psi_4 + \bar{\psi}_4}{2}, \quad (5.10e)$$

$$\ddot{v}_1 = \dot{\psi}_2 - \frac{j}{2}(\psi_2 + \bar{\psi}_2), \quad \ddot{v}_2 = \dot{\psi}_4 - \frac{j}{2}(\psi_4 + \bar{\psi}_4), \quad (5.10f)$$

où $\bar{\psi}_i$ est le complexe conjugué de ψ_i .

Les variables u_1, v_1, u_2 et v_2 peuvent être décomposées en une composante rapide et une composante lente. Pour cela, la représentation suivante est introduite

$$\psi_1 = \phi_1 e^{jt^*}, \quad \psi_2 = \phi_2 e^{jt^*}, \quad (5.11a)$$

$$\psi_3 = \phi_3 e^{jt^*}, \quad \psi_4 = \phi_4 e^{jt^*}, \quad (5.11b)$$

où ϕ_i (avec $i \in [1, 4]$) est l'amplitude complexe (lentement variable) de la composante e^{jt^*} oscillant rapidement à la pulsation $\omega_{st} = 1$.

En substituant les équations (5.10) dans (5.8) on obtient un système d'équations différentielles complexes équivalent au système initial (5.3). Ensuite, en utilisant la représentation (5.11) et en moyennant sur une période égale à 2π , on obtient un système d'équations décrivant le comportement des amplitudes complexes lentes ϕ_i (avec $i \in [1, 4]$). Enfin, puisque $0 \ll \epsilon \ll 1$, un développement

limité au premier ordre de ces équations autour de $\epsilon = 0$ est effectué ce qui donne finalement :

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1}{2}j\epsilon \left(\phi_1 \left(\frac{-3\tilde{\delta}_1 |\phi_1|^2}{4} - j\tilde{\eta}_1 + 1 \right) + \phi_3 \tilde{\mu} - \phi_2 \right) \quad (5.12a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = \frac{1}{2}j \left(\frac{3\tilde{\alpha}\phi_2 |\phi_2|^2}{4} + \phi_1 - \phi_2(1 - j\tilde{\eta}_h) \right) + \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{3j\tilde{\alpha}\phi_2 |\phi_2|^2 + 3j\phi_1 \tilde{\delta}_1 |\phi_1|^2}{4} \right. \\ \left. + \phi_1(\tilde{\eta}_1 - j) - \phi_2(\tilde{\eta}_h - 1) - j\phi_3 \tilde{\mu} \right) \end{aligned} \quad (5.12b)$$

$$\dot{\phi}_3 = \frac{1}{2}j\epsilon \left(\phi_3 \left(\frac{3\tilde{\delta}_2 |\phi_3|^2}{4} + j\tilde{\eta}_1 - 2\tilde{a} \right) + \phi_1 \tilde{\mu} + \phi_4 \right) \quad (5.12c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_4 = \frac{1}{2}j \left(\frac{3\tilde{\alpha}\phi_4 |\phi_4|^2}{4} + \phi_3 - \phi_4(1 - j\tilde{\eta}_h) \right) + \frac{1}{2}j\epsilon \left(\frac{3\tilde{\alpha}\phi_4 |\phi_4|^2 + 3\phi_3 \tilde{\delta}_2 |\phi_3|^2}{4} \right. \\ \left. + \phi_1 \tilde{\mu} - \phi_3(1 + 2\tilde{a} - j\tilde{\eta}_2) + \phi_4(1 + j\tilde{\eta}_h) \right). \end{aligned} \quad (5.12d)$$

L'équation (5.12) décrit la *forme complexe du flot lent* du système (5.8), sa variété critique est calculée dans la section suivante.

5.2.3 Calcul de la variété critique

Le flot lent décrit par l'équation (5.12) peut être écrit comme suit :

$$\dot{\phi}_1 = \epsilon f_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad (5.13a)$$

$$\dot{\phi}_2 = f_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \epsilon) \quad (5.13b)$$

$$\dot{\phi}_3 = \epsilon f_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad (5.13c)$$

$$\dot{\phi}_4 = f_4(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \epsilon), \quad (5.13d)$$

qui met en évidence la nature « lente/rapide » du système. Ici, la terminologie introduite par Gendelman et Bar [47] est préférée, c'est-à-dire que les termes *rapide* et *lent* sont remplacés respectivement par les termes *lent* et *super-lent*, le terme *rapide* étant réservé pour désigner l'échelle de temps correspondant aux oscillations rapides du terme e^{jt^*} . Par conséquent, le système (5.13) se compose de deux variables complexes *super-lentes* ϕ_1 et ϕ_3 car leur dérivée temporelle est de l'ordre de ϵ et deux variables *lentes* ϕ_2 et ϕ_4 car leur dérivée temporelle est de l'ordre de 1.

De façon totalement équivalente, l'équation (5.13) peut être reformulée en passant de l'échelle de temps *lente* t^* à l'échelle de temps *super-lente* $\tau = \epsilon t^*$, ce qui donne :

$$\Phi'_1 = f_1(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) \quad (5.14a)$$

$$\epsilon \Phi'_2 = f_2(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \epsilon) \quad (5.14b)$$

$$\Phi'_3 = f_3(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) \quad (5.14c)$$

$$\epsilon \Phi'_4 = f_4(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \epsilon), \quad (5.14d)$$

où $' = \frac{d}{d\tau}$ et $\Phi_i(\tau) = \phi_i(t = \frac{\tau}{\epsilon})$. Les solutions du système super-lent/lent (5.13) (et (5.14)) peuvent présenter des périodes lentes et super-lentes caractérisées par la vitesse à laquelle la solution évolue dans le temps. S'il est impossible d'obtenir la solution analytique globale du système, il est en revanche possible de décrire séparément les périodes lentes et super-lentes par une approche aux échelles de temps multiples. En général c'est la *méthodes des échelles multiples* de Nayfeh [101] mais

dans [11] c'est l'approche géométrique de la théorie des perturbations singulières [68] qui est utilisée.

Cette approche consiste à poser $\epsilon = 0$ dans (5.13) et (5.14), ce qui conduit respectivement à :

$$\dot{\phi}_1 = 0 \quad (5.15a)$$

$$\dot{\phi}_2 = f_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, 0) \quad (5.15b)$$

$$\dot{\phi}_3 = 0 \quad (5.15c)$$

$$\dot{\phi}_4 = f_4(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, 0), \quad (5.15d)$$

qui est le *sous système lent*, et

$$\Phi'_1 = f_1(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) \quad (5.16a)$$

$$0 = f_2(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, 0) \quad (5.16b)$$

$$\Phi'_3 = f_3(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) \quad (5.16c)$$

$$0 = f_4(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, 0), \quad (5.16d)$$

qui est le *sous système super-lent*. Ces deux sous systèmes ne sont pas équivalents (d'où la dénomination de *système singulièrement perturbé*). En effet, la solution du sous système (5.15) (resp. (5.16)) représente la solution asymptotique, quand ϵ tend vers zéro, de (5.13) (et (5.14)) pendant les périodes lentes (resp. super-lentes).

Le sous système super-lent est un système algébro-différentiel et les équations algébriques (5.16b) et (5.16d) définissent la variété critique *CM* pour «Critical Manifold» [68] du système. La CM est le sous-espace de $\mathbb{C}^4$ proche duquel évolue le système pendant les périodes super-lentes et se définit de la façon suivante :

$$CM := \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid \left\{ f_2(z_1, z_2, z_3, z_4, 0) = 0, f_4(z_1, z_2, z_3, z_4, 0) = 0 \right\} \right\}. \quad (5.17)$$

En regardant les équations (5.12b) et (5.12d), on voit que les fonctions $f_2(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, 0)$ et $f_4(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, 0)$ ont des expressions similaires. Après quelques étapes de calcul on montre que les équations (5.16b) et (5.16d) ont la forme équivalente suivante :

$$\Phi_1(\tau) = \Phi_2(\tau)F(|\Phi_2(\tau)|) \quad (5.18a)$$

$$\Phi_3(\tau) = \Phi_4(\tau)F(|\Phi_4(\tau)|), \quad (5.18b)$$

où la fonction complexe F est définie par

$$F(X) = F_R(X) + jF_I(X) = 1 - \frac{3\tilde{\alpha}}{4}X^2 - j\tilde{\eta}_h. \quad (5.19)$$

L'équation (5.19) montre que la fonction F dépend uniquement des paramètres du NES $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\eta}_h$. De plus, le fait que les équations (5.18a) et (5.18b) soient définies avec la même fonction est la conséquence directe de l'utilisation de deux NES identiques.

La prochaine étape consiste à écrire la CM dans l'espace des nombre réel. Pour ce faire, les coordonnées polaires suivantes :

$$\Phi_i(\tau) = N_i(\tau)e^{j\Theta_i(\tau)} \text{ for } i = 1, 2, 3, 4, \quad (5.20)$$

sont à nouveau introduites dans (5.18). Le module et l'argument de (5.18a) et (5.18b) sont ensuite

successivement calculés, ce qui conduit à :

$$N_1^2 = N_2^2 \left[F_R(N_2)^2 + F_I(N_2)^2 \right] = H(N_2) \quad (5.21a)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 + \arg(F(N_2)) \quad (5.21b)$$

$$N_3^2 = N_4^2 \left[F_R(N_4)^2 + F_I(N_4)^2 \right] = H(N_4) \quad (5.21c)$$

$$\Theta_3 = \Theta_4 + \arg(F(N_4)). \quad (5.21d)$$

Les extrema locaux Y_m et Y_M de la fonction réelle $H(X)$ sont donnés par les racines positives de sa dérivé $H'(X)$. Un calcul élémentaire montre que ces extrema ont pour abscisses respectives X_m et X_M dont les expression sont :

$$X_m = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{1 - 3\tilde{\eta}_h^2}}{\tilde{\alpha}}} \quad (5.22)$$

et

$$X_M = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{1 - 3\tilde{\eta}_h^2}}{\tilde{\alpha}}}. \quad (5.23)$$

Un exemple typique de CM (ou plus exactement de la fonction H qui représente la partie amplitude de la CM) est présenté en figure 5.1. La forme en S de la CM que nous observons sur la figure est une condition nécessaire pour obtenir la présence de SMR [143]. Dans le cas où $X_M < X_m$ cette forme en S est perdue et les SMR ne sont plus possible, cela se produit pour :

$$\tilde{\eta}_h < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5.24)$$

qui, en utilisant (5.2), devient :

$$\eta_h < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}. \quad (5.25)$$

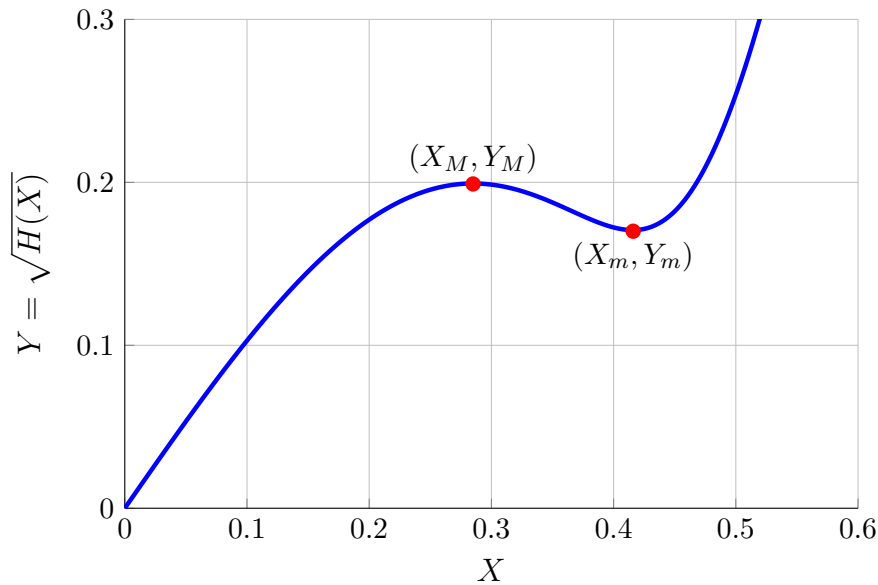


FIGURE 5.1 – Fonction $\sqrt{H(X)}$ qui représente la partie amplitude de la variété critique (cf. équation (5.21)).

5.3 Lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites

En général dans les travaux sur les NES on utilise des valeurs du coefficient d'atténuation des NES respectant la condition (5.25). Dans cette section nous montrons à l'aide de simulations numériques que même si cette condition n'est pas respectée l'atténuation des cycles limites est possible.

Dans notre étude, le rapport de masse entre le système mécanique frottant et le système mécanique avec NES est $\epsilon = 0.05$. La valeur maximale du coefficient d'amortissement du NES permettant l'existence de régime SMR est donc donnée par :

$$\eta_h < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}} = 0.029. \quad (5.26)$$

Une illustration de la CM pour quatre valeurs de η_h de part et d'autre de $\eta_h = 0.029$ est montrée en figure 5.2. La disparition des extrema locaux, et donc de la forme en S de la CM, est bien dans les cas où $\eta_h = 0.03$ et 0.035 quand (5.26) n'est plus respectée.

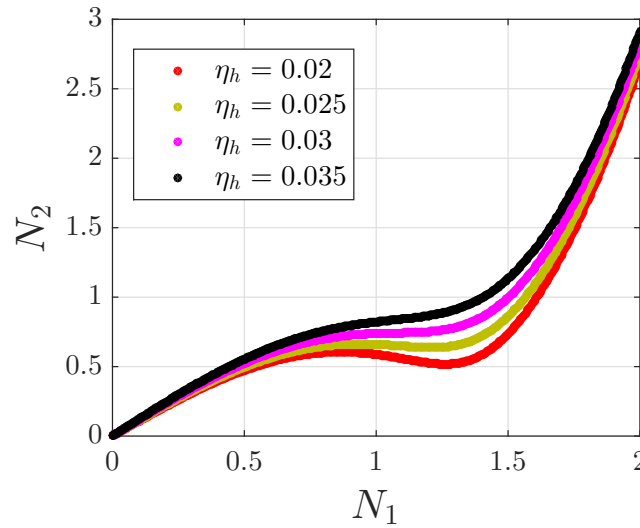


FIGURE 5.2 – Variété critique pour différentes valeurs de η_h et $\varphi_h = 15\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

La figure 5.3 montre en parallèle la CM (figure 5.3(a) et zoom en figure 5.3(b)) et le profil de l'amplitude A_1^{wNES} du système couplé (3.2) en fonction du coefficient de frottement μ (figure 5.3(b) et zoom en figure 5.3(d)). On observe que pour certaines valeurs de η_h supérieures à 0.029 la forme en S est effectivement perdue mais une discontinuité est tout de même observée dans le profil de A_1^{wNES} (signe de l'atténuation des cycles limite avant la discontinuité). C'est le cas pour $\eta_h = 0.036735$ (courbe bleue) et $\eta_h = 0.042857$ (courbe violette). On observe cependant que la hauteur de la discontinuité est plus faible pour les grandes valeurs de η_h .

Pour l'étude d'optimisation effectuée au chapitre 6, dans laquelle on rajoutera une condition sur la hauteur de la discontinuité plus contraignante qu'au chapitre 4, on supposera que la valeur optimale de coefficient d'amortissement η_h peut être supérieure à la valeur limite donnée par (5.26) mais pas trop éloignée pour conserver des hauteurs de discontinuité suffisamment grandes. En pratique nous prendrons $\eta_h \in [0, 0.04]$.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre il a été effectué une étude théorique du système étudié, constitué d'un système frottant instable couplé à deux absorbeurs non linéaires de type NES (le tout étant modélisé par le système d'équations différentielles (3.2)). Cette étude permet de trouver la valeur maximale du

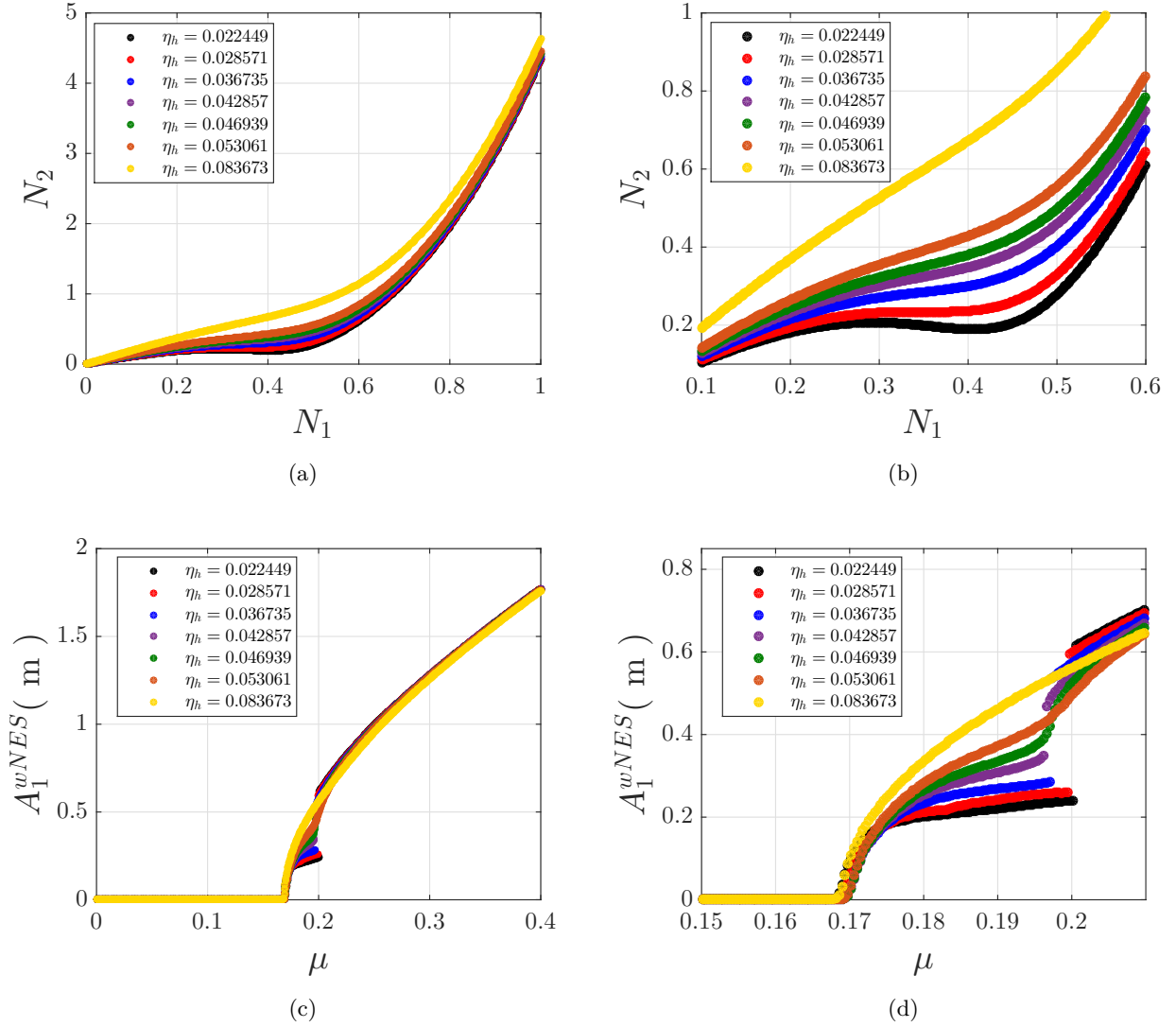


FIGURE 5.3 – Illustration de régime SMR en fonction de la variation de η_h . (a) Variété critique; (a) Zoom de variété critique; (c) A_1^{wNES} ; (d) Zoom de A_1^{wNES} .

coefficient d'amortissement η_h permettant l'existence de régimes SMR. Le lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites est étudiée à l'aide de simulations numériques du modèle. L'étude montre que même si la présence de SMR n'est pas possible (η_h est supérieure à la valeur limite) l'atténuation des cycles limites peut être observée ainsi qu'une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire. La hauteur de la discontinuité (qui renseigne sur l'efficacité de l'atténuation) est cependant plus faible pour les grandes valeurs de coefficient d'amortissement des NES. Par conséquent, pour l'étude d'optimisation effectuée au chapitre suivant, il va être supposé que la valeur optimale de coefficient d'amortissement η_h peut être supérieure à la valeur limite donnée par (5.26) (les résultats nous montreront que cela peut effectivement arriver) mais pas trop éloignée pour conserver des hauteurs de discontinuité suffisamment grandes.

Chapitre 6

Résultats de l'optimisation sous incertitudes des NES

Sommaire

6.1	Introduction	88
6.2	Méthodologie de l'optimisation sous incertitude	88
6.2.1	Variables de conceptions déterministes (cas P)	88
6.2.2	Variables de conception stochastiques (cas HP)	88
6.3	Nouveau critère de saut	89
6.4	Résultats de l'optimisation avec paramètres de conception déterministes	89
6.4.1	Optimisation du coefficient d'amortissement du NES η_h	90
6.4.2	Optimisation de la raideur non linéaire du NES φ_h	93
6.4.3	Optimisation du coefficient d'amortissement η_h et de la raideur non linéaire φ_h	98
6.5	Résultats de l'optimisation avec paramètres de conception stochastiques	103
6.5.1	Optimisation HP du coefficient d'amortissement η_h	103
6.5.2	Optimisation HP de la raideur non linéaire φ_h	105
6.6	Conclusion	107

6.1 Introduction

Ce chapitre présente l'optimisation sous incertitudes des paramètres des NES présents dans le système (3.2). Tout d'abord, la section 6.2 présente le formalisme d'optimisation adopté ; inspiré de la méthodologie proposée dans [14, 122]. Un nouveau critère de saut est ensuite défini en section 6.3. Finalement, les résultats de l'optimisation obtenue avec la méthode ME-gPC (décrite en section 4.2.2 de ce manuscrit) sont présentés et comparés à une optimisation robuste de références en sections 6.4 et 6.5.

6.2 Méthodologie de l'optimisation sous incertitude

Dans cette section nous présentons la méthodologie d'optimisation proposée par Missoum *et al.* [14, 122]. Le problème d'optimisation robuste du NES y est traité de deux manières différentes selon que les paramètres physiques de conception sont déterministes ou aléatoires.

Nous adaptons ici la méthode en basant le problème d'optimisation sur la maximisation de la propension du système à être dans un régime atténué (PHSSR) que nous avons définies au chapitre 3 de cette thèse. Nous considérons que les paramètres de conception à optimiser sont les paramètres des NES : η_h le taux d'amortissement et φ_h la raideur non linéaire ; et que seul le coefficient de frottement μ du système primaire est incertain.

6.2.1 Variables de conceptions déterministes (cas P)

Dans ce cas, les variables de conception du problème d'optimisation sont directement les paramètres physiques de conception dont on suppose qu'ils peuvent être connus de façon certaine. L'objectif de la méthode est de trouver les valeurs optimales des paramètres des NES en maximisant la valeur de la PHSSR. Pour cela, pour chaque valeur de $x_d \in [x_d^{(min)} x_d^{(max)}]$ la PHSSR est déterminée dans l'espace des paramètres incertains x_u . On détecte ensuite le maximum de la PHSSR qui correspond à la valeur optimale de x_d . Il est possible de résumer la méthode de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximiser} && \text{PHSSR} (A(x_d, x_u)) \\
 &\text{Sujet à} && x_d^{(min)} \leq x_d \leq x_d^{(max)} \\
 &\text{où} && x_d = \{\eta_h, \varphi_h\}, \\
 &&& x_u = \{\mu\}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

où :

- PHSSR est la propension du système à être dans un régime atténué, c'est le critère utilisé pour optimiser le système,
- $A(x_d, x_u)$ est l'amplitude de déplacement du système primaire couplé (3.2) définie par l'équation (3.11) (on écrit maintenant A et non A_1^{wNES} pour alléger les notations). Cette amplitude dépend à la fois des paramètres incertains x_u et des variables de conception x_d ,
- $x_d^{(min)}$ et $x_d^{(max)}$ sont respectivement les valeurs minimales et maximales des variables de conceptions x_d . Ce sont dans les intervalles $[x_d^{(min)} x_d^{(max)}]$, appelé **intervalles de conception**, que les valeurs optimales de paramètres de conceptions sont recherchées.

6.2.2 Variables de conception stochastiques (cas HP)

On considère ici que les paramètres physiques de conception sont aléatoires de loi de probabilité connue, ce qui se rapproche d'avantage d'une situation réelle, on sait notamment qu'il est presque impossible d'obtenir une valeur exacte d'un coefficient d'amortissement. Les paramètres à optimiser sont alors l'une des caractéristiques statistiques de ces paramètres (moyenne, variance...) et sont

appelés **hyperparamètres**. Dans cette étude les hyperparamètres considérés sont les moyennes $\hat{\eta}_h$ et $\hat{\varphi}_h$ du coefficient d'amortissement et de la raideur cubique des NES respectivement.

Le processus d'optimisation consiste à diviser l'espace de conception en sous-espaces. Dans chaque sous-espace un tirage de N valeurs des paramètres de conception est effectué selon leurs lois de probabilité (dans ce travail nous utilisons des lois uniformes). Pour chacune de ses valeurs la PHSSR est calculée et la valeur optimale de x_d (ici de $\hat{\eta}_h$ ou $\hat{\varphi}_h$) correspond au sous-espace où la moyenne des N valeur de la PHSSR est maximale. Cela peut résumer ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & \mathbf{E}[\text{PHSSR}(A(x_d, x_u))] \\ \text{Sujet à} \quad & x_d^{(min)} \leq x_d \leq x_d^{(max)} \\ \text{où} \quad & x_d = \{\hat{\eta}_h, \hat{\varphi}_h\}, \\ & x_u = \{\mu\} \end{aligned} \tag{6.2}$$

où :

- $\mathbf{E}$ est la valeur de l'espérance mathématique (la moyenne) de l'ensemble des évaluations de la PHSSR.
- $\hat{\eta}_h$ est la moyenne de l'ensemble des valeurs du coefficient d'amortissement du NES.
- $\hat{\varphi}_h$ est la moyenne de l'ensemble des valeurs de la raideur non linéaire du NES.

6.3 Nouveau critère de saut

Dans la partie I, la détection de la discontinuité était effectuée en comparant deux valeurs successives de l'amplitude des cycles limites du système mécanique avec NES (3.2) selon l'équation (4.1) avec un seuil $\alpha = 0.4$; ceci pouvant éventuellement permettre de détecter des discontinuités d'amplitude relativement faible. Cependant pour la valeur de la raideur cubique des NES φ_h utilisée, les sauts observés étaient toujours de grandes tailles. Autrement dit, nous n'observions pas de cas où la différence d'amplitude avant et après la discontinuité était juste supérieure à α .

Dans cette partie, l'une des variables de conception à optimiser est la raideur cubique des NES et des résultats numériques préliminaires ont montré que pour de faibles valeurs de φ_h des discontinuités correspondant à une faible différence d'amplitude avant et après la discontinuité étaient observées. Dans ce cas la notion d'atténuation étant discutable, nous avons donc décidé, pour effectuer l'optimisation des NES, de définir un nouveau critère définissant la discontinuité, appelé Critère de Saut (CS). Pour être considéré comme un saut la différence entre deux valeurs d'amplitude doit maintenant être au moins égale à la moitié de la plus petite des deux valeurs d'amplitude, soit :

$$\text{CS} = \frac{|A_{ap} - A_{av}|}{A_{av}} \geq 0.5 \tag{6.3}$$

où A_{ap}^{wNES} représente l'amplitude du système mécanique avec NES (3.2) avant le saut et A_{av}^{wNES} est celle après le saut. Le critère (6.3) a aussi l'avantage d'être un critère relatif et non un critère absolu comme c'est le cas dans (4.1).

6.4 Résultats de l'optimisation avec paramètres de conception déterministes

La première méthode de l'optimisation du NES considère que les paramètres des NES sont déterministes et sont donc directement les variables de conception à optimiser.

6.4.1 Optimisation du coefficient d'amortissement du NES η_h

Dans cette section l'espace de conception est un espace à une dimension selon la variable η_h et représenté par l'intervalle $[0, 0.04]$. Le problème de l'optimisation (6.1) est danc résolu avec $x_d = \eta_h \in [0, 0.04]$. Les résultats sont exprimés en terme de coût de calcul, d'une part, et en termes de précision par rapport à la méthode de référence, d'autre part. À cette fin, les quantités suivantes sont introduites :

- $\mu_{ml}^{\max}$: valeur maximale de la limite d'atténuation μ_{ml} correspondant donc à la valeur maximale de la propension à être dans un régime atténué, notée $\text{PHSSR}^{\max}$. La valeur de la PHSSR maximale estimée par la méthode basée sur le ME-gPC est déterminée en utilisant les bornes supérieures des derniers intervalles trouvés par l'algorithme présenté dans la figure 4.5. La valeur est indiquée $\mu_{ml}^{\max}$ avec sa précision comme suit :

$$\mu_{ml}^{\max} \pm \frac{\Delta\mu}{\mu_{ml}^{\max}}. \quad (6.4)$$

Comme à chaque fois nous chercherons la limite d'atténuation dans l'intervalle $\mu \in [0, 0.4]$ on a pour la référence $\Delta\mu = 0.4/N$ avec N le diviseur de l'intervalle $[0, 0.4]$ et pour la méthode ME-gPC $\Delta\mu = 0.4\theta_2$ où θ_2 est défini à l'équation (4.4).

- $E_{\text{PHSSR}^{\max}}$: erreur relative de la PHSSR maximale obtenue avec la méthode basée sur le ME-gPC ($\text{PHSSR}_{\text{ME-gPC}}^{\max}$) par rapport à la PHSSR maximale obtenue avec la méthode de référence ($\text{PHSSR}_{\text{référence}}^{\max}$), elle est définie comme suit :

$$E_{\text{PHSSR}^{\max}} = \frac{|\text{PHSSR}_{\text{ME-gPC}}^{\max} - \text{PHSSR}_{\text{référence}}^{\max}|}{\text{PHSSR}_{\text{référence}}^{\max}}. \quad (6.5)$$

- η_h^{opt} : valeur optimale du coefficient d'amortissement des NES, c.-à-d. la valeur pour laquelle $\mu_{ml}^{\max}$ (et donc $\text{PHSSR}^{\max}$) est obtenue. Comme l'espace de conception est discrétisée, la valeur optimale s'exprime comme le milieu η_h^{mid} de l'intervalle plus ou moins la distance relative avec les bornes inférieure et supérieure, notée η_h^{inf} et η_h^{sup} respectivement, ce qui donne :

$$\eta_h^{\text{opt}} = \eta_h^{\text{mid}} \pm \frac{\frac{\eta_h^{\text{sup}} - \eta_h^{\text{inf}}}{2}}{\eta_h^{\text{mid}}}. \quad (6.6)$$

- Err : erreur relative de la valeur de conception optimale η_h^{opt} , obtenue avec le méthode ME-gPC, par rapport à celle obtenue par la méthode de référence :

$$Err = \frac{|(\eta_h^{\text{mid}})_{\text{ME-gPC}} - (\eta_h^{\text{mid}})_{\text{référence}}|}{(\eta_h^{\text{mid}})_{\text{référence}}}. \quad (6.7)$$

6.4.1.1 Optimisation de référence

La valeur de référence de la valeur optimale du coefficient d'amortissement des NES, notée $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{référence}}$, est obtenue en résolvant (6.1) où l'amplitude $A(x_d, x_u)$ et donc la limite d'atténuation sont obtenues directement à partir de la simulation numérique de (3.2). Pour ce faire l'intervalle $[0, 0.04]$ est découpé en 50 sous-intervalles de largeurs égales. Pour gagner en temps de calcul, la limite d'atténuation μ_{ml} et la PHSSR sont d'abord calculées pour chacun des sous-intervalles de façon grossière en utilisant 1000 valeurs du coefficient de frottement (avec $\mu \in [0, 0.4]$) et en utilisant le critère (6.3). La figure 6.1 montre la variation de la PHSSR (figure 6.1(a)) et de la limite d'atténuation (figure 6.1(b)) en fonction de η_h . Cette première étape nous permet de localiser l'intervalle dans lequel se trouve la valeur optimale du paramètre de conception $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{référence}}$, il s'agit de $[0.0208, 0.028]$ où la PHSSR est maximale ($\text{PHSSR}^{\max} = 50.10\% \pm 0.19\%$) mais constante du fait de la discrétisation

trop grossière en μ . Afin d'affiner ce résultat de référence, la PHSSR est calculée dans l'intervalle $\eta_h \in [0.02, 0.03]$; le même pas de discrétisation est utilisé pour η_h mais avec cette fois 10 000 de μ sont utilisées pour déterminer la limite d'atténuation pour chaque sous-intervalle. Le nombre total de simulations nécessaire pour obtenir la référence est donc égal à $50 \times 1000 + 10 \times 10\,000 = 150\,000$.

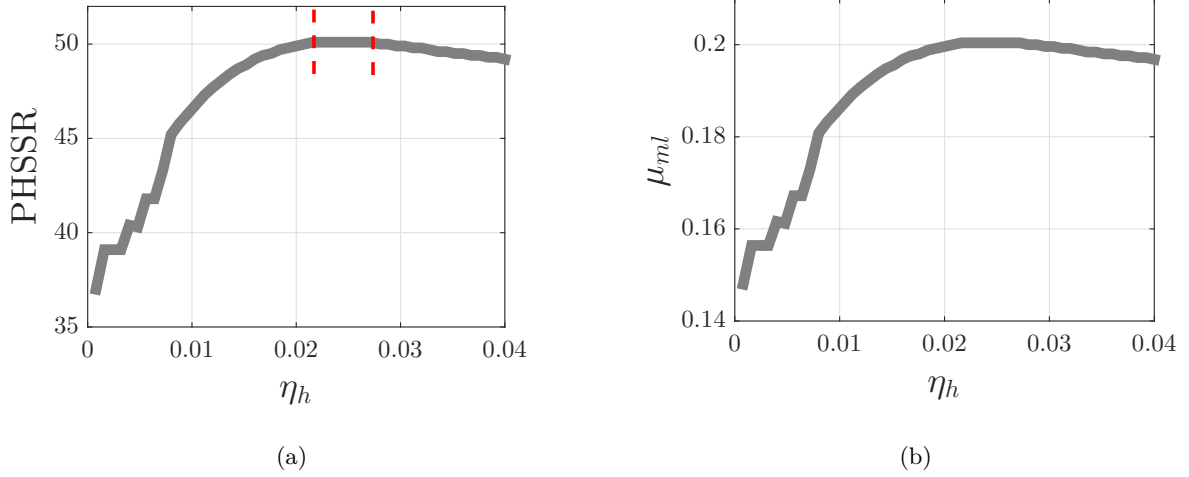


FIGURE 6.1 – Résultat de la première étape de l'optimisation de référence. (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h avec $\varphi_h = 140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

La figure 6.2 montre la nouvelle variation de la PHSSR (figure 6.2(a)) et la limite d'atténuation (figure 6.2(b)) en fonction de η_h . Dans ce cas, $(\mu_{ml}^{\max})_{\text{référence}} = 0,2004 \pm 0,02\%$ ce qui donne $(\text{PHSSR}^{\max})_{\text{référence}} = 50,1\% \pm 0,02\%$. La valeur de conception optimale du coefficient d'amortissement correspondante est $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{référence}} = 0,0240 \pm 3,33\%$.

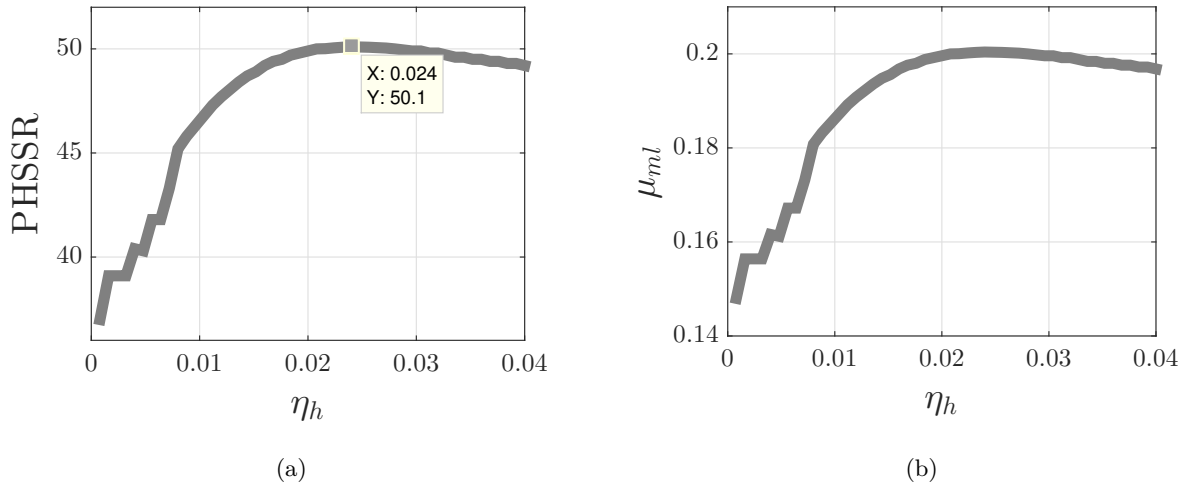


FIGURE 6.2 – Résultat de la seconde étape de l'optimisation de référence. (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h avec $\varphi_h = 140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

6.4.1.2 Optimisation avec la méthode ME-gPC

La valeur optimale du coefficient d'amortissement des NES, notée $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}}$, est obtenue en résolvant (6.1) où l'amplitude $A(x_d, x_u)$ et donc la limite d'atténuation sont cette fois déterminées

par la méthode basée sur le ME-gPC décrite au chapitre 4 de ce document.

Les résultats de l'optimisation avec cette méthode ainsi que la comparaison avec les résultats obtenus par la référence sont présentés au tableau 6.1. L'ordre du gPC est $p = 1$, le seuil sur la variance est $\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ et trois valeur du seuil sur la taille des éléments sont utilisés : $\theta_2 = 1\%$, 0.1% et 0.001% .

	Nb de simulations	Temps de calcul	$\mu_{ml}^{\max}$	$PHSSR^{\max}$	$E_{PHSSR^{\max}}$	η_h^{opt}	Err
Référence	150 000	2.15 jours	$0.2004 \pm 0.02\%$	$50.10\% \pm 0.02\%$	–	$0.0240 \pm 3.33\%$	–
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	4324	1.70 heures	$0.2031 \pm 1.97\%$	$50.78\% \pm 1.97\%$	1.35%	$[0.0204, 0.0277] = 0.0241 \pm 15.14\%$	0.41%
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.1\%$)	5165	2.06 heures	$0.2004 \pm 0.2\%$	$50.09\% \pm 0.2\%$	0.02%	$[0.0204, 0.0277] = 0.0241 \pm 15.14\%$	0.41%
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.001\%$)	7026	3.23 heures	$0.2004 \pm 0.02\%$	$50.09\% \pm 0.02\%$	0.02%	$0.0237 \pm 3.33\%$	1.25%

TABEAU 6.1 – Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est η_h .

Les figures 6.3(a) et 6.3(b) montrent respectivement la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de η_h avec $\theta_2 = 1\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 4324. La valeur optimale est $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 0.0241 \pm 15.14\%$. La valeur maximale de la PHSSR correspondante est 50.10% avec une erreur par rapport la référence $E_{PHSSR^{\max}} = 1.35\%$.

Les figures 6.4(a) et 6.4(b) montrent respectivement la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de η_h avec $\theta_2 = 0.1\%$. Bien que dans ce cas la nouvelle valeur de θ_2 n'a pas d'influence sur η_h^{opt} , il introduit par contre un changement de la valeur maximale de la limite d'atténuation qui devient $(\mu_{ml}^{\max})_{\text{ME-gPC}} = 0.2004$. $PHSSR_{\text{ME-gPC}}^{\max} = 50.09\%$ qui implique $E_{PHSSR^{\max}} = 0.02\%$ par rapport la référence. Cette erreur est inférieure à celle dans le cas où $\theta_2 = 1\%$ mais le nombre de simulations augmente et devient égal à 5165.

Les figures 6.5(a) et 6.5(b) montrent respectivement la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de η_h avec $\theta_2 = 0.001\%$. Dans ce cas on a $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 0.0237 \pm 3.33\%$ ce qui implique une erreur relative $Err = 1.25\%$ par rapport la référence qui augmente donc par rapport aux cas précédents. Ceci n'est pas illogique puisque que l'erreur est calculée en fonction des milieux des intervalles. Le nombre total de simulations est égal à 7026, un nombre 22 fois plus petit que celui nécessaire avec la référence.

Les plateaux observés dans les figures précédentes sont dus au fait que pour deux valeurs proches de η_h la limite d'atténuation est observé dans le même élément. Ceci est donc lié à la valeur du seuil θ_2 , plus il est faible plus nous pouvons localiser finement la limite d'atténuation, avec en contre partie une augmentation du coût de calcul. L'effet de la diminution de θ_2 s'observe plus facilement sur la figure 6.6 qui superpose toutes courbes précédentes.

Finalement, avec un coût de calcul beaucoup plus faible que la référence, la méthode proposée permet d'identifier la valeur du coefficient d'amortissement du NES optimale en tenant compte de la dispersion du coefficient de frottement.

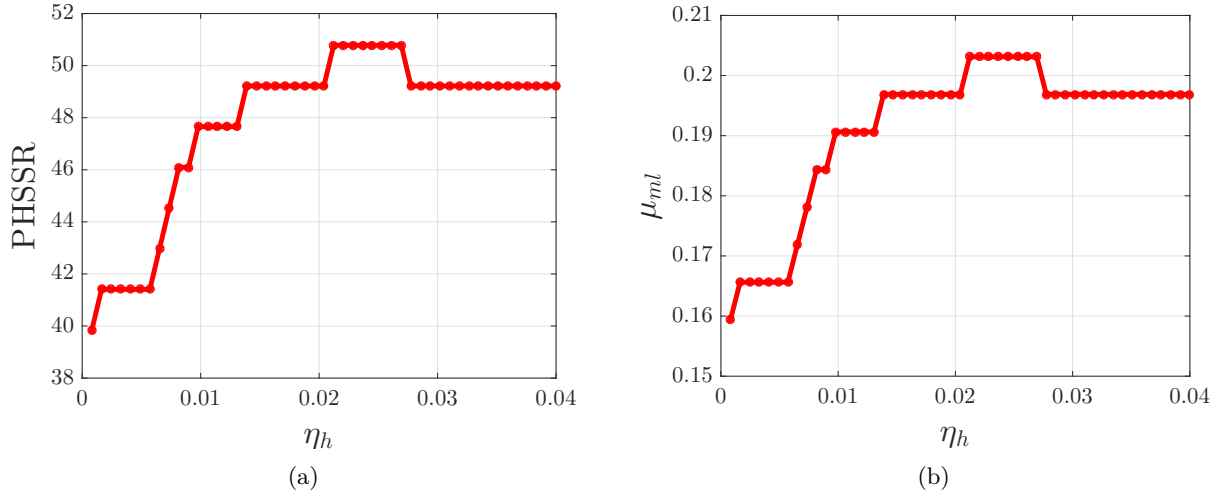


FIGURE 6.3 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h pour $\theta_2 = 1\%$, $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode ME-gPC.

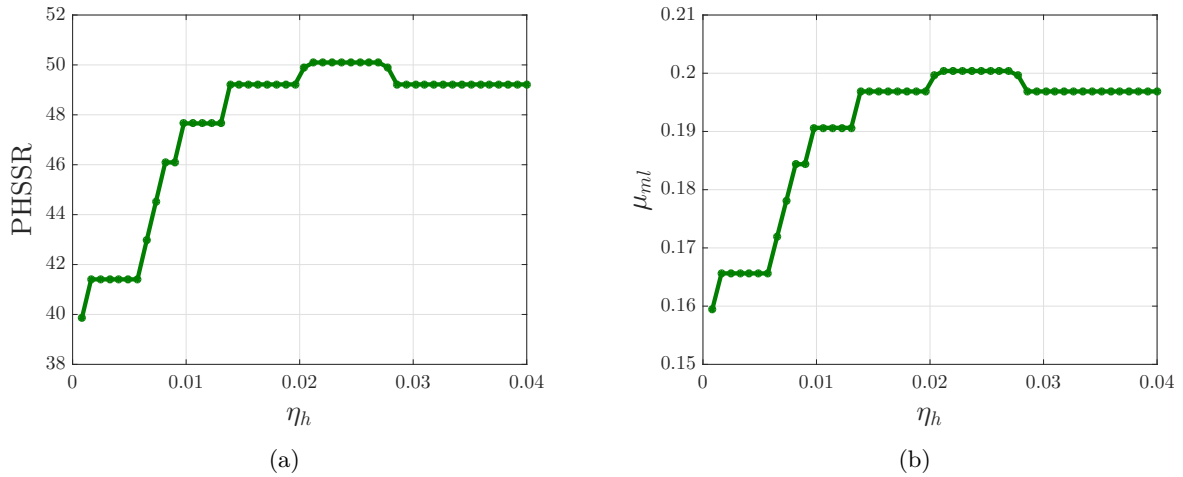


FIGURE 6.4 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h pour $\theta_2 = 0.1\%$, $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode ME-gPC.

6.4.2 Optimisation de la raideur non linéaire du NES φ_h

Le but est ici de trouver la valeur optimale de la raideur cubique des NES φ_h supposée ici déterministe. Pour cela les critères suivants sont définis :

- φ_h^{opt} : valeur optimale de la raideur cubique des NES pour laquelle μ_{ml}^{max} (et donc $\text{PHSSR}^{\text{max}}$) est obtenue. Comme précédemment, l'espace de conception étant discrétisée, la valeur optimale s'exprime comme le milieu φ_h^{mid} de l'intervalle plus ou moins la distance relative avec les bornes inférieure et supérieure, notée φ_h^{inf} et φ_h^{sup} respectivement, ce qui donne :

$$\varphi_h^{\text{opt}} = \varphi_h^{\text{mid}} \pm \frac{\frac{\varphi_h^{\text{sup}} - \varphi_h^{\text{inf}}}{2}}{\varphi_h^{\text{mid}}}. \quad (6.8)$$

- Err : erreur relative de la valeur de conception optimale φ_h^{opt} , obtenue avec le méthode ME-

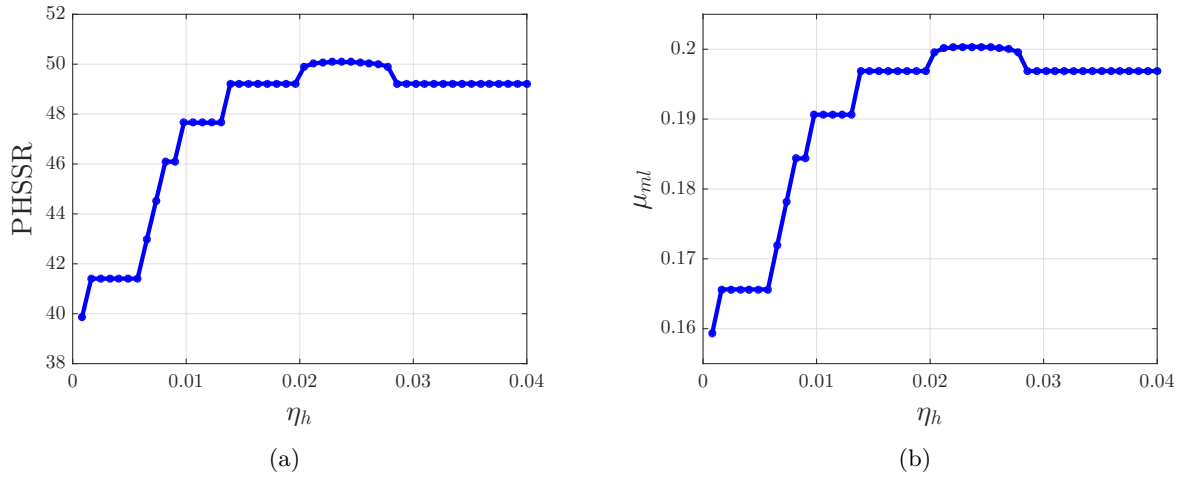


FIGURE 6.5 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h pour $\theta_2 = 0.001\%$, $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode ME-gPC.

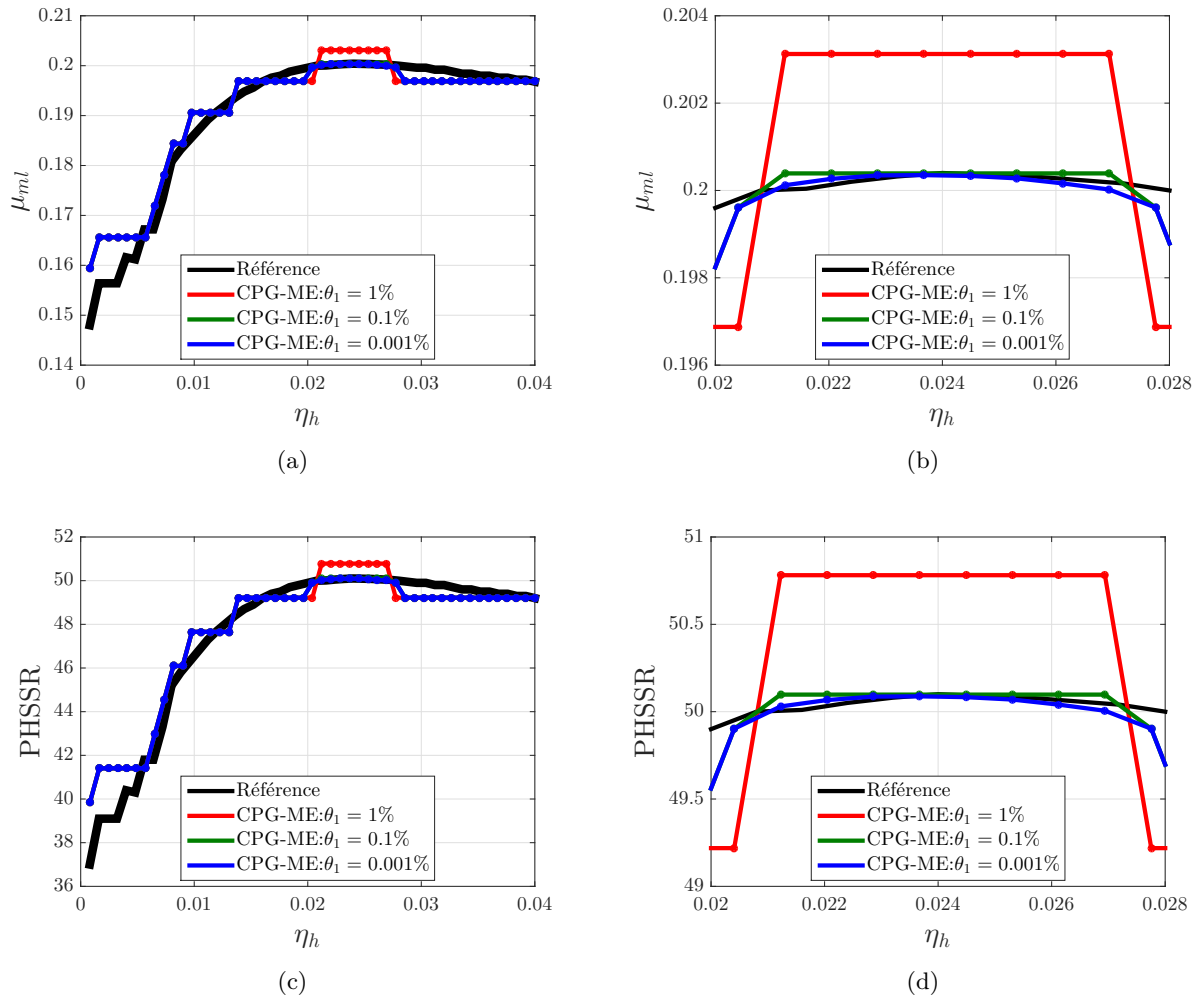


FIGURE 6.6 – Comparaison entre les stratégies d'optimisations de référence et ME-gPC de $\eta_h \in [0\,0.04]$ avec $\varphi_h = 140\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. (a) μ_{ml} ; (b) Zoom de μ_{ml} ; (c) PHSSR; (d) Zoom de la PHSSR.

gPC, par rapport à celle obtenue par la méthode de référence :

$$Err = \frac{|(\varphi_h^{\text{mid}})_{\text{ME-gPC}} - (\varphi_h^{\text{mid}})_{\text{référence}}|}{(\varphi_h^{\text{mid}})_{\text{référence}}}. \quad (6.9)$$

6.4.2.1 Optimisation de référence

Nous suivons une stratégie similaire à celle de la section précédente avec maintenant un coefficient d'amortissement η_h fixé à 0.024 et une raideur cubique du NES φ_h variable que l'on souhaite optimiser. Dans un premier temps, pour ce faire une idée de l'intervalle de conception, une première série de simulations est effectuée avec $\varphi_h \in [0, 900\,000]$ N·kg⁻¹·m⁻³, la figure 6.7 en montre les résultats. On observe que la limite d'atténuation décroît de façon monotone avec la raideur cubique. La valeur optimale est donc la plus faible valeur de φ_h pour laquelle le critère de saut (6.3) est respecté.

Pour l'étude, on choisit un intervalle de conception $\varphi_h \in [0, 150\,000]$ N·kg⁻¹·m⁻³ que l'on divise en 100 sous-intervalles de largeurs égales et la limite d'atténuation est calculée pour chaque sous-intervalle directement à partir du modèle (3.2) en utilisant 1000 valeurs de μ , toujours dans l'intervalle $[0, 0.4]$. Le nombre de simulations est donc égal à $100 \times 1000 = 100\,000$.

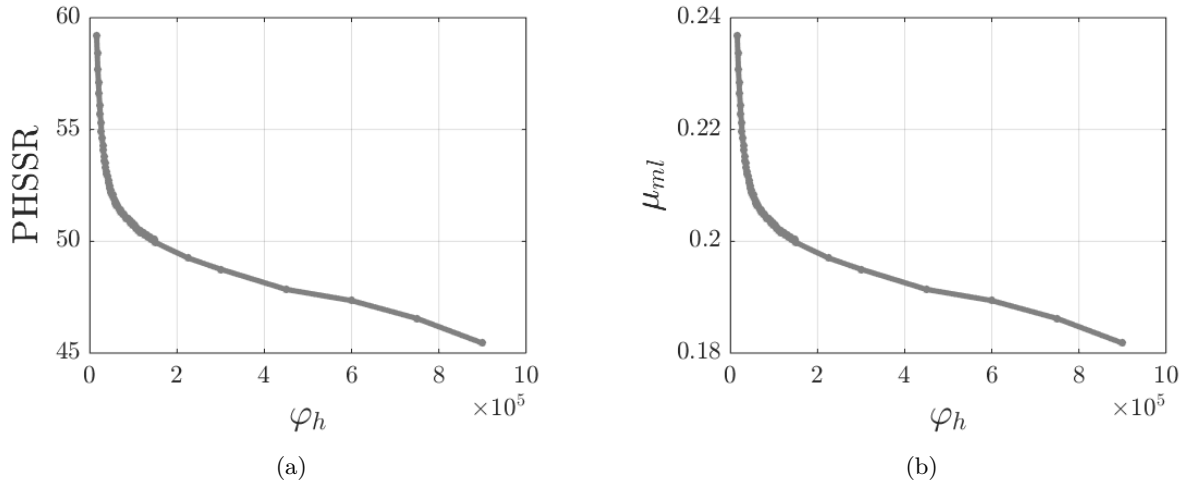


FIGURE 6.7 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0\,900\,000]$ N·kg⁻¹·m⁻³. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode de référence.

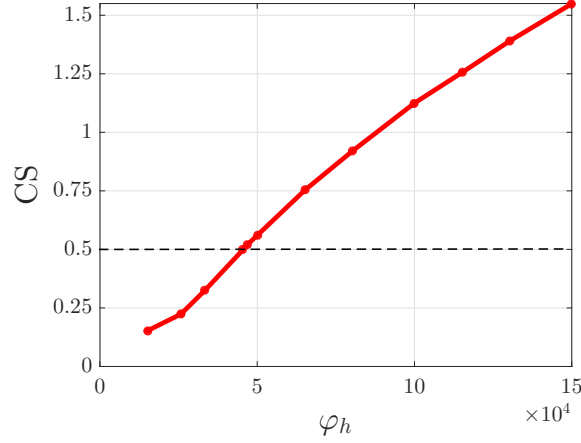
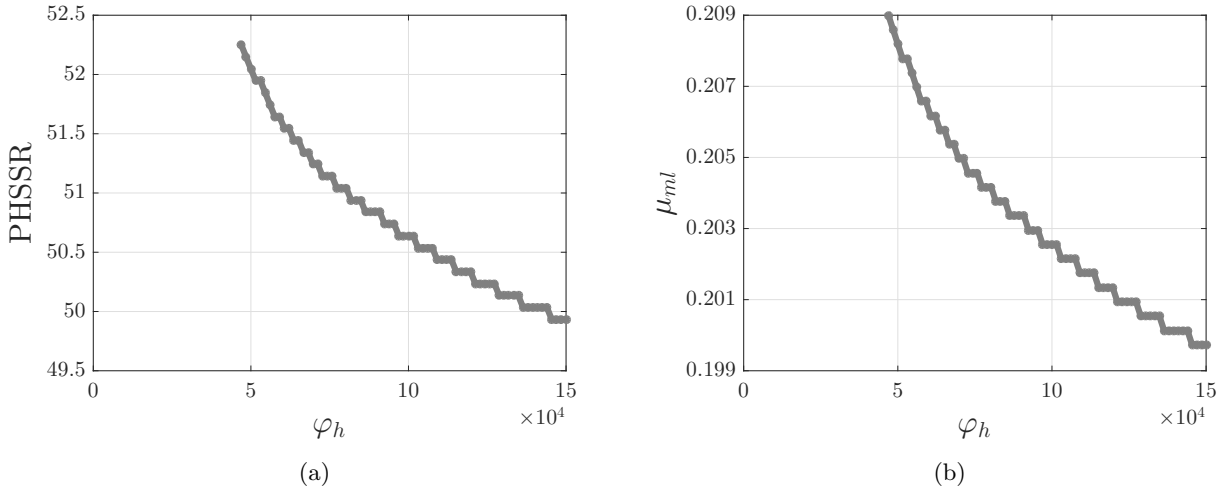
La figure 6.8 montre l'évolution du critère de saut CS (6.3) en fonction de φ_h . On peut voir que pour de faibles valeurs de φ_h ($\varphi_h \in [0\,46\,970]$ N·kg⁻¹·m⁻³) un saut existe mais, comme dit précédemment, nous estimons que la différence entre les amplitudes des cycles limites avant et après le saut est trop faible pour que les régimes concernés puissent être qualifiés d'atténués. La valeur optimale est donc ici $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{référence}} = 46\,970 \pm 3.22\%$ N·kg⁻¹·m⁻³, ce qui correspond à $\text{PHSSR}^{\text{max}} = 52.25\% \pm 0.19\%$.

La figure 6.9 montre la variation de la PHSSR (figure 6.9(a)) et de la limite d'atténuation (figure 6.9(b)) en fonction de φ_h .

6.4.2.2 Optimisation avec la méthode ME-gPC

La valeur optimale du coefficient de la raideur cubique des NES, notée $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}}$, est encore une fois obtenue en résolvant (6.1) où l'amplitude $A(x_d, x_u)$ et donc la limite d'atténuation sont déterminées par la méthode basée sur le ME-gPC décrite au chapitre 4 de ce document.

Les résultats de l'optimisation avec cette méthode ainsi que la comparaison avec les résultats obtenus par la référence sont présentés au tableau 6.2. Comme dans la section précédente, l'ordre du


 FIGURE 6.8 – Évolution du critère de saut CS en fonction de φ_h .

 FIGURE 6.9 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0, 150\,000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les limites d'atténuation sont déterminées à l'aide de la méthode de référence.

gPC est $p = 1$. Comme décrit en section 4.2.2.1, la limite d'atténuation est approchée par la borne supérieure du dernier élément trouvé. Comme pour la référence les valeurs de φ_h sont prises dans $[0, 150\,000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ que l'on divise en 100 sous-intervalles de largeurs égales.

La figure 6.10 montre la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de φ_h avec $\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}\%$ et $\theta_2 = 1\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 6652. La valeur optimale est $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 33\,333 \pm 4.5\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err = 29.03\%$. La valeur maximale de la PHSSR est $\text{PHSSR}^{\text{max}} = 53.90\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{\text{PHSSR}^{\text{max}}} = 3.15\%$.

Afin de diminuer ces erreurs, les valeurs des seuils θ_1 et θ_2 sont changées comme indiqué dans le tableau 6.2.

La figure 6.11 montre la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de φ_h avec $\theta_1 = 4.2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 5817. La valeur maximale de la PHSSR est égale à $\text{PHSSR}^{\text{max}} = 53.13\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{\text{PHSSR}^{\text{max}}} = 1.68\%$. La valeur optimale de φ_h est $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 39\,394 \pm 3.4\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err = 22.51\%$. Ces résultats sont meilleurs, en termes de coût de calcul et de précision par rapport au cas précédent où $\theta_1 = 3.3\%$ et $\theta_2 = 1\%$. Il faut noter

	Nb de simulations	Temps de calcul	$\mu_{ml}^{\max}$	PHSSR ^{max}	$E_{\text{PHSSR}^{\max}}$	φ_h^{opt}	Err
Référence	100 000	1.49 jours	$0.2090 \pm 0.19\%$	$52.25\% \pm 0.19\%$	–	$46\,970 \pm 3.22\%$	–
ME-gPC ($\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	6 652	2.64 heures	$0.2156 \pm 1.86\%$	$53.90\% \pm 1.86\%$	3.15%	$33\,333 \pm 4.50\%$	29.03%
ME-gPC ($\theta_1 = 4.2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	5 817	2.31 heures	$0.2125 \pm 1.88\%$	$53.13\% \pm 1.88\%$	1.68%	$39\,394 \pm 3.40\%$	22.51%
ME-gPC ($\theta_1 = 4.5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	5 804	2.30 heures	$0.2125 \pm 1.88\%$	$53.13\% \pm 1.88\%$	1.68%	$40\,909 \pm 3.70\%$	12.90%
ME-gPC ($\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	5 706	2.25 heures	$0.2125 \pm 1.88\%$	$53.13\% \pm 1.88\%$	1.68%	$45\,454 \pm 3.33\%$	3.22%
ME-gPC ($\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.1\%$)	7 023	2.96 heures	$0.2093 \pm 0.19\%$	$52.34\% \pm 0.19\%$	0.35%	$46\,970 \pm 3.22\%$	0%

TABLEAU 6.2 – Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est φ_h .

ici que la diminution de nombre de simulation est due au changement de critère sur la variance θ_1 . En effet l'augmentation de ce dernier permet de faire converger l'algorithme plus rapidement (cf. section 4.3.3)

La figure 6.12 montre la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de φ_h avec $\theta_1 = 4.5\%$ et $\theta_2 = 1\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 5804. La valeur maximale de la PHSSR est $\text{PHSSR}^{\max} = 53.13\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{\text{PHSSR}^{\max}} = 1.68\%$. La valeur optimale de φ_h est $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 40\,909 \pm 3.70\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$, ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err = 12.90\%$.

La figure 6.13 montre la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de φ_h avec $\theta_1 = 4.8\%$ et $\theta_2 = 1\%$. La valeur maximale de la PHSSR est $\text{PHSSR}^{\max} = 53.13\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{\text{PHSSR}^{\max}} = 1.68\%$. La valeur optimale de φ_h est $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 45\,454 \pm 3.33\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err = 3.22\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 5706. Ce dernier est 17 fois moins important que le nombre de simulation requis par la référence.

La figure 6.13 montre la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de η_h avec $\theta_1 = 4.8\%$ et $\theta_2 = 1\%$. La valeur maximale de la PHSSR est égale à $\text{PHSSR}^{\max} = 53.13\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{\text{PHSSR}^{\max}} = 1.68\%$. La valeur optimale de φ_h est $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 45\,454 \pm 3.33\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err = 3.22\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 5706.

Dans ces trois derniers cas la valeur identique de $\text{PHSSR}^{\max}$ est encore une fois liée aux plateaux que l'on voit sur les figures et évoqués dans la section précédente. Pour réduire les paliers entre chaque plateau il faut diminuer le seuil θ_2 . C'est ce qui est fait dans ce dernier exemple présenté dans la figure 6.14 qui montre la variation de la PHSSR et de la limite d'atténuation en fonction de η_h avec $\theta_1 = 3.5\%$ et $\theta_2 = 0.1\%$. La valeur maximale de la PHSSR est égale à $\text{PHSSR}^{\max} = 52.34\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{\text{PHSSR}^{\max}} = 0.35\%$. La valeur optimale de φ_h est $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 46\,970 \pm 3.33\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err = 0\%$. Cette erreur nulle veut simplement dire que dans ce cas la méthode ME-gPC fait aussi bien que la référence. En contre partie le nombre de simulations augmente, il en effet est égal à 7023

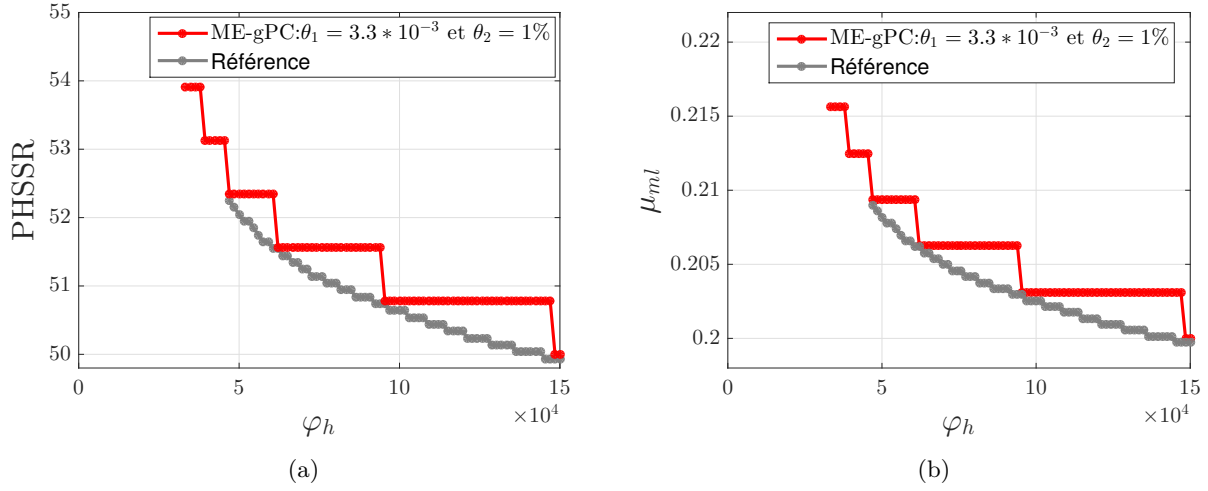


FIGURE 6.10 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0 \ 150 \ 000]$ N·kg⁻¹·m⁻³. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$.

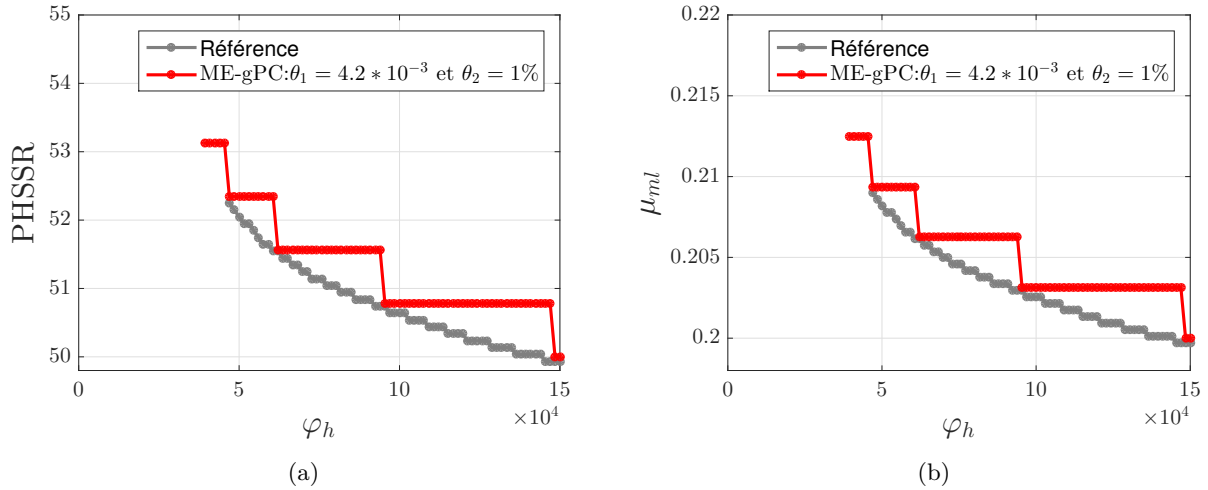


FIGURE 6.11 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0 \ 150 \ 000]$ N·kg⁻¹·m⁻³. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 4.2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$.

ce qui est 14 fois moins important que le nombre de simulation requis par la référence.

6.4.3 Optimisation du coefficient d'amortissement η_h et de la raideur non linéaire φ_h

Dans cette partie on souhaite résoudre le problème d'optimisation (6.1) en travaillant dans un espace de conception à deux dimensions en considérant que le coefficient d'amortissement η_h et la raideur non linéaire φ_h sont variables.

6.4.3.1 Optimisation de référence

La limite d'atténuation est déterminée directement avec le système (3.2) avec $\varphi_h \in [0, 150 \ 000]$ N·kg⁻¹·m⁻³ et $\eta_h \in [0, 0.04]$. L'espace de conception est découpé en 1250 (50 selon $\eta_h \times 25$ selon φ_h) sous-espaces d'aires égales. Pour chaque sous-espace la limite d'atténuation μ_{ml} est déterminée par le critère (6.3) en utilisant 1000 valeurs du coefficient de frottement ($\mu \in [0, 0.4]$). Le nombre de simulations est

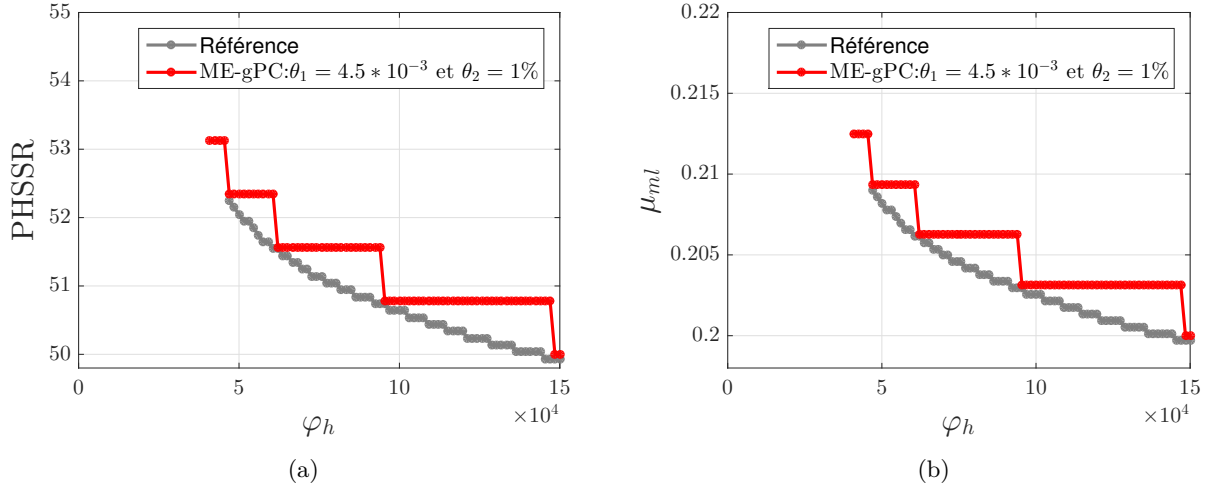


FIGURE 6.12 – S(a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0 \ 150\ 000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 4.5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$.

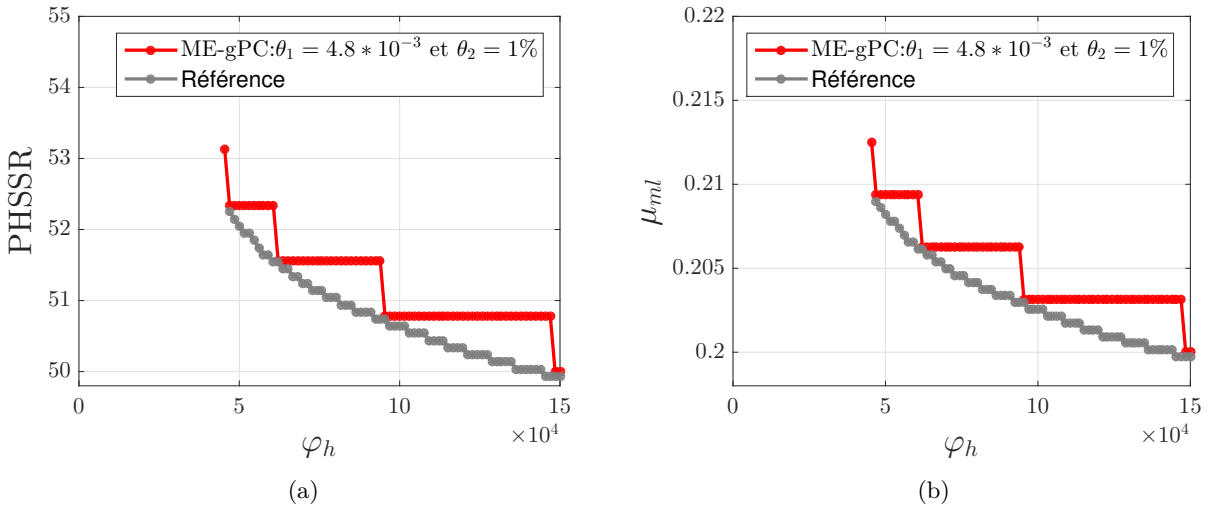


FIGURE 6.13 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0 \ 150\ 000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$.

donc égal à $1250 \times 1000 = 1\ 250\ 000$ avec un temps de calcul égal à 16.29 jours.

La figure 6.15 montre la variation de la PHSSR (figure 6.15(a)) et de la limite d'atténuation (figure 6.15(b)) en fonction de φ_h et η_h . Les parties basses en bleues représentent les cas où aucune discontinuité (selon le critère (6.3)) n'a été observée dans le profil de l'amplitude de déplacement A . Une vue du dessus de la figure 6.15(a) est montrée dans la figure 6.16. La valeur maximale de la PHSSR est $\text{PHSSR}^{\max} = 53.15\%$ correspondant à une valeur optimale de la raideur non linéaire $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{référence}} = 43\ 750 \pm 14.28\% \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ et une valeur optimale du coefficient d'amortissement $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{référence}}$ égale à $0.0294 \pm 2.72\%$ (cf. oval rouge sur la figure 6.16).

La figure 6.17 montre l'évolution de la PHSSR en fonction du coefficient d'amortissement η_h pour des valeurs décroissantes de φ_h . Pour les deux valeurs les plus élevées (figures 6.17(a) et 6.17(b)) l'allure de la PHSSR en fonction de η_h , lorsqu'un saut est observé (c.-à-d. quand la PHSSR est non nulle), est similaire à celle observée en section 6.4.1 avec une courbe présentant un maximum avant de décroître puis de voir disparaître les sauts et d'observer une PHSSR nulle. En revanche quand

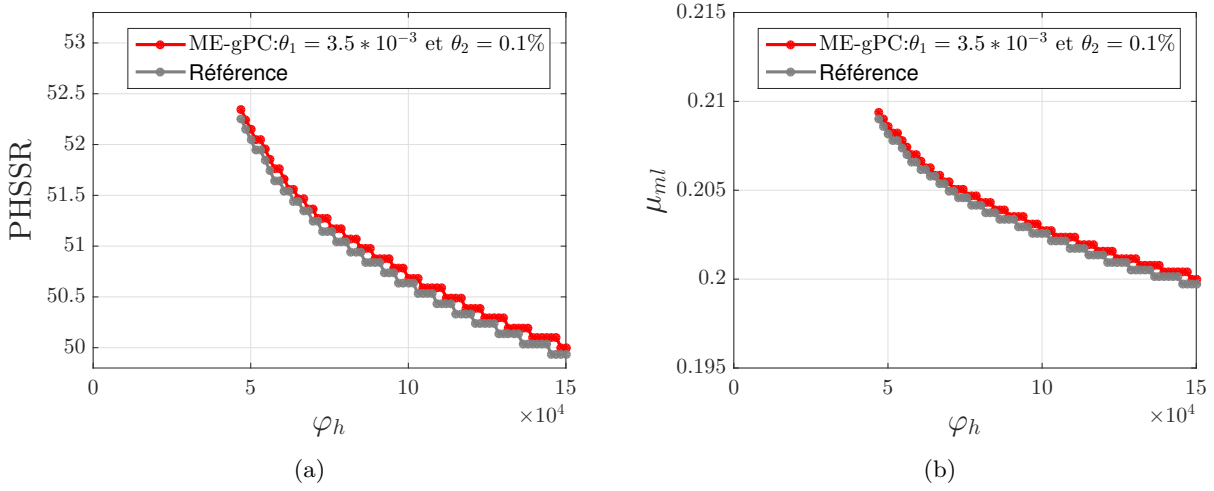


FIGURE 6.14 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de φ_h pour $\eta_h = 0.024$ et $\varphi_h \in [0 \ 150\,000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. Les seuils utilisés sont : $\theta_1 = 3.5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.1\%$.

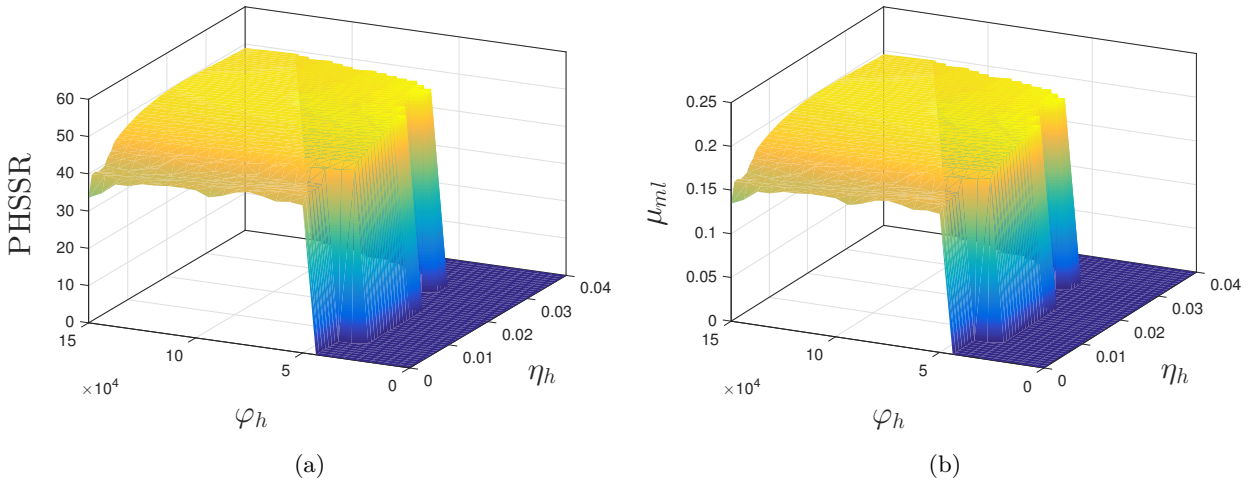


FIGURE 6.15 – (a) PHSSR et (b) μ_{ml} en fonction de η_h et φ_h avec $\varphi_h \in [0 \ 150\,000]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\eta_h \in [0 \ 0.04]$.

φ_h diminue (figures 6.17(c) et 6.17(d)) la courbe devient croissante avec de tomber à zéro. Dans ces cas, le maximum est donc la dernière valeur non nulle de la PHSSR. Globalement dans l'espace de conception $[0 \ 0.04] \times [0 \ 150\,000]$ le maximum de la PHSSR mis en évidence par ovale rouge de la figure 6.16) est observé dans une situation similaire à ces deux dernier cas.

6.4.3.2 Optimisation avec la méthode ME-gPC

Comme dans le cas de l'optimisation de référence, l'espace de conception est découpé en 1250 (50 selon $\eta_h \times 25$ selon η_h) sous-espaces d'aires égales. Pour chaque sous-espace la limite d'atténuation est localisée à l'aide de la méthode ME-gPC décrite au chapitre 4.

Les résultats de cette optimisation ainsi que la comparaison avec les résultats obtenus par la référence sont présentés au tableau 6.3. Comme dans les sections précédentes, l'ordre du gPC est $p = 1$.

La figure 6.18 montre une vue de dessus similaire à celle montrée dans la figure 6.16 dans le cas de la référence. Le seuil sur la variance est $\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}\%$ et celui sur la taille des éléments est

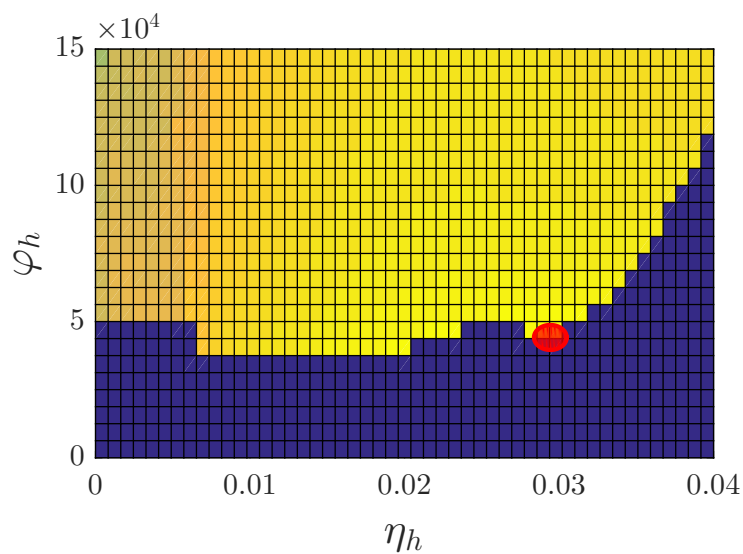
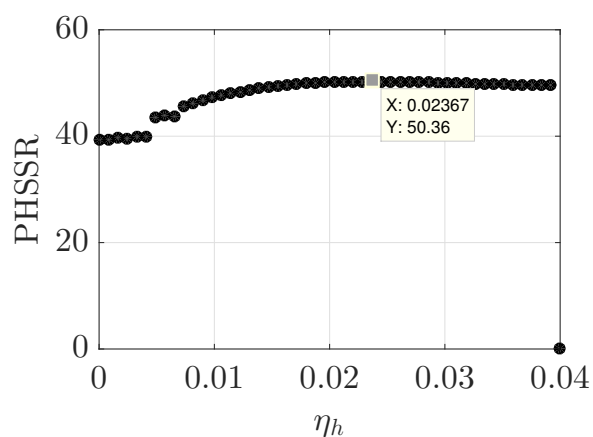
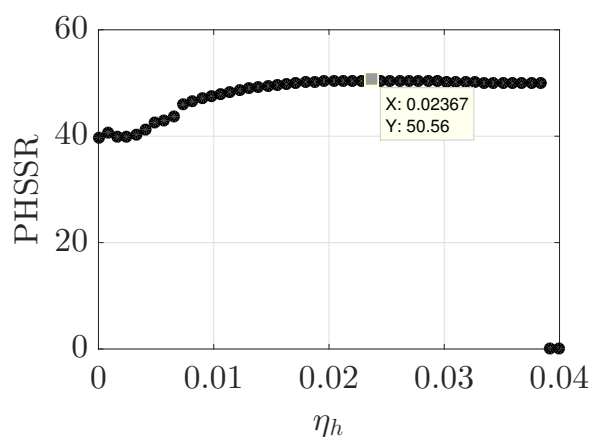


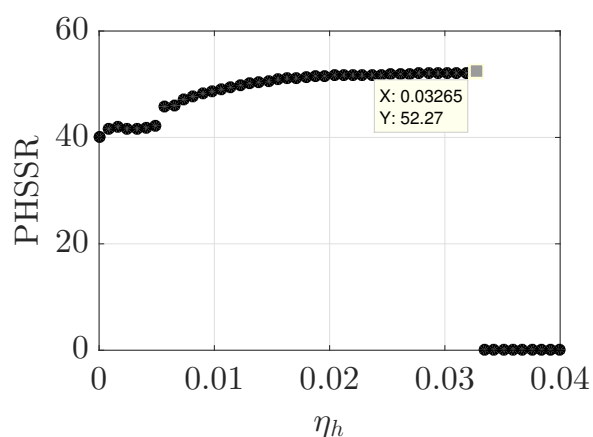
FIGURE 6.16 – Vue de dessus 6.15(a).



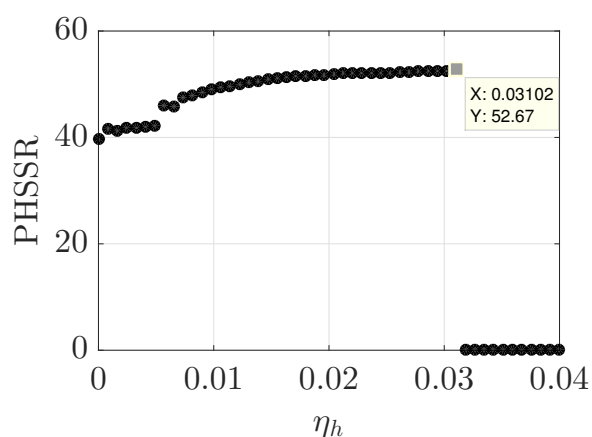
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 6.17 – Variation de de la PHSSR en fonction de η_h . (a) $\varphi_h = 118\,750\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$, (b) $\varphi_h = 106\,250\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$, (c) $\varphi_h = 56\,250\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ et (d) $\varphi_h = 50\,000\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

	Référence	ME-gPC ($\theta_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)
Nb de simulations	1 250 000	91 986
Temps de calcul	16.29 jours	1.55 jours
Pourcentage de réduction (%)	-	90.48
$\mu_{ml}^{\max}$	$0.2126 \pm 0.19\%$	$0.2188 \pm 1.83\%$
$PHSSR^{\max}$	$53.16\% \pm 0.19\%$	$54.68\% \pm 1.83\%$
$E_{PHSSR^{\max}}$	-	2.78%
η_h^{opt}	$0.0294 \pm 2.72\%$	$0.0310 \pm 2.58\%$
$Err(\eta_h)$	-	5.44%
φ_h^{opt}	$43750 \pm 14.28\%$	$37\,500 \pm 16.66\%$
$Err(\varphi_h)$	-	14.28%

TABLEAU 6.3 – Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Les paramètres de conception sont η_h et φ_h .

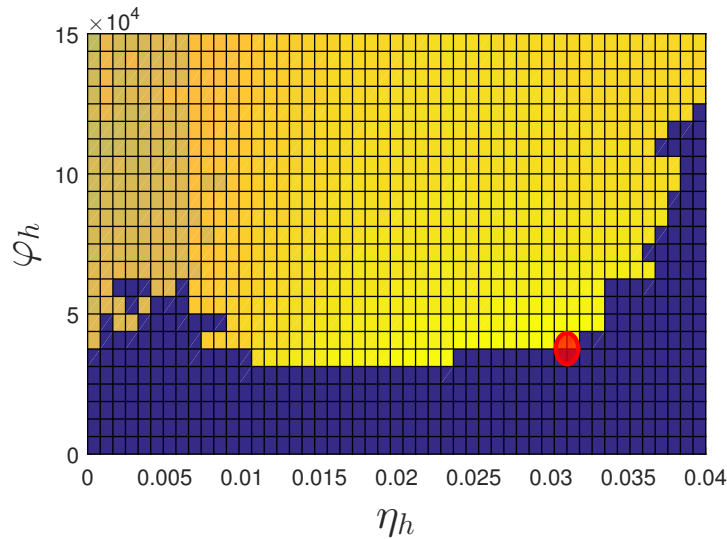


FIGURE 6.18 – Vue de dessus dans le cas de la PHSSR dans le cas de l'optimisation par la méthode ME-gPC.

$\theta_2 = 1\%$. La valeur maximale de la PHSSR est égale à $PHSSR^{\max} = 54.68\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $E_{PHSSR^{\max}} = 2.87\%$. Les valeurs optimales des paramètres de conception correspondantes sont : $(\varphi_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 37\,500 \pm 16.66\% \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err(\varphi_h) = 14.28\%$ et $(\eta_h^{\text{opt}})_{\text{ME-gPC}} = 0.0310 \pm 2.58\%$ ce qui donne une erreur par rapport la référence $Err(\eta_h) = 5.44\%$. Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 91986, ce qui est 13 fois moins que le nombre de simulation requis par la référence. Le pourcentage de réduction de temps de calcul est égal à 90.48%.

Les erreurs et les intervalles de précisions relativement importants observés dans le tableau 6.3 sont dus à une discrétisation un peu trop grossière de l'espace de conception d'une part et, dans le cas de l'erreur Err , au fait que l'on compare des milieux d'intervalles d'autre part. Ces résultats pourraient être améliorés en discrétisant plus finement l'espace de conception.

6.5 Résultats de l'optimisation avec paramètres de conception stochastiques

La seconde technique d'optimisation dont la méthodologie a été décrite en section 6.2.2 considère que les paramètres des NES sont également incertains mais avec une loi de probabilité connue. Ainsi, les variables de conception à optimiser ne sont plus directement les paramètres des NES mais l'une de leurs statistiques appelées hyper-paramètres. Nous considérons dans ce travail des paramètres de conception qui suivent des lois de probabilité uniformes et la moyenne $\tilde{x}_d$ comme hyper-paramètre. Encore une fois dans cette section seul le coefficient de frottement μ est supposé incertain.

6.5.1 Optimisation HP du coefficient d'amortissement η_h

6.5.1.1 Optimisation de référence

Dans cette section, le problème de l'optimisation 6.2 est résolu avec une seule variable de conception η_h qui suit une loi uniforme de moyenne $\hat{\eta}_h$, la raideur cubique est fixée et égale à $\varphi_h = 140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. L'espace de conception est découpé en $N_I = 5$ intervalles comme indiqué dans le tableau 6.4. Pour chaque intervalle les bornes inférieure et supérieure sont déterminées de la façon suivante : $\eta_h^{\text{inf}} = \hat{\eta}_h - 0.1\hat{\eta}_h$ et $\eta_h^{\text{sup}} = \hat{\eta}_h + 0.1\hat{\eta}_h$ où $\hat{\eta}_h$ est la moyenne. Les moyennes sont choisies de telle sorte que la borne supérieure d'un intervalle coïncide avec la borne inférieure de l'intervalle suivant.

Dans chaque intervalle $N_d = 10$ tirages aléatoires du coefficient d'amortissement η_h sont effectués suivant sa loi de probabilité uniforme. Pour chacun de ces 10 tirages la limite d'atténuation et la PHSSR sont déterminées directement à partir de la simulation numérique de (3.2) (de façon similaire aux références des sections précédentes) en utilisant 10000 valeurs du coefficient de frottement μ . La fonction objectif à maximiser est maintenant la moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ des 10 valeurs de PHSSR obtenues dans chaque intervalle.

$[\eta_h^{\text{inf}}, \eta_h^{\text{sup}}]$	Moyenne théorique $\hat{\eta}_h$	Moyenne des 10 valeurs de η_h tirées	$\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ (%)	$\text{PHSSR}^{\text{max}}$ (%)	$\text{PHSSR}^{\text{min}}$ (%)	Erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance=99% (%)
[0.0117,0.0143]	0.0130	0.0129	48.36	48.77	47.87	0.1417
[0.0143,0.0175]	0.0159	0.0161	49.31	49.56	48.86	0.1086
[0.0175,0.0214]	0.0194	0.0193	48.85	50.01	49.66	0.0220
[0.0214,0.0261]	0.0237	0.0234	50.07	50.08	50.03	0.0005
[0.0261,0.0319]	0.0290	0.0284	49.90	50.03	49.67	0.0277

TABLEAU 6.4 – Résultats de l'optimisation de référence. Le paramètre de conception est $\hat{\eta}_h$.

Le tableau 6.4 montre les résultats de référence de l'optimisation de $\hat{\eta}_h$. Pour chaque intervalle la moyenne des 10 valeurs de η_h tirées est calculée et comparée à la valeur théorique $\hat{\eta}_h$. Les valeurs moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, maximale $\text{PHSSR}^{\text{max}}$ et minimale $\text{PHSSR}^{\text{min}}$ de la PHSSR sont également indiquées. Enfin, l'erreur sur la moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ pour un niveau de confiance égale à 99%, calculée par l'équation (2.14), est aussi montrée. Les valeurs trouvées (des erreurs inférieures à 1%) montrent que le nombre de tirages $N_d = 10$ de η_h dans chaque intervalle est suffisant.

La figure 6.19 montre la variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\text{max}}$ et $\text{PHSSR}^{\text{min}}$ (figure 6.19(a)) et la variation de $\mathbf{E}[\mu_{\text{ml}}]$, $\mu_{\text{ml}}^{\text{max}}$ et $\mu_{\text{ml}}^{\text{min}}$ - les valeurs moyenne, maximale et minimale de la limite d'atténuation respectivement - (figure 6.19(b)) en fonction de $\hat{\eta}_h$. Dans ce cas, la valeur maximale de la fonction objectif est 50.07% qui correspond une valeur optimale de $\hat{\eta}_h$ égale à 0.0237. Le nombre de simulation est égal à $5 \times 10 \times 10\,000 = 500\,000$.

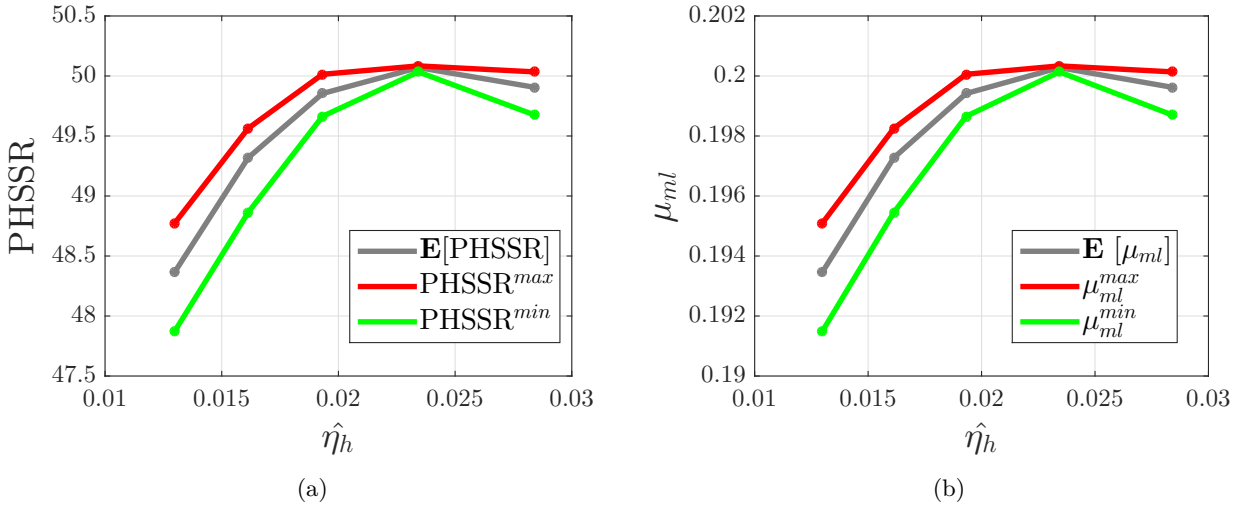


FIGURE 6.19 – Optimisation de référence. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\eta}_h$.

6.5.1.2 Optimisation avec la méthode ME-gPC

Le tableau 6.5 montre les résultats de l'optimisation de $\hat{\eta}_h$ par la méthode basée sur le ME-gPC. L'ordre du gPC utilisé est $p = 1$ avec $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$ puis $\theta_2 = 0.001\%$. Comme on peut le voir dans le tableau, le découpage de l'espace de conception est le même que précédemment pour l'optimisation de référence et les mêmes grandeurs y sont indiquées.

$[\eta_h^{\text{inf}}, \eta_h^{\text{sup}}]$	Moyenne théorique $\hat{\eta}_h$	Moyenne des 10 valeurs de η_h tirées	$\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ (%)	$\text{PHSSR}^{\max}$ (%)	$\text{PHSSR}^{\min}$ (%)	Erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance = 99% (%)
[0.0117,0.0143]	0.0130	0.0129	48.82	49.21	48.43	0.2833
[0.0143,0.0175]	0.0159	0.0161	48.84	50	49.21	0.1776
[0.0175,0.0214]	0.0194	0.0193	50.07	50.78	50	0.0994
[0.0214,0.0261]	0.0237	0.0234	50.78	50.78	50.78	0
[0.0261,0.0319]	0.0290	0.0284	50.15	50.78	50	0.1765

TABLEAU 6.5 – Résultats de l'optimisation avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\eta}_h$.

Le tableau 6.6 montre la comparaison entre l'optimisation de référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC dans le cas où $\theta_2 = 1\%$ mais aussi $\theta_2 = 0.001\%$.

La figure 6.20 montre la variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ (figure 6.20(a)) et la variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ (figure 6.20(b)) en fonction de $\hat{\eta}_h$ dans le cas où $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$. Dans ce cas, le nombre de simulation est égal à 4613. La valeur maximale de la fonction objectif est 50.78% ce qui correspond à une valeur optimale de $\hat{\eta}_h$ égale à 0.0237. L'erreur, par rapport la référence sur la valeur maximale de la moyenne de la PHSSR est $E_{\mathbf{E}[\text{PHSSR}]}^{\max} = 1.41\%$ avec une réduction du temps de calcul égale à 98.98%. Dans les trois derniers intervalles, les valeurs de $\text{PHSSR}^{\max}$ sont égales pour les seuils θ_1 et θ_2 choisis.

Dans le cas où $\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.001\%$ (dernière ligne du tableau 6.6). Dans ce cas, le nombre de simulation est égal à 8006. La valeur maximale de la fonction objectif est 50.07% correspondant à une valeur optimale de $\hat{\eta}_h$ toujours égale à 0.0237. L'erreur, par rapport la référence, sur la valeur maximale de la moyenne de la PHSSR est maintenant $E_{\mathbf{E}[\text{PHSSR}]}^{\max} = 0\%$ avec une réduction du temps de calcul égale à 98.38%.

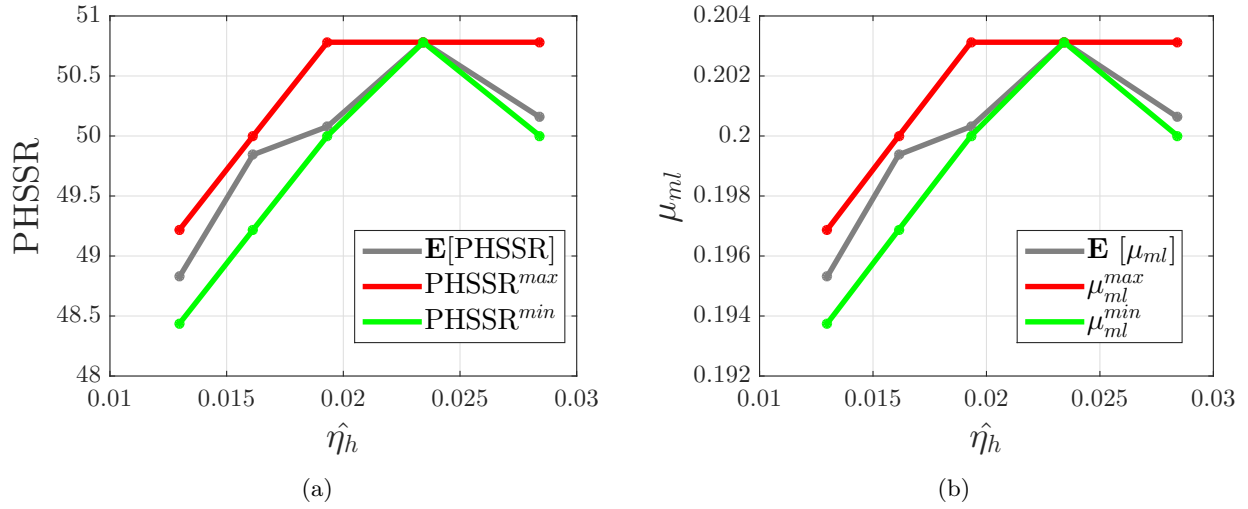


FIGURE 6.20 – Optimisation avec la méthode ME-gPC. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\eta}_h$.

	Nb de simulations	Temps de calcul	Pourcentage de réduction(%)	$\hat{\mu}_{ml}^{\max}$	$\mathbf{E}[\text{PHSSR}]^{\max}$	$E_{\mathbf{E}[\text{PHSSR}]}^{\max}$	$\hat{\eta}_h^{\text{opt}}$
Référence	500 000	7.86 jours	-	$0.2003 \pm 0.02\%$	$50.07\% \pm 0.02\%$	-	0.0237
ME-gPC ($\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	4 613	1.92 heures	98.98	$0.2031 \pm 2\%$	$50.78\% \pm 2\%$	1.41%	0.0237
ME-gPC ($\theta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.001\%$)	8 006	3.29 heures	98.38	$0.2003 \pm 0.02\%$	$50.07\% \pm 0.02\%$	0%	0.0237

TABLEAU 6.6 – Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\eta}_h$.

6.5.2 Optimisation HP de la raideur non linéaire φ_h

6.5.2.1 Optimisation robuste de référence

Dans cette section, le problème de l'optimisation 6.2 est résolu avec une seule variable de conception φ_h qui suit une loi uniforme de moyenne $\hat{\varphi}_h$ et η_h fixé à 0.024. On suit une méthodologie similaire à celle de la section précédente avec un espace de conception découpé en $N_I = 5$ intervalles comme indiqué dans le tableau 6.7. Pour chaque intervalle les bornes inférieure et supérieure sont déterminée de la façon suivante : $\varphi_h^{\text{inf}} = \hat{\varphi}_h - 0.1\hat{\varphi}_h$ et $\varphi_h^{\text{sup}} = \hat{\varphi}_h + 0.1\hat{\varphi}_h$ où $\hat{\varphi}_h$ est la moyenne choisie de telle sorte que la borne supérieure d'un intervalle coïncide avec la borne inférieure de l'intervalle suivant.

Dans chaque intervalle $N_d = 10$ tirages aléatoires de la raideur φ_h sont effectués suivant sa loi de probabilité uniforme. Pour chacun de ces 10 tirages la limite d'atténuation et la PHSSR sont déterminées directement à partir de la simulation numérique de (3.2) en utilisant 10000 valeurs du coefficient de frottement μ . La fonction objectif à maximiser est la moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ des 10 valeurs de PHSSR obtenues dans chaque intervalle.

Les résultats de la section 6.4.2 montrent que μ_{ml} et la PHSSR sont des fonctions décroissantes de φ_h et donc que la valeur optimale est la plus faible valeur de φ_h pour laquelle le critère de saut (6.3) est respectée. Il se peut donc qu'une partie de l'intervalle où se trouve cette valeur optimale corresponde

à des valeurs de φ_h pour lesquelles le critère de saut (6.3) n'est pas respecté. Par conséquent, dans le premier intervalle $[38\,438, 46\,980]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$, il est possible que parmi les 10 tirages φ_h certains correspondent à des cas où le critère de saut n'est pas respecté. Dans ce cas, la valeur moyenne $\hat{\varphi}_h$ retenue - qui est la valeur optimale puisqu'elle nous verrons qu'elle correspond au maximum de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ - est uniquement la moyenne des tirages de φ_h pour lesquels (6.3) est respecté. La moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ correspondante est logiquement aussi calculée sur les mêmes tirages.

Le tableau 6.7 montre les résultats de référence de l'optimisation de $\hat{\varphi}_h$. Pour chaque intervalle la moyenne des 10 valeurs de φ_h tirées est calculée et comparée à la valeur théorique $\hat{\varphi}_h$. Les valeurs moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, maximale $\text{PHSSR}^{\max}$ et minimale $\text{PHSSR}^{\min}$ de la PHSSR sont également indiquées. Enfin, l'erreur sur la moyenne $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ pour un niveau de confiance égale à 99%, calculée par l'équation (2.14), est aussi montrée. Les valeurs trouvées (des erreurs inférieures à 1%) montrent que le nombre de tirages $N_d = 10$ de φ_h dans chaque intervalle est suffisant (le cas particulier du premier intervalle est évoqué plus bas). Pour cette référence, le nombre de simulation est égal à $5 \times 10 \times 10\,000 = 500\,000$.

	Moyenne théorique $\hat{\varphi}_h$	Moyenne des 10 valeurs de φ_h tirées	$\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$ (%)	$\text{PHSSR}^{\max}$ (%)	$\text{PHSSR}^{\min}$ (%)	Erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance = 99% (%)
[38 438, 46 980]	42 709	46 428 (sur 4 valeurs)	52.33 (sur 4 valeurs)	52.35 (sur 4 valeurs)	52.31 (sur 4 valeurs)	0.0010 (sur 4 valeurs)
[46 980, 57 420]	52 200	52 992	51.95	52.15	51.75	0.0299
[57 420, 70 180]	63 800	62 746	51.53	51.66	51.31	0.0296
[70 180, 85 776]	77 978	78 942	51.07	51.18	50.96	0.0095
[85 776, 104 837]	95 306	94 876	50.76	50.91	50.59	0.0200

TABLEAU 6.7 – Résultats de l'optimisation de référence. Le paramètre de conception est $\hat{\varphi}_h$.

La figure 6.21 montre la variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ (figure 6.21(a)) et la variation de $\mathbf{E}[\mu_{\text{ml}}]$, $\mu_{\text{ml}}^{\max}$ et $\mu_{\text{ml}}^{\min}$ (figure 6.21(b)) en fonction de $\hat{\varphi}_h$. Dans ce cas, la valeur maximale de la fonction objectif est 52.33% qui correspond une valeur optimale de $\hat{\varphi}_h$ égale à 46505. Ces deux moyennes sont calculées sur les quatre de φ_h dans $[38\,438, 46\,980]$ $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ pour lesquelles (6.3) est respectée. L'erreur très faible sur la moyenne pour un niveau de confiance à 99% obtenue dans ce cas est due au fait que les quatre valeurs de PHSSR sont proches.

6.5.2.2 Optimisation avec la méthode ME-gPC

Le tableau 6.8 montre les résultats de l'optimisation de $\hat{\varphi}_h$ par la méthode basée sur le ME-gPC. L'ordre du gPC utilisé est $p = 1$ avec $\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$. Comme on peut le voir dans le tableau, le découpage de l'espace de conception est le même que précédemment pour l'optimisation de référence et les mêmes grandeurs y sont indiquées. Lorsque l'erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance = 99% est nulle cela veut dire que les PHSSR sont identiques pour chacun des 10 tirages de l'intervalle considéré. Il apparaît également que dans le premier intervalle - qui contient la valeur maximale de la PHSSR - seul un tirage parmi les dix correspond à un cas où le critère de saut (6.3) est respecté.

Le tableau 6.9 montre la comparaison entre l'optimisation de référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC dans le cas où $\theta_2 = 1\%$ mais aussi $\theta_2 = 0.001\%$.

La figure 6.22 montre la variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ (figure 6.20(a)) et la variation de $\mathbf{E}[\mu_{\text{ml}}]$, $\mu_{\text{ml}}^{\max}$ et $\mu_{\text{ml}}^{\min}$ (figure 6.20(b)) en fonction de $\hat{\varphi}_h$ dans le cas où $\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$. Dans ce cas, le nombre de simulation est égal à 3248. La valeur maximale de la fonction objectif est 53.12% ce qui correspond à une valeur optimale de $\hat{\varphi}_h$ égale a 46 175 $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. L'erreur,

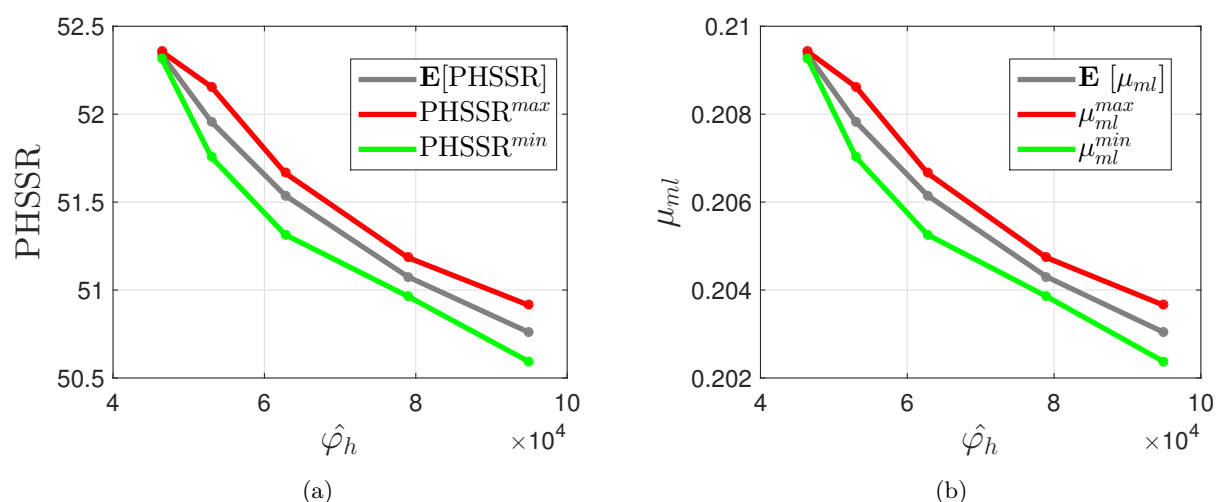


FIGURE 6.21 – Optimisation de référence. (a) Variation de $E[PHSSR]$, $PHSSR^{max}$ et $PHSSR^{min}$ et (b) variation de $E[\mu_{ml}]$, μ_{ml}^{max} et μ_{ml}^{min} en fonction de $\hat{\varphi}_h$.

	Moyenne théorique $\hat{\varphi}_h$	Moyenne des 10 valeurs de φ_h tirées	$E[PHSSR]$ (%)	$PHSSR^{max}$ (%)	$PHSSR^{min}$ (%)	Erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance = 99% (%)
[38 438, 46 980]	42 709	46 175 (sur 1 valeur)	53.12 (sur 1 valeur)	53.12 (sur 1 valeur)	53.12 (sur 1 valeur)	0 (sur 1 valeur)
[46 980, 57 420]	52 200	52 992	52.34	52.34	52.34	0
[57 420, 70 180]	63 800	62 746	52.10	52.34	51.56	0.2230
[70 180, 85 776]	77 978	78 942	51.56	51.56	51.56	0
[85 776, 104 837]	95 306	94 876	51.09	51.56	50.78	0.2599

TABLEAU 6.8 – Résultats de l'optimisation avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\varphi}_h$.

par rapport la référence sur la valeur maximale de la moyenne de la PHSSR est $E_{E[PHSSR]_{max}} = 1.50\%$ avec une réduction du temps de calcul égale à 98.21%.

Dans le cas où $\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.001\%$ (dernière ligne du tableau 6.9) le nombre de simulation est égal à 6947. La valeur maximale de la fonction objectif est 52.38% correspondant à une valeur optimale de $\hat{\varphi}_h$ égale à 45 819 $N \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$. L'erreur, par rapport la référence, sur la valeur maximale de la moyenne de la PHSSR est maintenant $E_{E[PHSSR]_{max}} = 0.09\%$ avec une réduction du temps de calcul égale à 98.30%. Dans ce cas, dans le premier intervalle - qui contient la valeur maximale de la PHSSR - deux tirages parmi les dix correspondent maintenant à des situations où le critère de saut (6.3) est respecté.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'optimisation sous incertitudes de NES dans le cadre de l'atténuation des cycles limites du système frottant instable (décrit en section 3.2) est étudiée. La problématique d'optimisation est basée sur la maximisation de la propension à être dans un régime atténué (PHSSR, cf. section 3.5) qui est la fonction objectif du problème. Deux approches sont mises en œuvre, l'une considère que les paramètres des NES sont déterministes et l'autre considère que les paramètres des NES sont également incertains mais avec une loi de probabilité connue. Pour chaque approche, deux stratégies d'optimisation sont développées. La première consiste à évaluer la fonction objectif par une

	Nb de simulations	Temps de calcul	Pourcentage de réduction(%)	$\hat{\mu}_{ml}^{\max}$	$\mathbf{E}[\text{PHSSR}]^{\max}$	$E_{\mathbf{E}[\text{PHSSR}]^{\max}}$	$\hat{\varphi}_h^{\text{opt}}$
Référence	500 000	7.53 jours	-	$0.2093 \pm 0.02\%$	$52.33\% \pm 0.02\%$	—	$46\,428 \pm 1.18\%$
ME-gPC ($\theta_1 = 4.8 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 1\%$)	3248	1.42 heures	99.21	$0.2125 \pm 1.9\%$	$53.12\% \pm 1.9\%$	1.50%	$46\,175 \pm 1.74\%$
ME-gPC ($\theta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_2 = 0.001\%$)	6947	3.06 heures	98.30	$0.2095 \pm 0.019\%$	$52.38\% \pm 0.019\%$	0.09%	$45\,819 \pm 2.53\%$

TABLEAU 6.9 – Comparaison entre l'optimisation référence et celle obtenue avec la méthode ME-gPC. Le paramètre de conception est $\hat{\varphi}_h$.

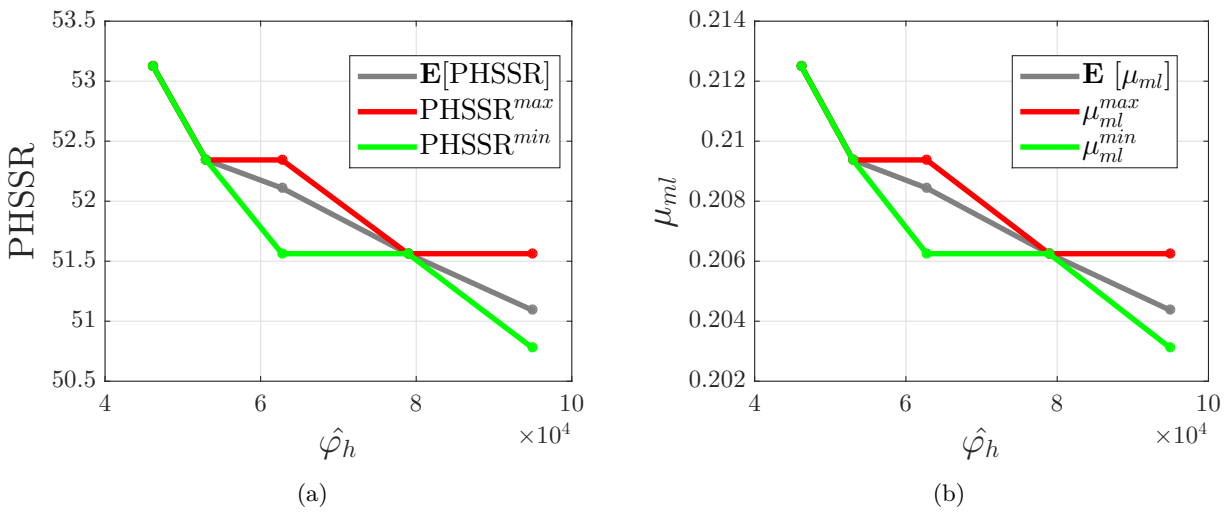


FIGURE 6.22 – Optimisation avec la méthode ME-gPC. (a) Variation de $\mathbf{E}[\text{PHSSR}]$, $\text{PHSSR}^{\max}$ et $\text{PHSSR}^{\min}$ et (b) variation de $\mathbf{E}[\mu_{ml}]$, $\mu_{ml}^{\max}$ et $\mu_{ml}^{\min}$ en fonction de $\hat{\varphi}_h$.

optimisation déterministe de référence et la deuxième consiste à évaluer la fonction objectif par la méthode basée sur le chaos polynomial généralisé multi-élément (méthode dite ME-gPC) décrite en section 4.2.2. La comparaison entre les deux méthodes montre l'efficacité de la méthode ME-gPC à réduire significativement le coût de calcul en gardant une bonne précision par rapport à la référence.

Conclusion générale

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit se positionnent dans le cadre général de la conception robuste d'absorbeurs non linéaires passifs de vibrations (typiquement des systèmes masse-ressort-amortisseur à raideur purement non linéaire aussi appelés NES dans la littérature) associé à un système mécanique frottant. La conception de systèmes mécaniques à raideur purement non linéaire (ou dont la raideur linéaire est négligeable par rapport à la raideur non linéaire) est déjà en soit un challenge. De plus, que ce soit sur le système à protéger ou sur l'absorbeur lui-même, les non-linéarités engendrent très souvent une grande sensibilité du comportement dynamique du système aux paramètres. Ces derniers pouvant être incertains, il est primordial de prendre en compte ces incertitudes dans la modélisation du système. L'originalité de ce travail réside donc dans l'étude de l'efficacité d'absorbeurs non linéaires à réduire les vibrations de systèmes mécaniques frottants tout en prenant en compte les incertitudes paramétriques de l'absorbeur et du système dont on souhaite limiter les vibrations.

L'objectif est d'abord de développer des méthodes probabilistes basées sur la théorie du chaos polynomial pour modéliser la propagation des incertitudes paramétriques dans un système mécanique instable couplé à des NES. La méthode la plus efficace est ensuite intégrée dans une démarche d'optimisation robuste des absorbeurs.

L'étude bibliographique présentée dans le premier chapitre permet tout d'abord de choisir le mécanisme de couplage de modes, expliquant la genèse d'instabilités dans les systèmes mécaniques frottants, pour modéliser des vibrations induites par le frottement. Ensuite, un rapide état de l'art sur les principales approches de la littérature permettant de prendre en compte les incertitudes paramétriques montre que les approches basées sur le chaos polynomial, possèdent un potentiel significatif pour propager des incertitudes dans un modèle dynamique. Puis, dans le cadre de l'atténuation d'oscillations avec cycles limites résultants d'instabilités dans ces systèmes frottants, la pertinence des absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES est démontrée en raison de leurs avantages par rapport aux autres techniques usuelles de contrôle des vibrations. Finalement, il est montré que les études portant sur l'optimisation sous incertitudes de tels absorbeurs sont encore marginales, ce qui justifie ce présent travail de thèse.

La première partie de la thèse est consacrée au développement de méthodes numériques, basées sur la théorie du chaos polynomial, pour modéliser le comportement dynamique sous incertitude d'un système frottant (instable et sujet à des cycles limites) associé à des NES.

Le modèle de système frottant retenu est le modèle dit de Hultèn qui est couplé à deux NES identiques. Une analyse préliminaire montre que ce modèle a le comportement typique d'un système instable couplé à un ou plusieurs NES. L'étude des cycles limites en fonction des paramètres de bifurcation permet en effet d'observer une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire du système, ce dernier passant brutalement d'un régime atténué (où le NES agit) à un régime non atténué (où le NES n'agit pas). Ce passage est appelé limite d'atténuation. Un critère d'efficacité

des NES est ensuite défini à partir de ces observations. Il s'agit de la propension du système à être dans un régime atténué (ou PHSSR pour « *the Propensity of the system to undergo an Harmless Steady-State Regime* ») qui est la probabilité d'obtenir un régime atténué étant donné les lois de probabilité régissant la dispersion des paramètres du système primaire et des NES.

Ensuite, trois méthodes basées sur la théorie de chaos polynomial sont développées pour prédire la propension à être dans un régime atténué (PHSSR). Les deux premières méthodes sont basées sur la théorie de chaos polynomial généralisé avec comme quantité d'intérêt la limite d'atténuation pour la première et l'amplitude de déplacement des vibrations pour la deuxième. La troisième méthode est basée sur le chaos polynomial multi-éléments (ME-gPC) avec comme quantité d'intérêt également l'amplitude de déplacement. Lorsque que l'amplitude est la quantité d'intérêt, l'idée n'est pas tant de modéliser finement le profil de l'amplitude mais plutôt de localiser la limite d'atténuation qui permet d'estimer la PHSSR. De façon générale concernant la précision sur la PHSSR, avec la première méthode pour laquelle la quantité d'intérêt est la limite d'atténuation, les coûts de calcul sont très vite significatifs (1000 à 6500 simulations) mais permettent rapidement une très grande précision des résultats ($< 1,2\%$ et jusqu'à $0,03\%$) même avec des ordres du chaos faibles. La deuxième méthode pour laquelle la quantité d'intérêt est l'amplitude des vibrations, permet quant à elle d'obtenir une précision raisonnable ($< 4\%$ et jusqu'à $0,48\%$) avec des coûts de calcul bien plus faibles (135 à 693 simulations) et avec des ordres du chaos élevés. La troisième méthode basée sur une estimation de la limite d'atténuation à partir d'une modélisation de l'amplitude des vibrations avec un chaos polynomial multi-éléments permet d'obtenir des résultats satisfaisants. En effet, l'erreur sur la PHSSR ($< 1,31\%$ et jusqu'à $0,24\%$) est faible avec un coût de calcul limité (448 à 2122 simulations).

Ensuite, une comparaison des performances de ces trois méthodes est effectuée afin de choisir la mieux adaptée à la phase d'optimisation des NES avec prise en compte des incertitudes paramétriques. Le choix est porté sur la méthode basée sur la théorie du ME-gPC pour des raisons non seulement de précision et de coûts de calcul mais aussi par le fait qu'il n'y a pas de difficulté à choisir l'ordre optimal du chaos polynomial (ordre 1) contrairement aux autres méthodes. Par ailleurs, cette méthode est plus facile à mettre en œuvre, notamment si l'on souhaite augmenter le nombre de paramètres incertains.

Dans une deuxième partie, l'optimisation sous incertitudes des NES est effectuée afin de permettre un fonctionnement le plus robuste possible de l'ensemble système primaire avec NES, c'est-à-dire d'avoir un comportement le plus « sûr » possible (stable ou avec des cycles limites atténués) malgré les incertitudes paramétriques du système primaire mais également des NES. Pour cela il faut que les NES puissent jouer leur rôle au maximum dans les régions de l'espace des paramètres incertains correspondant à des régimes non atténués pour le système primaire.

Dans un premier temps, une étude analytique du comportement dynamique du système étudié est effectuée. L'étude permet de déterminer la valeur maximale du coefficient d'amortissement des NES permettant l'existence de régime SMR (« Strongly Modulated Response », c'est l'un des régimes de fonctionnement du système dans lequel le cycle limite est atténué par les NES). Le lien entre présence de SMR et atténuation des cycles limites est étudié à l'aide de simulations numériques. L'étude montre que même si la présence de SMR n'est pas possible l'atténuation des cycles limites peut être observée. Un ordre de grandeur du coefficient d'amortissement des NES est alors fixé pour l'utiliser dans la phase d'optimisation des NES sous incertitudes.

Dans un second temps, l'optimisation sous incertitudes de NES dans le cadre de l'atténuation des cycles limites d'un système frottant instable est étudiée. La problématique d'optimisation est basée sur la maximisation de la propension à être dans un régime atténué qui est la fonction objectif du problème. Deux approches sont mises en œuvre, l'une considère que les paramètres des NES sont

déterministes et l'autre considère que les paramètres de NES sont également incertains mais avec une loi de probabilité connue. Pour chaque approche, deux stratégies d'optimisation sont développées. La première consiste à évaluer la fonction objectif par une optimisation déterministe de référence et la deuxième consiste à évaluer la fonction objectif par la méthode basée sur le chaos polynomial généralisé multi-élément (méthode dite ME-gPC). À chaque fois, la comparaison avec la référence montre de très bons résultats. Par exemple, l'optimisation de la moyenne du coefficient d'amortissement des NES, supposé incertain, par la méthode basée sur le ME-gPC permet d'obtenir une bonne précision ($< 1.5\%$ et jusqu'à 0%), en la comparant avec l'optimisation robuste de référence, avec des coûts de calcul bien plus faibles (à l'ordre de 98% de réduction du temps de calcul). Ainsi, la comparaison entre les deux méthodes montre l'efficacité de la méthode ME-gPC à réduire significativement le coût de calcul en gardant une bonne précision par rapport à la référence. Concernant l'influence des paramètres des NES et des règles de conception, l'étude de l'optimisation a permis d'identifier les paramètres optimaux des NES permettant de maximiser son pouvoir d'atténuer passivement un cycle limite d'oscillations. Dans le cas de l'optimisation avec paramètres de conception déterministes, les valeurs optimales du coefficient d'amortissement et de la raideur non linéaire sont 0.0294 (sans dimension) et $43750 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ respectivement. Dans le cas de l'optimisation avec paramètres de conception stochastique, la valeur optimale du coefficient d'amortissement est située dans l'intervalle de conception $[0.0214, 0.0261]$ avec une valeur fixe de la raideur non linéaire égale à $140\,000 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. En fixant la valeur du coefficient d'amortissement à 0.024 , la valeur optimale de la raideur non linéaire est située dans l'intervalle de conception $[38\,438, 46\,980] \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$.

En prolongement de ces travaux de thèse il serait bien sûr intéressant tout d'abord d'augmenter le nombre de paramètres incertains resté relativement faible dans ces travaux.

Une deuxième perspective consiste à étudier l'efficacité des NES sur des modèles éléments finis d'un point de vue déterministe. Il serait important d'étudier le nombre de NES suffisant ainsi que leurs emplacements sur la structure vibrante pour garantir une réduction, voire une suppression des vibrations.

Les méthodes de propagation d'incertitudes basées sur le chaos pourrait ensuite être appliquées à des modèles éléments finis d'une structure industrielle avec quelques paramètres incertains puis un nombre plus important.

Concernant la partie optimisation des NES sous incertitudes, il serait intéressant d'augmenter le nombre de paramètres de conception et le nombre de paramètres incertains de la structure à contrôler. Il serait important, dans ce cas, d'utiliser des méthodes d'optimisation telles que les algorithmes génétiques pour diminuer le nombre de tirages de paramètres de conception.

Enfin, il pourrait être intéressant de valider ces différentes méthodes à travers une approche expérimentale. Une approche hybride pourrait également être envisagée où un chaos polynomial serait construit à partir de données expérimentales.

Bibliographie

- [1] R. ASKEY et J. WILSON : *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, vol. 319. American Mathematical Soc., 1985.
- [2] B. M. AYYUB : *Uncertainty modeling and analysis in civil engineering*. CRC Press, 1997.
- [3] I. BABUŠKA, F. NOBILE et R. TEMPONE : A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3): 1005–1034, 2007.
- [4] I. BABUSKA, R. TEMPONE et G. E. ZOURARIS : Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2): 800–825, 2004.
- [5] R. BELLET, B. COCHELIN, P. HERZOG et P.-O. MATTEI : Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329:2768–2791, 2010.
- [6] P. S. BERAN, N. J. LINDSLEY, J. CAMBEROS et M. KURDI : Stochastic nonlinear aeroelasticity. Rap. tech., AIR FORCE RESEARCH LAB WRIGHT-PATTERSON AFB OH AIR VEHICLES DIRECTORATE, 2009.
- [7] B. BERGEOT et S. BELLIZZI : Asymptotic analysis of passive mitigation of dynamic instability using a nonlinear energy sink network. *Nonlinear Dynamics*, 94(2):1501–1522, 2018.
- [8] B. BERGEOT et S. BELLIZZI : Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 131:728–750, 2019.
- [9] B. BERGEOT, S. BELLIZZI et B. COCHELIN : Analysis of steady-state response regimes of a helicopter ground resonance model including a non-linear energy sink attachment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 78:72 – 89, 2016.
- [10] B. BERGEOT, S. BELLIZZI et B. COCHELIN : Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades. *Journal of Sound and Vibration*, 392:41 – 55, 2017.
- [11] B. BERGEOT, S. BERGER et S. BELLIZZI : Mode coupling instability mitigation in friction systems by means of nonlinear energy sinks : numerical highlighting and local stability analysis. *Journal of Vibration and Control*, 24(15):3487–3511, 2017.
- [12] M. BERVEILLER, B. SUDRET et M. LEMAIRE : Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3):81–92, 2006.
- [13] G. BLATMAN et B. SUDRET : Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(6):518 – 523, 2008.
- [14] E. BOROSON, S. MISSOUM, P.-O. MATTEI et C. VERGEZ : Optimization under uncertainty of parallel nonlinear energy sinks. *Journal of Sound and Vibration*, 394:451–464, 2017.

- [15] E. R. BOROSON : Optimization under uncertainty of nonlinear energy sinks, 2015.
- [16] T. D. BOWDEN F.P. : *The friction and lubrication of solids*, vol. 19. Clarendon, Oxford, 1950.
- [17] G. E. BOX : Evolutionary operation : A method for increasing industrial productivity. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 6(2):81–101, 1957.
- [18] O. BRAYDI : *Modélisation et démarche d’optimisation robuste sous incertitudes pour l’ingénierie mécanique*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes Université Libanaise, 2018.
- [19] O. BRAYDI, P. LAFON et R. YOUNES : On the formulation of optimization problems under uncertainty in mechanical design. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 13(1):75–87, jun 2018.
- [20] P. BRYK, S. BELLIZZI et R. CÔTE : Experimental study of a hybrid electro-acoustic nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 424:224 – 237, 2018.
- [21] P.-Y. BRYK, R. CÔTE et S. BELLIZZI : Targeted energy transfer from a resonant room to a hybrid electro-acoustic nonlinear membrane absorber : Numerical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 460:114868, 2019.
- [22] R. CAMERON et W. MARTIN : The orthogonal development of non-linear functionals in series of fourier-hermite functionals. *Annals of Mathematics*, 48(2):385–392, 1947.
- [23] E. CATALDO, S. BELLIZZI et R. SAMPAIO : Free vibrations of an uncertain energy pumping system. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6815–6828, 2013.
- [24] F. CHEVILLOT : *Dynamique non-linéaire des instabilités vibratoires induites par le frottement dans les freins aéronautiques : études numériques et confrontations essais-simulations*. Thèse de doctorat, 2009. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis et Sinou, Jean-Jacques Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2009.
- [25] F. CHEVILLOT, J.-J. SINOUE, G.-B. MAZET, N. HARDOUIN et L. JEZEQUEL : The destabilization paradox applied to friction-induced vibrations in an aircraft braking system. *Archive of Applied Mechanics*, 78:949–963, 2008.
- [26] N. COUDEYRAS : *Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein*. Thèse de doctorat, 2009. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis et Sinou, Jean-Jacques Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2009.
- [27] T. CRESTAUX, O. LE MAITRE et J.-M. MARTINEZ : Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1161–1172, 2009.
- [28] H. DAI, A. ABDELKEFI et L. WANG : Vortex-induced vibrations mitigation through a nonlinear energy sink. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 42:22–36, jan 2017.
- [29] K. DAMMAK : *Prise en compte des incertitudes des problèmes en vibro-acoustiques (ou interaction fluide-structure)*. Thèse de doctorat, 2018. Thèse de doctorat dirigée par El Hami, Abdelkhalak et Haddar, Mohamed Mécanique Normandie 2018.
- [30] E. DENIMAL, L. NECHAK, J.-J. SINOUE et S. NACIVET : Kriging surrogate models for predicting the complex eigenvalues of mechanical systems subjected to friction-induced vibration. *Shock and Vibration*, 2016:1–22, 2016.
- [31] E. DENIMAL, L. NECHAK, J.-J. SINOUE et S. NACIVET : A new surrogate modeling method associating generalized polynomial chaos expansion and kriging for mechanical systems subjected to friction-induced vibration. In N. DERVILIS, éd. : *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, p. 17–23, Cham, 2017. Springer International Publishing.

- [32] E. DENIMAL, L. NECHAK, J.-J. SINOUE et S. NACIVET : A novel hybrid surrogate model and its application on a mechanical system subjected to friction-induced vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 434:456–474, nov 2018.
- [33] O. DESSOMBZ : *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, 2000. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis Sciences. Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2000.
- [34] T. DETROUX, G. HABIB, L. MASSET et G. KERSCHEN : Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60:799–809, 2015.
- [35] F. DJEMAL : *Analyse et optimisation des batteurs dynamiques non linéaires*. Thèse de doctorat, 2015. Thèse de doctorat dirigée par Tawfiq, Imad et Haddar, Mohamed Génie mécanique Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris 2015.
- [36] H. DO, F. MASSA, T. TISON et B. LALLEMAND : A global strategy for the stability analysis of friction induced vibration problem with parameter variations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84:346–364, 2017.
- [37] N. DOLATABADI, S. THEODOSSIADES et S. ROTHBERG : Design optimization study of a nonlinear energy absorber for internal combustion engine pistons. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 13(9):090910, 2018.
- [38] I. ENEVOLDSEN et J. SØRENSEN : Reliability-based optimization in structural engineering. *Structural Safety*, 15(3):169 – 196, 1994.
- [39] G. S. FISHMAN : *Monte Carlo*. Springer New York, 1996.
- [40] D. M. FRANGOPOL et K. MAUTE : Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. *Computers & Structures*, 81(7):397 – 410, 2003.
- [41] G. FRITZ, J.-J. SINOUE, J.-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Effects of damping on brake squeal coalescence patterns – application on a finite element model. *Mechanics Research Communications*, 34(2):181 – 190, 2007.
- [42] G. FRITZ, J.-J. SINOUE, J.-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3):591–609, 2007.
- [43] O. GENDELMAN, A. VAKAKIS, L. BERGMAN et D. MCFARLAND : Asymptotic analysis of passive nonlinear suppression of aeroelastic instabilities of a rigid wing in subsonic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(5):1655–1677, 2010.
- [44] O. V. GENDELMAN : Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 25(1):237–253, Jul 2001.
- [45] O. V. GENDELMAN : Targeted energy transfer in systems with external and self-excitation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 225(9):2007–2043, 2011.
- [46] O. V. GENDELMAN : Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 331(21):4599–4608, 2012.
- [47] O. V. GENDELMAN et T. BAR : Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink. *Physica D*, 239(3-4):220–229, fév. 2010.
- [48] R. G. GHANEM et P. D. SPANOS : *Stochastic Finite Element Method : Response Statistics*, p. 101–119. Springer New York, New York, NY, 1991.
- [49] R. G. GHANEM et P. D. SPANOS : *Stochastic finite elements : A spectral approach*. 1991.
- [50] E. GOURC, S. SEGUY, G. MICHON, A. BERLIOZ et B. MANN : Quenching chatter instability in turning process with a vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 355(December):392–406, 2015.

- [51] E. GOURDON et C.-H. LAMARQUE : Nonlinear energy sink with uncertain parameters. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 1(3):187–195, 2006.
- [52] A. GUERINE, A. EL HAMI, L. WALHA, T. FAKHFAKH et M. HADDAR : Dynamic response of a spur gear system with uncertain parameters. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54(3):1039–1049, 2016.
- [53] A. GUERINE, A. E. HAMI, L. WALHA, T. FAKHFAKH et M. HADDAR : A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 59:76 – 84, 2016.
- [54] G. HABIB, T. DETROUX, R. VIGUIÉ et G. KERSCHEN : Nonlinear generalization of Den Hartog’s equal-peak method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52-53(1):17–28, 2015.
- [55] G. HABIB et G. KERSCHEN : Suppression of limit cycle oscillations using the nonlinear tuned vibration absorber. *Proc. R. Soc. A*, 2015.
- [56] L.-P. HE, H.-Z. HUANG, L. DU, X.-D. ZHANG et Q. MIAO : A review of possibilistic approaches to reliability analysis and optimization in engineering design. In J. A. JACKO, éd. : *Human-Computer Interaction. HCI Applications and Services*, p. 1075–1084, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer Berlin Heidelberg.
- [57] B. HERVÉ : *crissement d’embrayage : analyses linéaire, non-linéaire et étude expérimentale*. Thèse de doctorat, 2009. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2009.
- [58] B. HERVÉ, J.-J. SINOU, H. MAHÉ et L. JÉZÉQUEL : Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(2):141–160, mar 2008.
- [59] S. HIJAZI, G. STABILE, A. MOLA et G. ROZZA : Non-intrusive polynomial chaos method applied to full-order and reduced problems in computational fluid dynamics : a comparison and perspectives, 2019.
- [60] N. HOFFMANN, M. FISCHER, R. ALLGAIER et L. GAUL : A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics Research Communications*, 29(4):197 – 205, 2002.
- [61] N. HOFFMANN et L. GAUL : Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *{ZAMM} - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 83(8):524–534, 2003.
- [62] J. H. HOLLAND *et al.* : *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press, 1992.
- [63] J. HULTÉN : Brake squeal - a self-exciting mechanism with constant friction. In *SAE Truck and Bus Meeting, Detroit, Mi, USA*, 1993.
- [64] J. HULTÉN : Friction phenomena related to drum brake squeal instabilities. In *ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, CA*, 1997.
- [65] G. HUREL : *Simulation du comportement vibratoire non linéaire induit par frottement des freins aéronautiques*. Thèse de doctorat, 2014. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis et Besset, Sébastien Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2014.
- [66] R. A. IBRAHIM : Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos—Part II : Dynamics and modeling. *Applied Mechanics Reviews*, 47(7):227–253, 1994.
- [67] H. JENSEN, M. VALDEBENITO, G. SCHUËLLER et D. KUSANOVIC : Reliability-based optimization of stochastic systems using line search. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(49):3915 – 3924, 2009.

- [68] C. JONES : Geometric singular perturbation theory. In R. JOHNSON, éd. : *Dynamical Systems*, vol. 1609 de *Lecture Notes in Mathematics*, p. 44–118. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [69] M. KAMIŃSKI : Stochastic perturbation approach to engineering structure vibrations by the finite difference method. *Journal of Sound and Vibration*, 251(4):651 – 670, 2002.
- [70] M. KANI, S. E. KHADEM, M. H. PASHAEI et M. DARDEL : Design and performance analysis of a nonlinear energy sink attached to a beam with different support conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 230(4):527–542, 2016.
- [71] J. KENNEDY et R. EBERHART : Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. IEEE.
- [72] M. KHAZAEI, S. KHADEM, A. MOSLEMI et A. ABDOLLAHI : A comparative study on optimization of multiple essentially nonlinear isolators attached to a pipe conveying fluid. *Mechanical Systems and Signal Processing*, p. 106442, 2019.
- [73] D. T. KIEU, B. BERGEOT, M.-L. GOBERT et S. BERGER : Stability analysis of a clutch system with uncertain parameters using sparse polynomial chaos expansions. *Mechanics & Industry*, 20(1):104, 2019.
- [74] N. KINKAID, O. O'REILLY et P. PAPADOPOULOS : Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 267(1):105 – 166, 2003.
- [75] R. H. KRAICHNAN : Kolmogorov's hypotheses and eulerian turbulence theory. *Physics of Fluids*, 7(11):1723, 1964.
- [76] D. G. KRIGE : A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 52(6):119–139, 1951.
- [77] P. KUMAR, S. NARAYANAN et S. GUPTA : Targeted energy transfer in stochastically excited system with nonlinear energy sink. *European Journal of Applied Mathematics*, 30(5):869–886, 2019.
- [78] C.-H. LAMARQUE, O. V. GENDELMAN, A. TURE SAVADKOOHI et E. ETCHEVERRIA : Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink. *Acta Mechanica*, 221(1):175, May 2011.
- [79] S. H. LEE et W. CHEN : A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box-type problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3):239–253, may 2008.
- [80] Y. S. LEE, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN et D. M. MCFARLAND : Suppression of limit cycle oscillations in the van der Pol oscillator by means of passive non-linear energy sinks. *Structural Control and Health Monitoring*, 13(1):41–75, jan. 2006.
- [81] Y. S. LEE, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND et G. KERSCHEN : Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1 : Theory. *AIAA Journal*, 45(3):693–711, mars 2007.
- [82] Y. S. LEE, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND et G. KERSCHEN : Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2 : Experiments. *AIAA Journal*, 45(3):2391–2400, mars 2007.
- [83] Y. S. LEE, A. F. VAKAKIS, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND, G. KERSCHEN, F. NUCERA, S. TSAKIRTZIS et P. N. PANAGOPOULOS : Passive non-linear targeted energy transfer and its applications to vibration absorption : A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K : Journal of Multi-body Dynamics*, 222(2):77–134, jun 2008.
- [84] N. LELIÈVRE, P. BEAUREPAIRE, C. MATTRAND, N. GAYTON et A. OTSMANE : On the consideration of uncertainty in design : optimization - reliability - robustness. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54:1423–1437, 2016.

- [85] M. LEMAIRE : *Mécanique et incertain*. ISTE editions, London, 2014.
- [86] Z. LI, H. OUYANG et Z. GUAN : Nonlinear friction-induced vibration of a slider–belt system. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(4), may 2016.
- [87] X. LORANG : *Instabilité des structures en contact frottant : Application au crissement des freins à disque de TGV*. Theses, Ecole Polytechnique X, oct. 2007.
- [88] A. LOYER : *NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF RAILWAY BRAKE SQUEAL*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, mai 2012.
- [89] H. LÜ et D. YU : Brake squeal reduction of vehicle disc brake system with interval parameters by uncertain optimization. *Journal of Sound and Vibration*, 333(26):7313 – 7325, 2014.
- [90] J. LUO, N. E. WIERSCHEM, S. A. HUBBARD, L. A. FAHNESTOCK, D. D. QUINN, D. M. MCFARLAND, B. F. SPENCER, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN : Large-scale experimental evaluation and numerical simulation of a system of nonlinear energy sinks for seismic mitigation. *Engineering Structures*, 77:34–48, oct 2014.
- [91] L. MANEVITCH : Complex representation of dynamics of coupled nonlinear oscillators. In L. UVAROVA, A. ARINSTEIN et A. LATYSHEV, édés : *Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media*, p. 269–300. Springer US, 1999.
- [92] F. MASSA, H. Q. DO, T. TISON et O. CAZIER : Uncertain Friction-Induced Vibration Study : Coupling of Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, and Interval Theories. *ASCE-ASME J Risk and Uncert in Engrg Sys Part B Mech Engrg*, 2(1), 11 2015. 011008.
- [93] F. MASSA, B. LALLEMAND, T. TISON et P. LEVEL : Fuzzy eigensolutions of mechanical structures. *Engineering Computations*, 21(1):66–77, 2004.
- [94] G. MATHERON : Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58:1246–1266, 1963.
- [95] D. M. MCFARLAND, L. A. BERGMAN et A. F. VAKAKIS : Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(6):891–899, 2005.
- [96] M. MCKAY, R. BECKMAN et W. CONOVER : A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245, 1979.
- [97] N. MESLEM, N. RAMDANI et Y. CANDAU : Interval observers for uncertain nonlinear systems. application to bioreactors. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):9667 – 9672, 2008. 17th IFAC World Congress.
- [98] R. E. MOORE : *Interval analysis*, vol. 4. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [99] A. NASR, C. MRAD et R. NASRI : A study of friction vibration absorber : impact of friction modeling on the efficacy of the absorber and friction coefficient optimization. *Mechanics & Industry*, 19(6):602, 2018.
- [100] A. H. NAYFEH : *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 1973.
- [101] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK : *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, Ltd, 1995.
- [102] B. NAYFEH, A. H. : *Applied nonlinear dynamics-Analytical, computational and experimental methods*. 1995.
- [103] L. NECHAK : *Approches robustes du comportement dynamique des systèmes non linéaires : Application aux systèmes frottants*. Thèse de doctorat, Mulhouse, 2011.
- [104] L. NECHAK, S. BERGER et E. AUBRY : A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(4):594 – 607, 2011.

- [105] L. NECHAK, S. BERGER et E. AUBRY : Prediction of random self friction-induced vibrations in uncertain dry friction systems using a multi-element generalized polynomial chaos approach. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(4):041015, 2012.
- [106] L. NECHAK, S. BERGER et E. AUBRY : Non-intrusive generalized polynomial chaos for the robust stability analysis of uncertain nonlinear dynamic friction systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(5):1204 – 1215, 2013.
- [107] L. NECHAK, S. BESSET et J.-J. SINOÛ : Robustness of stochastic expansions for the stability of uncertain nonlinear dynamical systems – application to brake squeal. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 111:194–209, oct 2018.
- [108] L. NECHAK, F. GILLOT, S. BESSET et J.-J. SINOÛ : Sensitivity analysis and kriging based models for robust stability analysis of brake systems. *Mechanics Research Communications*, 69:136 – 145, 2015.
- [109] T. A. NGUYEN et S. PERNOT : Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks—part 1 : transient regime. *Nonlinear Dynamics*, 69(1-2):1–19, nov 2011.
- [110] A. NOBARI : *Uncertainty Quantification of Brake Squeal Listability Via Surrogate Modelling*. Thèse de doctorat, University of Liverpool, 2015.
- [111] A. NOBARI, H. OUYANG et P. BANNISTER : Uncertainty quantification of squeal instability via surrogate modelling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60-61:887–908, aug 2015.
- [112] A. NOUY : Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3):251–285, may 2009.
- [113] F. NUCERA, A. F. VAKAKIS, D. M. MCFARLAND, L. A. BERGMAN et G. KERSCHEN : Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation. *Nonlinear Dynamics*, 50(3): 651–677, jan 2007.
- [114] W. OBERKAMPF, J. HELTON et K. SENTZ : Mathematical representation of uncertainty. In *19th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, jun 2001.
- [115] J. ODEN et J. MARTINS : Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1):527–634, 1985.
- [116] M. OLIVA, G. BARONE et G. NAVARRA : Optimal design of nonlinear energy sinks for {SDOF} structures subjected to white noise base excitations. *Engineering Structures*, 145:135 – 152, 2017.
- [117] K. N. OTTO et E. K. ANTONSSON : Extensions to the taguchi method of product design. *Journal of Mechanical Design*, 115(1):5–13, mar 1993.
- [118] M. PAPADRAKAKIS et A. KOTSOPULOS : Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168(1):305 – 320, 1999.
- [119] G. PENNISI : *Passive vibration control by using Nonlinear Energy Sink absorbers. Theoretical study and experimental investigations*. Theses, INSTITUT SUPERIEUR DE L’AERONAUTIQUE ET DE L’ESPACE (ISAE), nov. 2016.
- [120] P. PETTERSSON, A. DOOSTAN et J. NORDSTRÖM : Level set methods for stochastic discontinuity detection in nonlinear problems. *Journal of Computational Physics*, 392:511–531, sep 2019.
- [121] B. PIDAPARTHI et S. MISSOUM : Optimization of nonlinear energy sinks for the mitigation of limit cycle oscillations. In *2018 Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, jun 2018.

- [122] B. PIDAPARTHI et S. MISSOUM : Stochastic optimization of nonlinear energy sinks for the mitigation of limit cycle oscillations. *AIAA Journal*, p. 1–11, jan 2019.
- [123] A. PREUMONT : *Vibration control of active structures : an introduction*, vol. 246. Springer, 2018.
- [124] D. QIU, T. LI, S. SEGUY et M. PAREDES : Efficient targeted energy transfer of bistable nonlinear energy sink : application to optimal design. *Nonlinear Dynamics*, 92(2):443–461, Apr 2018.
- [125] D. QIU, S. SEGUY et M. PAREDES : Design criteria for optimally tuned vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 442:497 – 513, 2019.
- [126] A. RENAULT, F. MASSA, B. LALLEMAND et T. TISON : Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 367:37 – 55, 2016.
- [127] T. P. SAPSIS, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN : Effect of stochasticity on targeted energy transfer from a linear medium to a strongly nonlinear attachment. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26(2):119 – 133, 2011.
- [128] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Stochastic analysis of the eigenvalue problem for mechanical systems using polynomial chaos expansion— application to a finite element rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(5), jun 2012.
- [129] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 40:1–10, 2013.
- [130] C. A. SCHENK et G. I. SCHUËLLER : *Uncertainty assessment of large finite element systems*, vol. 24. Springer Science & Business Media, 2005.
- [131] G. SCHUËLLER : Computational stochastic mechanics – recent advances. *Computers & Structures*, 79(22):2225 – 2234, 2001.
- [132] H. SHAH, S. HOSDER, S. KOZIEL, Y. A. TESFAHUNEGB et L. LEIFSSON : Multi-fidelity robust aerodynamic design optimization under mixed uncertainty. *Aerospace Science and Technology*, 45:17 – 29, 2015.
- [133] K. SHAHRIARI : Analyse de sûreté de procédés multi-modes par des méthodes à base d’intervalles. 2007.
- [134] A. SHAPIRO : Monte carlo sampling methods. In *Stochastic Programming*, vol. 10 de *Handbooks in Operations Research and Management Science*, p. 353 – 425. Elsevier, 2003.
- [135] J.-J. SINOÛ : *Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, nov. 2002.
- [136] J.-J. SINOÛ et L. JÉZÉQUEL : The influence of damping on the limit cycles for a self-exciting mechanism. *Journal of Sound and Vibration*, 304(3):875 – 893, 2007.
- [137] J. J. SINOÛ et L. JÉZÉQUEL : Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 26(1):106–122, 2007.
- [138] J.-J. SINOÛ, L. NECHAK et S. BESSET : Kriging metamodeling in rotordynamics : application for predicting critical speeds and vibrations of a flexible rotor. *Complexity*, 2018, 2018.
- [139] J.-J. SINOÛ, F. THOUVEREZ et L. JEZEQUEL : Analysis of friction and instability by the centre manifold theory for a non-linear sprag-slip model. *Journal of Sound and Vibration*, 265(3):527–559, aug 2003.
- [140] J. J. SINOÛ, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL : Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 11(3):257–344, Sep 2004.

- [141] H. SLEIMAN : *AUTOMOTIVE SEMI-ACTIVE SUSPENSION BASED ON MAGNETO-RHEOLOGICAL FLUID*. Theses, Arts et Métiers ParisTech, juin 2010.
- [142] C. SNOUN, B. BERGEOT et S. BERGER : Prediction of the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to nonlinear energy sinks using a multi-element generalized polynomial chaos approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 80:103917, mar 2020.
- [143] Y. STAROSVETSKY et O. GENDELMAN : Strongly modulated response in forced 2DOF oscillatory system with essential mass and potential asymmetry. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(13):1719–1733, aug 2008.
- [144] G. TAGUCHI et A. P. ORGANIZATION : *Introduction to quality engineering : designing quality into products and processes*. The Organization, 1986.
- [145] S. K. THOMPSON : *Sampling*. John Wiley & Sons, Inc., feb 2012.
- [146] T. TISON, A. HEUSSAFF, F. MASSA, I. TURPIN et R. NUNES : Improvement in the predictivity of squeal simulations : Uncertainty and robustness. *Journal of Sound and Vibration*, 333(15): 3394 – 3412, 2014.
- [147] M. TRINH : *Etude du comportement dynamique d'un systèmes d'embrayage en présence d'incertitudes*. Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace, 2015.
- [148] M. TRINH, S. BERGER et E. AUBRY : Stability analysis of a clutch system with multi-element generalized polynomial chaos. *Mechanics & Industry*, 17(2):205, 2016.
- [149] A. TRIPATHI, P. GROVER et T. KALMÁR-NAGY : On optimal performance of nonlinear energy sinks in multiple-degree-of-freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*, 388:272 – 297, 2017.
- [150] Y. TSOMPANAKIS, N. D. LAGAROS et M. PAPADRAKAKIS : *Structural Design Optimization Considering Uncertainties : Structures & Infrastructures Book, Vol. 1, Series, Series Editor : Dan M. Frangopol*. CRC Press, 2008.
- [151] A. VAKAKIS, O. GENDELMAN, L. BERGMAN, D. MCFARLAND, G. KERSCHEN et Y. LEE : Nonlinear targeted energy transfer in discrete linear oscillators with single-dof nonlinear energy sinks. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, p. 93–302, 2009.
- [152] A. F. VAKATIS, O. GENDELMAN, L. a. BERGMAN, D. M. MCFARLAND, G. KERSCHEN et Y. LEE : *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Num. 156. Springer, 2009.
- [153] A. F. VAKATIS, O. V. GENDELMAN, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND, G. KERSCHEN et Y. S. LEE : *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 2008.
- [154] X. WAN et G. E. KARNIADAKIS : An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 209(2):617 – 642, 2005.
- [155] G. G. WANG : Adaptive response surface method using inherited latin hypercube design points. *Journal of Mechanical Design*, 125(2):210–220, jun 2003.
- [156] J. WANG, N. E. WIERSCHEM, B. WANG et B. F. SPENCER : Multi-objective design and performance investigation of a high-rise building with track nonlinear energy sinks. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, nov 2019.
- [157] G. B. Warburton : Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 10(3):381–401, may 1982.
- [158] N. WIENER : The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897, oct 1938.

- [159] N. WIERSCHEM, B. SPENCER JR, L. BERGMAN et A. VAKAKIS : Numerical study of nonlinear energy sinks for seismic response reduction. *In Proceedings of the 6 th International Workshop on Advanced Smart Materials and Smart Structures Technology (ANCRiSST 2011)*, p. 25–26, 2011.
- [160] D. XIU et G. KARNIADAKIS : The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644, 2002.
- [161] W. YAO, X. CHEN, W. LUO, M. van TOOREN et J. GUO : Review of uncertainty-based multidisciplinary design optimization methods for aerospace vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 47(6):450 – 479, 2011.
- [162] L. ZADEH : Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965.

Annexe A

Articles et Conférences

A.1 Article dans une revue internationale

[1] Cherif SNOUN, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Prediction of the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to nonlinear energy sinks using a multi-element generalized polynomial chaos approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 80 :103917, 2020.

A.2 Conférences et Séminaires

[1] Cherif SNOUN, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Study of dynamic instability vibration mitigation in an uncertain dry friction systems coupled nonlinear energy sinks using generalized polynomial chaos. *Séminaire franco-polonais de mécanique*, Bourges, 2017.

[2] Cherif SNOUN, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Robust optimization of nonlinear energy sinks used for dynamic instabilities mitigation of an uncertain friction system. *SURVISHNO*, Lyon, 2019.

[3] Cherif SNOUN, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Generalized Polynomial Chaos for robust modelling of Nonlinear Energy Sinks used to mitigate dynamic instabilities in braking systems. *23ème Congrès Français de Mécanique*, Brest, 2019.

Cherif SNOUN

Contrôle passif des vibrations des systèmes mécaniques à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires avec prise en compte des incertitudes

Résumé

Les absorbeurs non linéaires de type NES ont montré leur efficacité comme solution de contrôle passif des vibrations en conciliant les avantages des technologies antérieures. Cependant, le comportement dynamique du système couplé constitué de l'absorbeur et du système primaire à protéger peut s'avérer très sensible aux paramètres qui admettent une dispersion importante. Notamment lorsqu'il s'agit d'atténuer une instabilité dynamique une discontinuité dans le profil de l'amplitude vibratoire du système peut s'observer, ce dernier passant brutalement d'un régime atténué à un régime non atténué. Un régime non atténué étant potentiellement dangereux, il est important de concevoir, en prenant en compte les incertitudes paramétriques, un absorbeur fonctionnant au maximum dans la région de l'espace des paramètres incertains correspondant à des régimes non atténués. Dans un premier temps ce travail propose des méthodes basées sur le formalisme du chaos polynomial pour localiser, dans l'espace des paramètres incertains, la frontière entre la région correspondant aux régimes atténués et celle correspondant aux régimes non atténués. Ensuite, une méthodologie d'optimisation robuste des absorbeurs sous incertitudes est développée. L'efficacité des méthodes proposées à réduire significativement le coût de calcul en gardant une bonne précision est mise en évidence.

Mots-clés : dynamiques non linéaire, contrôle passif des vibrations, absorbeurs dynamiques non linéaires, incertitudes, chaos polynomial, optimisation robuste.

Résumé en anglais

The use of passive nonlinear absorbers called Nonlinear Energy Sink (NES) has proven its effectiveness as an alternative solution for passive vibration control by combining the advantages of the earlier technologies. However, the dynamic behaviour of the coupled system consisting of the NES and of the primary system to be protected can be very sensitive to parameters with high dispersion. In particular, when mitigating dynamic instabilities, a discontinuity in the vibration amplitude profile of the system can be observed, the latter switches suddenly from a mitigated regime to an unmitigated regime. Since an unmitigated regime is potentially dangerous, it is important to be able, taking into account the parameter uncertainties that the primary system may face, to design an NES that is robust, i.e. operating at maximum within the region of the uncertain parameters space corresponding to unmitigated regimes of the primary system. First, methods based on the polynomial chaos theory are proposed for locating, in the uncertain parameters space of the primary system, the boundary between the region corresponding to mitigated regimes and that corresponding to unmitigated regimes. Then, a methodology of optimization under uncertainty of the NES is developed. The efficiency of the proposed methods to significantly reduce the computation cost while maintaining of good precision of the PHSSR predictions is highlighted.

Keywords : nonlinear dynamics, passive vibration control, nonlinear energy sink, uncertainties, polynomial chaos, robust optimization.