UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale Santé, Sciences, Technologies

LABORATOIRE DE MATHÉMATHIQUES ET PHYSIQUE THÉORIQUE

THÈSE présenté par :

Julien GARAUD

soutenue publiquement le : 29 septembre 2010

pour obtenir le grade de : Docteur de l'Université François - Rabelais

Discipline/ Spécialité : Physique Théorique

VORTEX SUPRACONDUCTEURS DE LA THÉORIE DE WEINBERG-SALAM

THÈSE DIRIGÉE PAR :

VOLKOV Mikhail	Professeur, Université François Rabelais

RAPPORTEURS :

BACHAS Constantin	Directeur de Recherche, École Normale Supérieure de Paris
CHAPOCHNIKOV Mikhail	Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne
SUTCLIFFE Paul	Professeur, Université de Durham

JURY :

BACHAS Constantin	Directeur de Recherche, École Normale Supérieure de Paris
CHAPOCHNIKOV Mikhail	Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne
CHERNODUB Maxim	Chargé de Recherche, Université François Rabelais
GRANDCLEMENT Philippe	Chargé de Recherche, Observatoire de Paris-Meudon
NIEMI Antti	Directeur de recherches, Université François Rabelais
VOLKOV Mikhail	Professeur, Université François Rabelais

Résumé

Nous présentons ici, l'analyse détaillée et l'étude de la stabilité de nouvelles solutions de type vortex dans le secteur bosonique de la théorie électrofaible. Les nouvelles solutions généralisent le plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans la théorie électrofaible et reproduisent les résultats précédemment connus.

Les vortex, génériquement porteurs d'un courant électrique, sont constitués d'un coeur massif de bosons chargés W entouré d'une superposition non-linéaire de champs Z et Higgs. Au loin la solution est purement électromagnétique avec un potentiel de Biot et Savart. Les solutions sont génériques de la théorie et existent en particulier pour les valeurs expérimentales des constantes de couplage. Il est en particulier démontré que le courant dont l'échelle typique est le *milliard* d'Ampères peut être arbitrairement grand.

Dans un second temps la stabilité linéaire des vortex supraconducteurs vis-à-vis des perturbations génériques est considérée. Le spectre de l'opérateur de fluctuations est étudié qualitativement. Lorsque des modes instables sont détectés, ils sont explicitement construits ainsi que leurs relations de dispersion. La plupart des modes instables sont supprimés par une périodisation du vortex. Il subsiste cependant un unique mode instable homogène. On peut espérer qu'un tel mode puisse être supprimé par des effets de courbure si une portion de vortex est refermée afin de former une boucle stabilisée par le courant électrique.

Mots clés : Théorie électrofaible, solitons, vortex supraconducteurs, stabilité.

Abstract

In this dissertation, we analyze in detail the properties of new string-like solutions of the bosonic sector of the electroweak theory. The new solutions are current carrying generalizations of embedded Abrikosov-Nielsen-Olesen vortices. We were also able to reproduce all previously known features of vortices in the electroweak theory.

Generically vortices are current carrying. They are made of a compact conducting core of charged W bosons surrounded by a nonlinear superposition of Z and Higgs field. Faraway from the core, the solution is described by purely electromagnetic Biot and Savart field. Solutions exist for generic parameter values including experimental values of the coupling constants. We show that the current whose typical scale is the *billion* of Ampères can be arbitrarily large.

In the second part the linear stability with respect to generic perturbations is studied. The fluctuation spectrum is qualitatively investigated. When negative modes are detected, they are explicitly constructed and their dispersion relation is determined. Most of the unstable modes can be eliminated by imposing periodic boundary conditions along the vortex. However there remains a unique negative mode which is homogeneous. This mode can probably be eliminated by curvature effects if a small piece of vortex is bent into a loop, stabilized against contraction by the electric current.

Keywords : Electroweak theory, solitons, superconducting strings, stability.

Table des matières

Introduction **19**

I Cadre Théorique et contexte historique **25**

1 Généralités sur les théories de jauge **27**

1.1 Brisure spontanée de symétrie 28

1.1.1 Théorème de Goldstone – Brisure d'une symétrie globale 28

1.1.2 Mécanisme de Higgs – Brisure d'une symétrie locale 30

1.1.3 Généralisation 31

1.2 Formation de défauts et transitions de phases 31

1.3 Quelques notions de supraconductivité – Les vortex en matière condensée . 33

2 Les Vortex en théories de jauge **39**

2.1 Modèle de Higgs abélien 39

2.1.1 Le Modèle 39

2.1.2 Les solutions de Nielsen et Olesen 41

2.1.3 Propriétés physiques des vortex 43

2.2 Vortex supraconducteurs – Le modèle de Witten 44

2.2.1 Le modèle de Witten 44

2.2.2 Les vortex supraconducteurs 46

2.3 Cordes Cosmiques et Motivations 49

II Vortex supraconducteurs dans la théorie de Weinberg-Salam **53**

3 Rappels sur la théorie de Weinberg-Salam **57**

3.1 Le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam 57

3.1.1 Échelle de longueurs – Variables adimensionnées 59
3.1.2 Spectre de masse de la théorie 60
3.1.3 Définition des champs physiques 61
3.2 Plongement des solutions ANO dans la théorie de Weinberg et Salam 62
3.2.1 Z-strings et W-strings 63
3.2.2 Instabilité du plongement 63
3.2.3 Condensation de bosons chargés W 67

4 Construction des vortex supraconducteurs électrofaibles 69
4.1 Réduction de symétrie 69
4.1.1 Équation des champs 71
4.1.2 Énergie 72
4.2 Conditions aux bords et quantités conservées 73
4.2.1 Conditions sur l'axe de symétrie 73
4.2.2 Conditions asymptotiques 75
4.2.3 Calcul des quantités conservées 77
4.3 Rappel des solutions déjà connues 80
4.3.1 Z-strings 80
4.3.2 W-strings 80
4.3.3 Z-strings faiblement perturbées 80

5 Propriétés physiques des solutions 83
5.1 Solutions génériques supraconductrices 83
5.1.1 Construction numérique des solutions 83
5.1.2 Description des grandeurs physiques et numériques 84
5.2 Description semi-analytique dans la limite de faibles courants 92
5.2.1 Déviation par rapport à la solution Z-string 95
5.2.2 Corrections de la déviation 97
5.2.3 Reconstruction des amplitudes et du *twist* 98
5.3 Description approchée de la limite de grands courants 100
5.3.1 Le coeur du vortex et le condensat chargé – vortex de Yang-Mills . . 102
5.3.2 La région externe 103
5.3.3 Reconstruction de la solution – Restauration de la symétrie 104
5.4 Limites spéciales de la théorie 108
5.4.1 Limite semilocale d'hypercharge ($\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$) 108
5.4.2 Limite semilocale d'isospin ($\theta_{\mathrm{W}} = 0$) 110
5.4.3 Limite du Higgs infiniment massif 113
5.4.4 Solutions chirales 115
5.5 Manifestations physiques 117

III Étude de stabilité des solutions **121**

6 Perturbation des vortex **125**

6.1 Séparation de variables . . . 126
6.2 Fixation de la jauge et modes physiques . . . 128
6.3 Réduction au problème de Schrödinger . . . 130
6.3.1 Conditions aux bords . . . 131
6.4 Analyse qualitative de l'opérateur des perturbations – Critère de Jacobi . . . 132
6.4.1 Z-strings . . . 133
6.4.2 Vortex supraconducteur élémentaire ($n = 1$) . . . 134
6.4.3 Multivortex ($n > 1$) . . . 135

7 Analyse quantitative de l'instabilité **139**

7.1 Résultats généraux . . . 139
7.2 Étude semi-analytique dans la limite de faibles courants . . . 141
7.2.1 Construction de la base d'états propres – Solutions à l'ordre zéro . . . 143
7.2.2 Analyse des perturbations . . . 144
7.3 Étude dans la limite de grands courants . . . 146
7.4 Manifestation de l'instabilité . . . 148
7.5 Vortex supraconducteurs chargés . . . 150

Conclusion **155**

Annexes **159**

A Méthodes numériques **159**

A.1 Résolution numérique des équations différentielles . . . 159
A.1.1 Problème aux valeurs initiales . . . 160
A.1.2 Problème avec conditions aux bords – Principe du Multishooting . . . 160
A.2 Exemple concret – ANO . . . 163

B Compléments sur l'analyse dans le régime des faibles courants du vortex supraconducteur **167**

B.0.1 Corrections au second ordre du développement en séries . . . 167
B.0.2 Corrections au troisième ordre du développement en séries . . . 169

C Détails de l'opérateur des perturbations **171**

C.1 Allure explicite de l'opérateur de Schrödinger 171

C.2 Compléments de l'étude de stabilité dans le régime de courants faibles . . . 173

C.2.1 Remarques supplémentaires sur l'état fondamental 174

C.2.2 Secteur d'ondes libres 175

C.2.3 Secteur des fantômes 176

C.2.4 Secteur d'ANO 176

C.2.5 Le cas dégénéré $\kappa = 0$ 178

Liste des tableaux

1.1 Classification des défauts topologiques à l'aide du groupe d'homotopie $\pi_n(\mathcal{M})$. 33

7.1 Paramètres de la relation de dispersion $\omega^2(\kappa)$ pour le vortex élémentaire $n = \nu = 1$ et $\beta = 2.0$, $\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.23$. 141

Table des figures

1.1 Différentes formes du potentiel selon que la valeur du vide $\mathbf{\Phi}_0$ est imaginaire ou réelle. La surface bleue ($\mathbf{\Phi}_0^2 < 0$) possède un unique minimum absolu, tandis que la surface rouge ($\mathbf{\Phi}_0^2 > 0$) possède plusieurs extrema et l'état fondamental est dégénéré. 29

1.2 Exemples de transitions de phases pour un potentiel effectif dépendant de la température. À Gauche : transition du premier ordre où l'état fondamental lorsque $T > T_c$ reste métastable après la transition ($T < T_c$). À Droite : transition du second ordre où l'état fondamental lorsque $T > T_c$ devient instable après la transition ($T < T_c$) on parle aussi de 'faux vide'. 32

1.3 À gauche : Profile du paramètre d'ordre et du champ magnétique à l'interface d'un supraconducteur. À droite : Représentation d'un vortex d'Abrikosov où les supercourants entourent le coeur normal. 35

1.4 À gauche : Diagramme de phase d'un supraconducteur de type I. À droite : Diagramme de phase d'un supraconducteur de type II. 36

2.1 À gauche : Les profils des amplitudes des vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen pour $n = 1$ et $\beta = 2$. À droite : Les densités d'énergie et de flux magnétique correspondantes. 42

2.2 Représentation des grandeurs physiques pertinentes du vortex fondamental $n = 1$, ($\beta = 2$), dans le plan orthogonal au vortex. À gauche : la densité radiale d'énergie $\mathcal{E}_{\text{ANO}}$. À droite : le flux magnétique Ψ_{ANO}. Ces grandeurs sont localisées au coeur du vortex. 43

2.3 Amplitudes des solutions dans le modèle de Witten, pour les paramètres du modèle $\eta_1 = g_1 = g_2 = 1$, $\eta_2 = 0.31$, $\gamma = 0.6$, $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 10$. À Gauche : la solution générique porteuse de courant. À Droite : la solution 'habillée'. 48

2.4 À Gauche : Destruction du supercourant par 'extinction' du condensat scalaire. À Droite : L'énergie magnétique des solutions interpole entre deux solutions sans courant. La première est Abrikosov-Nielsen-Olesen plongée et l'autre est la solution *habillée*. 48

2.5 À Gauche : exemple d'intercommutation de deux cordes cosmiques. À Droite : exemples de formation de vortons. 50

3.1 Les amplitudes solutions du problème de Schrödinger pour des valeurs physiques des paramètres de la théorie $\sin^2\theta_W = 0.23$ et $\beta = 2$. À gauche : $n = \nu = 1$ et la valeur propre $\sigma^2 = 0.5036$ À droite : $n = 1, \nu = 2$ et la valeur propre $\sigma^2 = -0.0876$ 64

3.2 La valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction du rapport de masses β pour différentes valeurs de $\sin^2\theta_W = g'^2$ de la solution $n = \nu = 1$. À droite est représentée la surface $\sigma^2(\beta, \theta_W)$ de cette solution. 65

3.3 La valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction du rapport de masses β pour différentes valeurs de $\sin^2\theta_W = g'^2$ de la solution $n = 1$, $\nu = 2$. À droite est représentée la surface $\sigma^2(\beta, \theta_W)$ de cette solution. 65

3.4 Dépendance de la valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction de $\sin^2\theta_W$ pour le rapport de masses $\beta = 2$. Les valeurs des entiers n et ν sont données (n, ν). Les solutions chirales $\sigma^2 = 0$ n'existent pas de manière générique. Lorsque la condition (3.33) est violée les courbes telles que $\sigma^2 < 0$ se terminent. 66

3.5 Dépendance de la valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction de $\sin^2\theta_W$ pour le rapport de masses $\beta = 2$ de la solution de fond $n = 4$. . . 67

3.6 Courbes chirales pour différentes excitations de la solution Z-string, en fonction des valeurs différentes des paramètres de la théorie. 68

5.1 Représentation des régions interdites et des régions autorisées où il est respectivement impossible ou possible, de promouvoir les solutions du problème linéaire au niveau non-linéaire. On a représenté plusieurs 'diagrammes d'existence' pour différentes valeurs des entiers n et ν, dans le plan $(\beta, \sin^2\theta_W)$ . . 86

5.2 Amplitudes du vortex supraconducteur fondamental $(n = \nu = 1)$ pour le *twist* $\sigma = 0.6$ et les valeurs expérimentales des constantes de couplage ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_W = g'^2 = 0.23$. À gauche : Les amplitudes *électriques*. À droite : Les amplitudes *magnétiques*. 87

5.3 Paramètres numériques importants pour décrire les vortex supraconducteurs électrofaibles. Les valeurs physiques de β et θ_W sont choisies. À gauche : le paramètre du condensat q en fonction du courant. À droite : le *twist* σ en fonction de q. 89

5.4 À gauche : La densité radiale d'énergie dans le plan (x_1, x_2) orthogonal à la feuille d'univers du vortex. À droite : La densité radiale de courant $\mathcal{I}$. . . . 90

5.5 Grandeurs caractéristiques du vortex supraconducteur $(n = \nu = 1)$ pour les valeurs physiques $\beta = 2$ $\sin^2\theta_W = 0.23$ en fonction du courant. À gauche : Densité linéique d'énergie magnétique À droite : Paramètre Q (charge Coulombienne). 91

5.6 Les flux des vortex supraconducteurs pour différentes valeurs des entiers n et ν pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie $\beta = 2$ et $\sin\theta_W = 0.23$. À gauche : le flux électromagnétique, À droite : le flux Z. . . 92

5.7 À gauche : La densité de flux magnétique $B_{\hat{z}}$ dans le plan (x_1, x_2) orthogonal à la feuille d'univers du vortex. À droite : La densité de flux Z $H_{\hat{z}}$. 93

5.8 À gauche : La densité de condensat $w_{\hat{z}}$ dans le plan (x_1, x_2) orthogonal à la feuille d'univers du vortex. À droite : La densité de condensat $w_{\hat{\varphi}}$. 94

5.9 Paramètres numériques du vortex supraconducteur fondamental $(n = \nu = 1)$ dans la région physique de la théorie $\beta = 2$, $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$, en fonction du courant $\mathcal{I}$. À gauche : *twist* σ entre les composantes du champ scalaire À droite : *angle du vide* γ. 95

5.10 Paramètres numériques du vortex supraconducteur élémentaire $(n = \nu = 1)$ dans la région physique de la théorie $\beta = 2$, $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$, en fonction du courant $\mathcal{I}$. À gauche : c_1 À droite : c_2. Lorsque le courant $\mathcal{I} \to \infty$, on voit que $c_2 \to (2n - \nu)g^2$. 96

5.11 Comparaison des quantités physiques obtenues d'après l'approximation (en bleu / pointillés) à celles obtenues en résolvant le problème non-linéaire (en rouge / plein). Pour le vortex fondamental $n = \nu = 1$ et les valeurs physiques des paramètres $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$. À gauche : Le paramètre du condensat scalaire q en fonction du *twist* σ. À droite : Le *twist* σ en fonction du courant $\mathcal{I}$. 99

5.12 Comparaison des amplitudes obtenues en résolvant le problème non-linéaire (rouge / plein) avec les amplitudes reconstruites après résolution de l'approximation (bleu / pointillé), pour le *twist* $\sigma = 0.7$. À gauche : Amplitudes électriques À droite : Amplitudes magnétiques. 100

5.13 Profil des amplitudes décrivant le vortex fondamental $n = \nu = 1$ lorsque le courant est grand $(\sigma = 0.008)$ pour les valeurs physiques des paramètres $\beta = 2$ $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$. À gauche : Amplitudes électriques À droite : Amplitudes magnétiques. 101

5.14 Approximation des amplitudes dans la limite de grand courant pour le vortex élémentaire $(n = \nu = 1)$ dans la région physique de l'espace des paramètres $\beta = 2$, $\sin^2\theta_{\rm W}$. À gauche : Amplitudes au coeur du vortex, À droite : Amplitudes dans la région externe. 103

5.15 Profil des amplitudes des solutions reconstruites décrivant le vortex fondamental $n = \nu = 1$ pour les valeurs physiques des paramètres $\beta = 2$ $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$. Ici le paramètre d'échelle $\lambda = 7.6$ et donc le courant $\mathcal{I} = 24.43$. À gauche : Amplitudes électriques À droite : Amplitudes magnétiques. 105

5.16 Représentation schématique de la structure du vortex supraconducteur lorsque le courant est grand. 106

5.17 Paramètres numériques des vortex supraconducteurs élémentaires $n = \nu = 1$ lorsque $\beta = 2$. À gauche : Influence de θ_W sur le paramètre de charge Q pour une valeur fixée du condensat $q = 0.2$. On voit que Q disparaît dans les deux limites semilocales $\theta_W = 0, \pi/2$ À droite : Le twist σ en fonction de q pour différentes valeurs de θ_W. Tant que $\theta_W \neq \pi/2$ ($g^2 \neq 0$), il existe toujours une valeur maximale $q_\star$ suivie d'un rebroussement. Si $\theta_W = \pi/2$ alors $q_\star = 1$, et il n'y a pas de rebroussement. La convergence dans la limite $\theta_W \to \pi/2$ n'est pas uniforme. 107

5.18 À gauche : Amplitudes des vortex porteurs de courant dans la limite 'semi-locale d'hypercharge' ($\theta_W = \pi/2$) pour les paramètres $n = \nu = 1$ et $\beta = 2$ pour le paramètre de *twist* $\sigma = 0.1$. À droite : Énergie totale des solutions en fonction du courant du référentiel de repos pour les premières valeurs possibles des nombres d'enroulement n et ν. 110

5.19 Propriétés des solutions porteuses de courant dans la limite semilocale d'isospin ($g = 1$). À gauche : Les amplitudes du vortex fondamental $n = \nu = 1$, $\beta = 2$ et pour la valeur du paramètre de twist $\sigma = 0.5$. À droite : L'énergie totale en fonction du courant dans le système de repos. L'encart montre que l'énergie du vortex fondamental croissant plus vite que celle des 'multivortex', elles se coupent à un endroit, traduisant une force répulsive à faible courant et attractive à grand courant. 112

5.20 À gauche : Dépendance du courant en fonction de l'angle faible, lorsque le paramètre du condensat est fixé : $q = 0.2$ (et $\beta = 2$). À droite : Influence de la masse du champ scalaire (β) sur la relation $\sigma(q)$ lorsque $\sin^2\theta_W = 0.23$. On voit clairement que la structure à deux branches est préservée. 114

5.21 Amplitudes magnétiques lorsque le $\beta = \infty$ du vortex supraconducteur fondamental $n = \nu = 1$ (les amplitudes électriques n'ont pas été représentées). À gauche : $\sigma = 5$ (proche de Z-string), À droite : $\sigma = 0.3$. 115

5.22 Profils des solutions sans courant pour $n = 4$, $\nu = 7$ pour les valeurs physiques $\beta = 2$ et $\sin^2\theta_W = 0.23$. À gauche : La solution chirale exceptionnelles À droite : Z-string. 117

5.23 Paramètres physiques de la famille de solutions $n = 2$ $\nu = 3$ interpolant entre une solution chirale ($\sigma = 0, q \neq 0$) et une solution ANO ($\sigma \neq 0, q = 0$), pour les paramètres $\beta = 2$ et $\sin^2\theta_W = 0.23$. À gauche : Le courant $\mathcal{I}$ et le paramètre de twist σ. À droite : L'énergie en fonction du courant montre que la famille interpole entre deux types de solutions distinctes. 118

6.1 Déterminant de Jacobi de la perturbation axisymétrique ($m = 0$) de la solution fondamentale ($n = 1$, $\nu = 1$) sans courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_W = 0.23$ et $\beta = 2$). 134

6.2 Déterminant de Jacobi de la perturbation axisymétrique ($m = 0$) de la solution fondamentale ($n = 1$, $\nu = 1$) avec courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_W = 0.23$ et $\beta = 2$. À gauche : $\sigma = 0.7$ À droite : $\sigma = 0.6$. 135

6.3 Déterminant de Jacobi des perturbations non-axisymétriques ($m > 0$) de la solution fondamentale ($n = 1$, $\nu = 1$) avec courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$. Pour la valeur du twist $\sigma = 0.5$ À gauche : $m = 1$ À droite : $m = 2$. 136

6.4 Déterminant de Jacobi des perturbations de la solution multivortex ($n = 2$, $\nu = 2$) avec courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques des paramètres de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$. Pour la valeur du twist $\sigma = 0.6$ À gauche : Instabilité de séparation $m = 2$. À droite : Le secteur $m = 3$ est manifestement stable. 137

7.1 Relation de dispersion des modes instables axisymétriques ($m = 0$) du vortex fondamental ($n = 1$, $\nu = 1$). Seules les valeurs physiques des paramètres de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$). 140

7.2 À gauche : Paramètre $\kappa_{\rm min}$ de la relation de dispersion. Ce paramètre suggère une transition de phase. À droite : Structure à deux branches suggérant une transition de phases. 142

7.3 Approximation à la relation de dispersion en faible courant. L'approximation reproduit le résultat numérique de façon assez satisfaisante. 146

7.4 Analyse de stabilité dans le coeur du vortex supraconducteur dans la limite de grands courants, pour les valeurs physiques de la théorie ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = 0,23$). À gauche : Test de Jacobi À droite : Construction explicite de la relation de dispersion. 148

7.5 À gauche : Représentation d'un mode propre négatif agissant sur le vortex. Le mode *inhomogène*, périodique selon l'axe z du vortex et de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/\kappa$ induit une séquence de densités de charges positives et négatives. À droite : Effet des paramètres de la théorie sur le mode homogène $\kappa = 0$. On voit que le mode homogène disparaît dans la limite semilocale d'hypercharge lorsque $\theta_{\rm W} = \pi/2$ ($q = 0.1$). 149

7.6 À gauche : Les modes propres négatifs grandissent le long des lines d'histoire de l'espace-temps. Le temps dans le référentiel de repos du vortex non chargé s'écoule dans la même direction, alors que pour le vortex boosté la direction du temps est différente. Ainsi, l'instabilité ne croit pas uniquement avec $\tilde{t}$ mais également avec $\tilde{z}$. À droite : l'évolution spatiotemporelle de données initialement sur un support compact S. 151

7.7 Résultats du problème complexifié pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = 0,23$. À gauche : Relation de dispersion pour différentes valeurs du paramètre de *boost* sur le fond $\sigma = 0,7$. À droite : Effet du *boost* sur le mode homogène. 153

7.8 L'ensemble des modes négatifs pour chaque vortex chargé, par exemple $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\cosh(b)$, est représenté par les lignes verticales. Les modes propres sont les points rouges. Il existe une correspondance un à un entre les modes différents de charge différentes à l'aide de boost. 154

A.1 Représentation schématique d'un problème aux conditions aux bords résolu par *multishooting*. 162

A.2 À gauche : Problème avec conditions aux bords traité par multishooting. On a représenté un choix initial discontinu, et la solution qui est continue. À droite : Convergence de la méthode. 163

B.1 Les amplitudes solutions des équations des différents ordres pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$). À gauche : Les solutions des ordres zéro pour $n = 1$ et un pour $n = \nu = 1$. À droite : Les amplitudes solutions des équations du deuxième ordre pour $n = \nu = 1$. 169

C.1 Relation de dispersion (7.8) de l'état fondamental de l'opérateur de stabilité de Z-string (7.4). On considère les valeurs expérimentales des paramètres de la théorie ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$). Les deux paraboles (À gauche) correspondent aux états fondamentaux orthogonaux Ψ_+ et Ψ_-. En passant à la jauge (C.11) elles sont envoyées sur une même parabole (À droite). On a noté les différents points de bifurcation avec la solution supraconductrice. 174

Introduction

« *42* »

SUPERCALCULATEUR DEEP THOUGHT en réponse à l'Ultime Question de la Vie, de l'Univers et de Tout, après 7.5 millions d'années de calcul. Malheureusement la question Ultime elle même est inconnue.

Une onde solitaire, ou soliton, est une solution d'une théorie non-linéaire, qui est *localisée*, *régulière* et *non-dispersive*. La physique des solitons débute au 19e siècle avec John Scott Russel, bien qu'à cette époque on ne parlait pas encore de solitons. Russel [1] rapporta avoir été témoin, en 1834, d'une onde solitaire se propageant à la surface d'un canal en Écosse. Il décrivit une *onde solitaire*, dont la forme bien définie se propageait à vitesse constante, sans se modifier, sur une très grande distance. Il qualifia se phénomène d'*onde de translation*. Les résultats des expériences de Russel, étant difficilement explicable par les modèles d'hydrodynamique de l'époque, il fallu attendre 1895 où Korteweg et de Vries [2] proposèrent une équation aux dérivées partielles non-linéaire (l'équation KdV), qui admet des ondes solitaires comme solutions.

Contrairement aux ondes 'habituelles' qui ont des crêtes et des creux, les ondes solitaires de Russel sont formées d'un unique pic, qui ne se disperse pas. Leur structure est préservée dans le temps grâce à l'annulation de la dispersivité par des effets non-linéaires. La dispersivité tend à étaler le paquet d'onde alors que les non-linéarités, agissant en auto-interaction, tendent à contre-balancer la dispersion. Il est difficile de donner une définition exacte de ce que sont les ondes solitaires ou les solitons. On peut cependant établir quelques propriétés physiques qui les caractérisent. Ce sont des solutions d'équations d'ondes non-linéaires, dont la forme permanente est spatialement localisée. En particulier, des ondes solitaires ne sont pas altérées si elles entrent en collision. C'est à dire que lorsque deux ondes solitaires se rencontrent, elles se déforment puis fusionnent en un même paquet d'onde. Ce paquet se sépare rapidement en deux ondes solitaires dont les formes sont les mêmes qu'avant la collision. Le terme de *soliton* apparaît dans les années 1960 dans les travaux de Kruskal et Zabusky [3]. Cette terminologie souligne le fait que les ondes solitaires se comportent, à certains égards, comme des particules. En effet ce sont des objets compacts très stables, dont les collisions évoquent plus des collisions de particules que d'ondes. Les solitons ne sont pas des phénomène exclusifs à l'hydrodynamique. En effet il est possible de construire des solutions solitoniques dans un grand nombre de théories. Le point important est qu'il faut des non-linéarités, afin de stabiliser le soliton.

Afin de décrire les interactions fondamentales entre les particules, on utilise des théories quantiques des champs. Dans le contexte de théories *classiques* décrivant des champs

continus, il est possible de construire des solitons ayant des propriétés en commun avec les particules.

En particulier, au niveau classique, certaines quantités physiques sont *quantifiées*. Les propriétés des solitons ne sont pas liés à la quantification de la théorie, mais plutôt à sa topologie. Si une théorie quantique des champs, utilisée pour décrire des interactions élémentaires, admet comme solutions des solitons, ceux-ci doivent alors apparaître comme des 'particules' supplémentaires. Parmi les premiers solitons topologiques, discutés dans les théories de champs, le kink est certainement l'exemple le plus simple. Le kink est une solution unidimensionnelles d'une théorie d'un champ scalaire réel. L'existence de la solution kink est liée à la topologie de la configuration donnée par les conditions asymptotiques. Les secteurs d'énergie finie sont séparés en secteurs topologiquement inéquivalents.

Le premier soliton topologique tridimensionnel dans une théorie des particules est attribué à Skyrme [4, 5] au début des année 1960. Ce soliton est nommé *Skyrmion*. Le modèle de Skyrme avait originellement pour but de décrire l'interaction forte et le spectre des hadrons. La charge topologique dans ce modèle s'interprète comme le nombre baryonique. Les Skyrmions comptent parmi les nombreux exemples de solitons topologiques. Il est difficile d'en faire une liste détaillée, tant les solitons adoptent des structures variées, selon la topologie des théories considérées (pour une revue détaillée sur les solitons topologiques, voir [6]). Les structures peuvent être relativement simples comme des sphères, ou très complexe comme des noeuds. Les solitons de type noeuds sont particulièrement intéressants, puisqu'ils exploitent une idée ancienne de Lord Kelvin, qui proposait des 'tubes d'éther noués' comme modèle des atomes. De tels solitons ont été construit dans une extension du modèle de Skyrme, le modèle de Skyrme-Faddeev, par Faddeev et Niemi [7], puis par Battye et Sutcliffe [8]. Il n'est pas toujours possible d'associer une charge topologique à un soliton. Cependant, la stabilité peut être garantie par la conservation d'une charge de Noether, les solitons sont alors dits non-topologiques [9]. On peut citer par exemple les solitons Q-balls [10].

On a évoqué des solitons issus de théories qui ne sont pas des théories de jauge. Or les théories de jauge sont celles qui décrivent les interactions fondamentales. La découverte de solitons dans des théories de jauge, au début des année 1970, est à l'origine d'un véritable engouement pour les solitons. En 1973, Nielsen et Olesen [11] puis en 1974, 't Hooft et Polyakov [12, 13] découvrent respectivement les vortex (magnétiques) et les monopôles magnétiques. Ce sont les premiers solitons découverts dans une théorie de jauge. Les monopôles magnétiques de t'Hooft et Polyakov apparaissent dans la théorie de Yang-Mills. Ce sont des solutions sphériques, régulières, non-abéliennes qui portent une charge magnétique. Contrairement au monopôle de Dirac [14] qui est une solution singulière, porteuse d'une charge magnétique, le monopôle de t'Hooft-Polyakov est un soliton régulier sur tout l'espace. Grâce à la topologie de la théorie, les monopôles ont une charge magnétique quantifiée.

Les vortex sont des solitons 'tubulaires' infiniment longs, au sein desquels sont confinés l'énergie et un flux, dont la nature dépend de la théorie. En particulier, les vortex de Nielsen-Olesen sont des solitons cylindriques de la théorie abélienne de Higgs, au coeur desquels est confiné un flux magnétique quantifié. Les vortex de Nielsen-Olesen sont l'analogue relativiste des vortex d'Abrikosov dans les supraconducteurs du second groupe [15].

C'est ce type de solitons qui nous intéresse pour cette thèse. La physique des solitons du type vortex est extrêmement riche. En effet, ils apparaissent dans des théories très variées allant de la matière condensée à la cosmologie. En matière condensée, on parle de vortex dans les supraconducteurs et aussi dans les condensats de Bose-Einstein. Il sont également très étudiés en physique théorique dans un grand nombre de modèles. En particulier, lorsque les vortex sont considérés en cosmologie, on les appelle souvent cordes cosmiques [16]. Ces cordes cosmiques qui auraient pu se former lors de transitions de phases pendant le refroidissement de l'univers primordial, sont prédites par de nombreux modèles, en particulier les théories grandes unifiées. Récemment, certains scénarios issus de théorie des cordes suggèrent l'existence de structures similaires appelées *superstrings* (pour une revue récente, voir [17]). Selon les échelles d'énergies, de tels objets pourraient avoir divers effets cosmologiques importants.

Il y a récemment eu une intense activité sur les solitons issus de théories supersymétriques (pour une revue récente, voir [18, 19]). En particulier, les vortex non-abéliens dont le groupe de jauge est SU(N) × U(1) [20, 21, 22]. Ces solutions n'ont rien en commun avec les solutions du modèle standard, même lorsque $N = 2$, puisqu'elles apparaissent dans le contexte de théories supersymétriques où le secteur de Higgs est différent. De tels objets peuvent avoir un rôle à jouer dans le cadre de la chromodynamique quantique où ils peuvent modéliser des tubes de gluons.

À ce jour, le modèle standard des particules, est certainement la théorie physique la mieux vérifiée expérimentalement. Ce modèle qui unifie trois des quatre interactions fondamentales connues de la nature, est composé de deux parties. La chromodynamique quantique qui décrit les interactions nucléaires fortes et la théorie électrofaible qui unifie l'électromagnétisme et les interactions nucléaires faibles. Bien qu'il s'agisse d'une théorique quantique des champs, on peut considérer des solutions classiques telles que les solitons. La théorie électrofaible n'admet pas de solitons topologiques, car le vide de la théorie est trivial. plus précisément la variété du vide n'admet pas de groupe d'homotopie qui soit non-trivial. Cela n'exclue cependant pas l'existence de solitons. En effet, il existe de nombreux exemples de solutions qui ne sont pas topologiques. Certainement la solution solitonique la plus connue de la théorie électrofaible est le sphaléron [23]. Il s'agit d'un point selle qui rejoint des vides de la théorie. Cette configuration instable, entre en jeu dans des processus non-perturbatifs qui violent la conservation des nombres baryonique et leptonique. Il existe toute une zoologie de solitons dans la théorie électrofaible. En particulier des solitons de type vortex. On parle des solutions Z-strings [24, 25] et W-strings [26] qui sont le plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans la théorie électrofaible.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux solitons de type vortex de la théorie électrofaible. On construira de nouvelles solutions porteuses d'un courant électrique. Ces nouvelles solutions sont stationnaires, à symétrie axiale. Elles généralisent le plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam.

Plan de Thèse

La première partie de cette dissertation à pour but d'exposer le cadre générique dans lequel on travaille. On abordera en particulier les solutions historiques qui sont à l'origine

d'une grande activité au sujet des vortex. Nous exposerons d'abord dans un premier chapitre, quelques généralités des théories de jauge. Nous donnerons également un bref aperçu des propriétés des vortex dans la théorie de la supraconductivité en physique de la matière condensée. Le second chapitre traite plus en détails de la thématique qui nous intéresse, c'est-à-dire les vortex dans des théories de jauge. Nous introduirons d'abord les premières solutions de type vortex construites dans une théorie relativiste. Il s'agit de la solution de Nielsen et Olesen [11] construite en 1973. Après avoir décrit leurs propriétés physiques, on s'intéressera à leur plongement dans une théorie dont le groupe de jauge est plus grand. Il s'agit des solutions de Witten [27], construites en 1985. Ces nouvelles solutions ont des propriétés physiques supplémentaires. En particulier, elles sont porteuses d'un courant électrique qui coule le long du vortex. Cette partie historique expose les fondations de l'étude des vortex dans les théories de jauge. En particulier elle permet d'établir la démarche qui sera suivie pour construire les solutions supraconductrices dans la théorie électrofaible.

La deuxième partie est quant à elle tournée vers la construction et l'étude des propriétés physiques des vortex supraconducteurs de la théorie électrofaible. Le premier chapitre de cette partie introduit de manière générale le secteur bosonique de la théorie électrofaible, ainsi que les grandeurs physiques importantes pour l'étude des solutions. Une fois ce cadre établi, on discutera des solutions de type vortex construites au début des années 1990 dans la théorie électrofaible. Ces solutions appelées Z-string [24, 25] et W-string [26] sont le plongement des solutions de Nielsen et Olesen dans la théorie électrofaible. On sait depuis le milieu des années 1990 que ces solutions sont instables [28, 29]. Après avoir étudié les propriétés des vortex qui sont connues depuis maintenant plus de 15 ans, nous aborderons dans le deuxième chapitre de cette partie, la construction des nouvelles solutions proprement dites. Il y sera question de la réduction de symétrie et du calcul de toutes les quantités nécessaires à la construction numérique et à l'étude des propriétés physiques de nouvelles solutions supraconductrices. On verra entre autre que les nouvelles solutions reproduisent exactement les résultats déjà connus présentés au chapitre précédent. Les solutions dont il est question sont des vortex infiniment longs parcourus par un courant électrique constant. En appliquant des boosts de Lorentz, il est possible également de construire des solutions qui possèdent une charge électrique. Le troisième chapitre présente les résultats obtenus en résolvant numériquement les équations des champs. Une attention particulière est donnée aux solutions obtenues pour les valeurs expérimentales des paramètres de la théorie. En particulier, afin d'avoir une bonne compréhension de la physique mise en jeu, une analyse semi-analytique est menée dans les régimes de faibles et de grands courants. L'analyse de ces limites permet d'une part de confirmer les résultats purement numériques obtenus et d'autre part de comprendre physiquement la nature des solutions. Afin d'avoir une description complète des phénomènes physiques qui entrent en jeux, nous étudierons également les solutions dans différentes limites où la théorie se simplifie.

Après avoir étudié les propriétés physiques des nouvelles solutions, la troisième partie de cette thèse est dédiée à l'étude de leur propriétés de stabilité. Dans le premier chapitre on établira les fluctuations génériques autour des vortex supraconducteurs. La séparation de variables appropriée permet de réduire le problème à l'étude du spectre d'un opérateur de Schrödinger à 16 amplitudes. Afin de faciliter l'exploration de tous les différents secteurs de cet opérateur, nous utiliserons le critère de Jacobi pour identifier qualitativement les secteurs où l'instabilité existe. Dans le second chapitre de cette partie, les modes instables

seront construits explicitement dans les secteurs où l'instabilité a été détectée. Afin de comprendre l'allure de la relation de dispersion des modes instables, il nous faudra à nouveau étudier les régimes de faibles et grands courants à l'aide d'outils analytiques. L'analyse dans ces limites sera à nouveau instructive et confirmera les résultats purement numériques. Enfin pour avoir une description complète de l'instabilité il faudra considérer l'opérateur de stabilité des vortex chargés électriquement. L'interprétation physique des résultats donnera lieu à une discussion sur les implications de nos observations. Dans les parties annexes, les méthodes numériques utilisées ainsi que certains calculs seront détaillés.

Première partie

Cadre Théorique et contexte historique

Chapitre 1

Généralités sur les théories de jauge

Nous présentons dans ce chapitre les concepts fondamentaux qui sont utiles en général pour l'étude des solitons dans les théories de jauge. Les théories de jauges sont un sujet bien trop vaste pour en faire un présentation exhaustive dans cette partie d'introduction. Nous discuterons donc brièvement des concepts qui nous semblent les plus importants pour entamer la discussion. Après une discussion générale sur le formalisme des théories de jauge et les mécanismes principaux qui interviennent dans la formation de solitons, nous décrirons succinctement quelques propriétés de supraconductivité où des structures de type vortex sont expérimentalement observées. Le chapitre suivant est quant à lui dédié à l'étude de vortex qui apparaissent dans des théories de jauge. Nous y construirons les solutions de Nielsen-Olesen [11] qui sont le premier exemple de vortex construits dans une théorie relativiste. Puis dans un prolongement historique, nous présenteront les solutions de Witten [27] qui sont plus générales et qui sont porteurs porteuses d'un courant électrique.

Parmi les nombreux ouvrages qui traitent les différents sujets qui sont abordés dans cette partie, on peut s'inspirer de [30, 31, 32] comme introduction aux théories de jauges. Une discussion détaillée au sujet des solitons en théories des champs peut être trouvée [33, 6, 34]. Parmi les ouvrages plus orienté sur les vortex, on pourra se référer à [16, 35, 36] et à une revue détaillé au sujet des vortex dans le modèle standard [37]. Pour une revue récente sur le modèle standard, se référer par exemple à [38]. Afin d'approfondir les notions de supraconductivité en physique de la matière condensée, voir par exemple [39, 40].

Les théories de jauges spontanément brisées sont au centre de la physique moderne. En effet presque toutes les interactions fondamentales observées dans la nature sont décrites par des théories de jauges. C'est pourquoi elles sont si importantes. On peut mentionner l'électrodynamique quantique, la théorie électrofaible qui nous intéresse particulièrement dans cette dissertation. La chromodynamique quantique (QCD) qui décrit les interactions nucléaires fortes est également une théorie de jauge. Avant de s'intéresser aux solitons, il faut introduire certains concepts fondamentaux des théories de jauge. Les théories de jauges possèdent des symétries dépendant de paramètres qui peuvent être globaux ou locaux. Par exemple dans les théories quantiques, la fonction d'onde est définie à une phase près. Cette phase n'est pas une quantité observable physiquement, par conséquent la théorie doit refléter cette invariance. On parle alors des symétries de la théorie. Lorsque les symétries

sont locales, il faut introduire des champs de jauge afin que la théorie soit covariante de jauge. Les transformations (de jauge) qui laissent invariante une théorie permettent de définir le groupe de jauge G qui est en général un groupe de Lie compact.

1.1 Brisure spontanée de symétrie

La brisure spontanée des symétries d'une théorie de jauge est un concept clé en physique théorique. C'est en effet grâce à la compréhension de ce concept qu'il a été possible d'unifier les interactions électromagnétique et nucléaires faibles. On parle de brisure spontanée de symétrie lorsque l'état fondamental de la théorie considérée ne possède pas les mêmes symétries que la théorie elle même. Parmi les brisures de symétrie, il faut différencier deux situations. La brisure spontanée d'une symétrie globale continue de la théorie est accompagnée de l'apparition de particules à masse nulle. Il s'agit là du théorème de Goldstone. Lorsque la symétrie brisée est locale on parlera du mécanisme de Higgs. Le concept de brisure de symétrie prend ses racines dans l'observation des transitions de phases en matière condensée, pour aboutir au mécanisme de Higgs qui permet de donner des masses aux particules, via la brisure d'une symétrie locale.

1.1.1 Théorème de Goldstone – Brisure d'une symétrie globale

La théorie relativiste la plus simple pour introduire le concept de brisure spontanée de symétrie est le modèle de Goldstone [41]. Il s'agit de la théorie d'un champ scalaire complexe décrite par la densité lagrangienne d'action

$$\mathcal{L}_{\text{Goldstone}} = \partial_\mu \mathbf{\Phi}^* \partial_\mu \mathbf{\Phi} - V(|\mathbf{\Phi}|^2)\,, \tag{1.1}$$

où le potentiel d'interaction est $V(|\mathbf{\Phi}|^2) = \boldsymbol{\lambda}(|\mathbf{\Phi}|^2 - \mathbf{\Phi}_0^2)^2$. Cette théorie est manifestement invariante sous les transformations globales de phase

$$\mathbf{\Phi} \to \mathrm{e}^{i\alpha}\mathbf{\Phi}\,, \tag{1.2}$$

qui déterminent le groupe abélien de symétrie $\mathrm{U}(1)$. Afin de définir l'état fondamental du modèle, il faut trouver le minimum du potentiel. Ainsi

$$\frac{\partial V(|\mathbf{\Phi}|^2)}{\partial \mathbf{\Phi}^*} = 2\boldsymbol{\lambda}(|\mathbf{\Phi}|^2 - \mathbf{\Phi}_0^2)\mathbf{\Phi}\,, \tag{1.3}$$

définit deux cas distincts :

- **a.** si $\mathbf{\Phi}_0^2 < 0$ alors $\mathbf{\Phi} = 0$ est le minimum absolu du potentiel.
- **b.** si $\mathbf{\Phi}_0^2 > 0$ il y a deux extrema. $\mathbf{\Phi} = 0$ qui est un maximum local tandis que $|\mathbf{\Phi}|^2 = \mathbf{\Phi}_0^2$ est le minium absolu. $\mathbf{\Phi}_0$ est la valeur moyenne dans le vide du champ $\mathbf{\Phi}$ (VEV).

On représente Fig. 1.1 l'allure typique des deux situations ($\mathbf{\Phi}_0^2 \lesseqgtr 0$). Le cas d'un seul minimum n'est pas intéressant ici, c'est pourquoi on considère la deuxième situation où le potentiel a l'allure d'un *sombrero*. C'est ici, qu'apparaît la brisure spontanée de symétrie. Le minimum du potentiel est un cercle de rayon $\mathbf{\Phi}_0$ qui définit un ensemble continu d'états

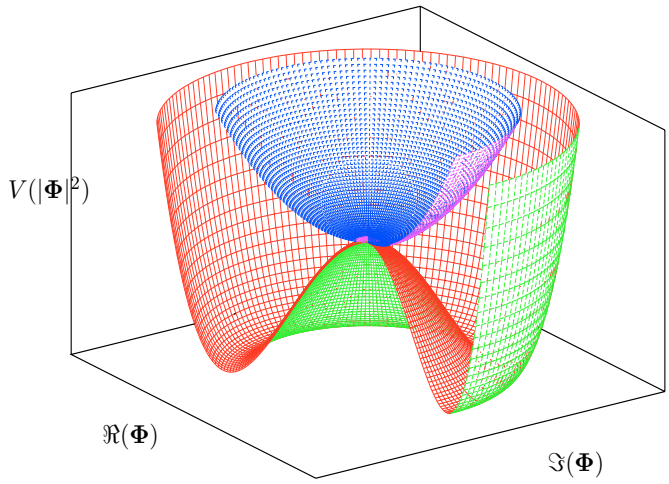


FIG. 1.1: Différentes formes du potentiel selon que la valeur du vide $\mathbf{\Phi}_0$ est imaginaire ou réelle. La surface bleue ($\mathbf{\Phi}_0^2 < 0$) possède un unique minimum absolu, tandis que la surface rouge ($\mathbf{\Phi}_0^2 > 0$) possède plusieurs extrema et l'état fondamental est dégénéré.

fondamentaux dégénérés, puisque le vide est défini à une phase près. Tous ces vides sont reliés par des rotations dans une variété ayant la topologie d'un cercle. Le système 'choisit' donc un vide parmi le continuum de possibles états fondamentaux. La symétrie abélienne U(1) de la densité lagrangienne d'action (1.1) est ainsi brisée par le choix d'un vide particulier, d'où la terminologie *brisure spontanée de symétrie*. Le théorème de Goldstone pour la brisure spontanée d'une symétrie globale peut s'énoncer ainsi :

La brisure spontanée d'une symétrie globale continue est accompagnée de l'apparition de bosons de Nambu-Goldstone [42, 41]. Il s'agit de particules scalaires (spin 0) à masse nulle. [1]

Pour démontrer ce théorème, il faut calculer les fluctuations des champs autour du vide : $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Phi}_0 + \varphi) \exp i\vartheta$, avec φ et ϑ qui ont une valeur moyenne nulle. On trouve que l'amplitude radiale φ est massive $m_\varphi = 2\mathbf{\Phi}_0\sqrt{\lambda}$, alors que la phase ϑ est à masse nulle. Ainsi, lorsque les deux champs ($\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{\Phi}^*$) choisissent une direction privilégiée dans le potentiel (lorsque la symétrie est spontanément brisée) ils deviennent le champ massif φ et le champ ϑ à masse nulle. Ainsi, avant la brisure spontanée de symétrie le spectre des particules est constitué de deux scalaires massifs. Après la brisure spontanée il y a un scalaire massif et un scalaire à masse nulle (boson de Nambu-Goldstone). Le théorème de Goldstone décrit la brisure spontanée d'une symétrie globale. Si la symétrie brisée est locale la situation est, comme nous allons le voir, très différente.

[1] Y. Nambu est un des prix Nobel de Physique 2008 pour la découverte du mécanisme de brisure spontanée en Physique subatomique.

1.1.2 Mécanisme de Higgs – Brisure d'une symétrie locale

L'observation que l'interaction nucléaire faible est à courte portée, implique que les bosons médiateurs de cette interaction soient massifs. On sait par ailleurs que le photon, médiateur de l'interaction électromagnétique, est à masse nulle. Afin d'unifier ces deux théories, il a donc fallu imaginer un processus qui permette à certaines particules d'acquérir une masse. Il s'agit du mécanisme de Higgs, bien qu'en réalité plusieurs personnes aient fait cette découverte en même temps. En effet, la découverte de ce mécanisme a été faite indépendamment par plusieurs groupes à la même période. En 1964, Englert et Brout [43] puis Higgs [44, 45] ont décrit un mécanisme permettant à certaines particules d'acquérir une masse. Il faut également mentionner les travaux de Guralnik, Hagen et Kibble [46] un peu plus tard cette même année 1964. La terminologie de *mécanisme de Higgs* est imprécise puisqu'il devrait s'agir du *mécanisme de Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble*. Afin de décrire ce mécanisme, considérons le modèle de Goldstone (1.1) dont l'invariance U(1) est promue au niveau local

$$\mathbf{\Phi} \to \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\mathbf{\Phi}\,. \tag{1.4}$$

Afin que l'action soit covariante de jauge, il faut introduire un champ de jauge A_μ. L'action est alors décrite par le modèle Higgs abélien qui sera étudié en détails plus tard

$$\mathbf{S}_{\text{HA}} = \frac{1}{\mathbf{c}}\int \mathrm{d}^4\mathbf{x}\left[-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} + (\mathbf{D}_\mu\mathbf{\Phi})^*\mathbf{D}^\mu\mathbf{\Phi} - V(|\mathbf{\Phi}|^2)\right]. \tag{1.5}$$

Le tenseur de force abélien est $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu$ et la dérivée covariante de jauge $\mathbf{D}_\mu = \left(\partial_\mu - \frac{i\mathbf{e}}{2}\mathbf{A}_\mu\right)$. $\mathbf{e}$ est une constante de couplage qui désigne la charge électrique. Le potentiel $V(|\mathbf{\Phi}|^2)$ défini (1.3) admet à nouveau plusieurs extrema si $\mathbf{\Phi}_0^2 > 0$ et le vide est alors $|\mathbf{\Phi}| = \mathbf{\Phi}_0$. Si le champ scalaire est développé au voisinage du vide, certain termes apparaissent dans la densité lagrangienne d'action

$$\mathcal{L}_{\text{HA}} = \cdots + \frac{e^2\mathbf{\Phi}_0^2}{4}A_\mu A^\mu + 4\lambda\mathbf{\Phi}_0^2\varphi^2\ldots\,. \tag{1.6}$$

Ainsi l'amplitude radiale du champ scalaire φ est massive de masse $m_\varphi = 2\mathbf{\Phi}_0\sqrt{\lambda}$ et le champ de jauge A_μ a la masse $m_{\text{V}} = \frac{\mathbf{e}\mathbf{\Phi}_0}{2}$. La fluctuation à masse nulle ϑ quant à elle n'est pas physique, puisqu'elle peut être absorbée par une transformation de jauge pure (1.4) (avec $\alpha(x) = -\vartheta$). Alors le modèle ne décrit plus que des champs massifs. Le processus qui 'donne une masse' au champ de jauge est le *mécanisme de Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble* (*mécanisme de Higgs* pour faire court) se résume ainsi :

La brisure spontanée d'une symétrie locale continue rend massif le champ de jauge initialement à masse nulle. Il reste un champ scalaire massif : le boson de Higgs accompagné d'un champ de jauge massif.

Ainsi, avant la brisure spontanée de symétrie le spectre des particules est constitué de deux scalaires massifs et un boson vecteur à masse nulle. Après la brisure spontanée il y a un scalaire massif et un boson vecteur massif.

1.1.3 Généralisation

Le processus de brisure spontanée d'une symétrie locale peut être généralisé lorsque le groupe de symétrie est non-abélien [47]. Il est également possible de considérer le cas d'une symétrie partiellement brisée. La brisure partielle d'une symétrie est particulièrement pertinente pour nous puisqu'un tel processus intervient dans la théorie électrofaible dont il est question dans cette thèse.

Soit un multiplet $\mathbf{\Phi}$ de champs scalaires appartenant à une représentation unitaire du groupe de jauge G. On prendra G un groupe de Lie compact. Le champ de jauge $\mathbf{A}_\mu$ à valeur dans l'algèbre de Lie de G peut être projeté sur les générateurs T^a de cette algèbre ($\mathbf{A}_\mu \equiv \mathbf{A}^a_\mu T^a$). Soit H un sous groupe de G tel que les générateurs de H soient ceux de G qui laissent invariant le vide de la théorie $\mathbf{\Phi}_0$. On dit alors que la symétrie G est partiellement brisée vers H : $G \to H$. La symétrie résiduelle H est la symétrie qui est physiquement observée. Il y aura $m = \dim(H)$ bosons de jauge à masse nulle et $n - m = \dim(G) - \dim(H)$ bosons massifs.

En particulier, pour la théorie de Weinberg-Salam, la symétrie n'est pas complètement brisée. La théorie est invariante sous le groupe $\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y}$ où $\mathrm{SU(2)_I}$ est le groupe d'isospin faible et $\mathrm{U(1)_Y}$ le groupe d'hypercharge. Le vide de la théorie doit refléter l'invariance de l'électrodynamique, c'est-à-dire $\mathrm{U(1)_{EM}}$. Le modèle de brisure de symétrie est donc $\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y} \to \mathrm{U(1)_{EM}}$. Dans le cas présent $n = \dim(\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y}) = 4$ et $m = \dim(\mathrm{U(1)_{EM}}) = 1$. Il y aura donc un boson vecteur à masse nulle (le photon) et $4 - 1 = 3$ bosons vecteurs massifs (les bosons chargés $\mathrm{W}^\pm$ et neutre Z^0).

1.2 Formation de défauts et transitions de phases

> « *Au commencement, l'univers fut créé. Cela mécontenta beaucoup de monde, et ce fut largement considéré comme une mauvaise idée.* »
>
> Douglas Adams Le dernier restaurant avant la fin du monde

La notion de brisure spontanée de symétrie évoquée dans la section précédente est un élément clé pour comprendre les transitions de phases et également la création de défauts. Comme on l'a vu, la brisure spontanée de symétrie intervient lorsque l'état fondamental d'un système possède moins de symétries que l'action. En particulier dans l'exemple du modèle Higgs abélien, lorsque le champ scalaire est caractérisé par une valeur moyenne non-nulle il brise la symétrie $\mathrm{U}(1)$ de l'action. Il est dorénavant communément admis que ce champ scalaire (le champ de Higgs) existe et qu'il est nécessaire pour expliquer la grande différence de masse entre les particules du modèle standard. C'est d'ailleurs en partie pour observer ce boson de Higgs que le LHC au CERN à été conçu. Il a été précédemment évoqué que le champ scalaire peut avoir différents états fondamentaux. Lorsque $\mathbf{\Phi}_0^2 < 0$ la symétrie n'est pas brisée et on dira qu'on est dans une *phase symétrique*. Au contraire si $\mathbf{\Phi}_0^2 > 0$ l'état fondamental est dégénéré et on qualifiera la phase de *phase brisée*.

Lorsqu'un système refroidit, il peut subir des *transitions de phases*. En effet pour un système quantique, il faut tenir compte des corrections et l'on utilise plutôt un potentiel

effectif. Comme on le verra plus tard en matière condensée lorsqu'un système est suffisamment chauffé, il est alors possible de restaurer la symétrie brisée. Selon le système physique considéré, les transitions entre deux phases peuvent être du premier ou du second ordre. Lors d'une transition de phase du premier ordre, la variation d'énergie libre du système

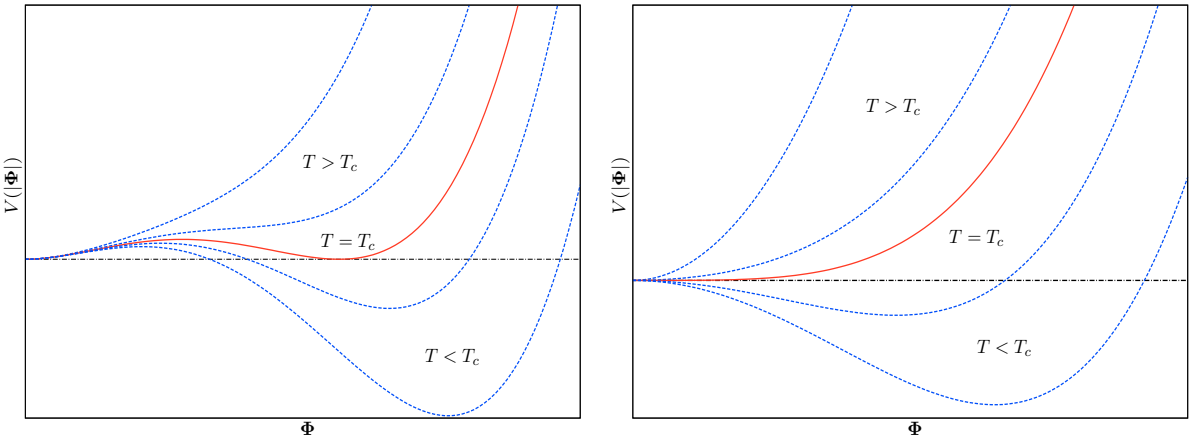


FIG. 1.2: Exemples de transitions de phases pour un potentiel effectif dépendant de la température. À Gauche : transition du premier ordre où l'état fondamental lorsque $T > T_c$ reste métastable après la transition ($T < T_c$). À Droite : transition du second ordre où l'état fondamental lorsque $T > T_c$ devient instable après la transition ($T < T_c$) on parle aussi de 'faux vide'.

en fonction du paramètre d'ordre est discontinue. Pour les transitions de phases du second ordre, la variation d'énergie libre du système en fonction du paramètre d'ordre est continue, mais la seconde variation est discontinue. Lors d'une transition de phase du second ordre, l'état fondamental devient instable lors du passage en dessous de la température critique T_c, alors qu'il reste métastable pour une transition du second ordre (voir Fig. 1.2).

En 1976, Kibble [48] propose un mécanisme pouvant donner naissance à des objets qui restaurent localement une symétrie brisée. Lors d'une transition de phase dans un univers en expansion, grâce au mécanisme de brisure spontanée de symétrie, le champ scalaire peut acquérir des phases différentes dans des régions de l'espace causalement déconnectées. Si avec l'expansion, de telles régions entrent en contact, il est alors possible que les phases varient de $2\pi n$ (où n est un entier) lors d'un parcours fermé autour du 'point de rencontre' de ces régions. Ainsi le point de rencontre donnera lieu, selon la symétrie du champ scalaire, à un *défaut topologique*. Les défauts sont des objets qui localement *restaurent* la symétrie brisée.

Selon la symétrie du champ scalaire, différents types de défauts peuvent se former. Considérons par exemple, deux états fondamentaux distincts $\pm\Phi_0$ [2], alors si deux régions telles que le vide soit $+\Phi_0$ dans l'une et $-\Phi_0$ dans l'autre, se rejoignent alors le défaut formé sera appelé *mur de domaine*. Si par contre le vide est défini par un continuum circulaire comme évoqué précédemment, alors le défaut formé sera un vortex.

[2] La symétrie est alors $\mathbb{Z}_2$.

Dimensionalité	Classification	Défaut topologique
0	$\pi_2(\mathcal{M})$	Monopôle
1	$\pi_1(\mathcal{M})$	Corde (vortex)
2	$\pi_0(\mathcal{M})$	Mur de domaine

TAB. 1.1: Classification des défauts topologiques à l'aide du groupe d'homotopie $\pi_n(\mathcal{M})$.

En définitive, c'est la topologie du vide qui détermine la nature du défaut formé. Plus précisément, c'est le processus de brisure de symétrie qui définit la nature du défaut. Considérons un processus de brisure de symétrie $G \to H$. Alors G/H défini la variété du vide $\mathcal{M}$ dont la topologie détermine la nature du défaut. Pour rendre compte des propriétés de $\mathcal{M}$, on utilise la théorie de l'homotopie. $\pi_n(\mathcal{M})$ classifie les différentes applications de S^n vers la variété $\mathcal{M}$. On peut ainsi classifier les défauts topologiques d'une certaine dimensionalité, par les éléments du groupe d'homotopie approprié de la variété $\mathcal{M}$ (voir Table. 1.1) [16].

Bien que n'étant pas les premiers exemples de solitons en théorie des champs, les vortex de Nielsen-Olesen en 1973 [11] (qu'on étudiera en détail dans le chapitre suivant) et les monopôles magnétiques de 't Hooft-Polyakov en 1974 [12, 13, 49], sont le point de départ d'un grand enthousiasme concernant les défauts topologiques. Il s'agit en effet des premiers exemples de solitons dans des théories physiquement pertinentes (respectivement Higgs abélien et Yang-Mills-Higgs). Le mécanisme de Kibble [48], précédemment introduit, fournit un scénario pouvant engendrer de tels objets et un moyen de classification à l'aide de la théorie de l'homotopie. De manière générale, les solitons en théorie des champs sont des objets *massifs*, *compacts* souvent statiques ou stationnaires. Il faut souligner que ces solutions ne sont pas forcément *topologiques*. Elles peuvent également être semi-topologiques ou même non-topologiques selon le processus de brisure de symétrie. Les solitons topologiques ont attiré une grande attention du fait de l'existence d'une borne topologique qui garantit classiquement leur stabilité. Étant classiquement stables, on peut espérer que les corrections quantiques ne détruiront pas ces solutions et qu'elles pourront avoir des conséquences observationnelles notoires. Cependant les solitons non-topologiques dont la stabilité n'est pas garantie par des considérations topologiques, mais plutôt pour des raisons dynamiques, peuvent avoir un rôle à jouer. On pense en particulier au modèle standard pour lequel il n'existe pas de borne topologique, mais qui est physiquement vérifié. Des solitons électrofaibles pourraient alors être observés par exemple au LHC.

1.3 Quelques notions de supraconductivité – Les vortex en matière condensée

Lorsque la matière est soumise à des conditions extrêmes de basse température, elle peut entrer dans une phase dite *supraconductrice*. Une telle phase est caractérisée entre autre par la nullité de la résistivité électrique et un diamagnétisme parfait. Il est hors de

propos ici de traiter le sujet de manière exhaustive. Pour une discussion détaillée, on pourra se reporter à des ouvrages spécialisés (voir par exemple [39, 40]).

En 1911, H. K. Onnes [50][3] découvre le phénomène de *supraconductivité* en étudiant les propriétés du mercure lorsqu'il est refroidi au moyen d'hélium liquide (4, 2 K). Il constate que la résistivité électrique s'annule soudainement en dessous d'une certaine température critique. Il s'agit là d'une découverte surprenante, puisque la résistivité ne se contente pas d'être faible, elle est *exactement nulle*. Le fait que le courant électrique puisse parcourir le matériau sans *aucune dissipation d'énergie* ouvre une grande quantité d'applications techniques. Il s'avère en tout cas que la supraconductivité est un phénomène relativement général qui apparaît pour beaucoup de matériaux . Une seconde propriété surprenante des supraconducteurs est découverte en 1933 par Meissner et Ochsenfeld [51]. Un matériau supraconducteur refroidi sous sa température critique expulse tous les flux magnétiques. Ainsi aucune ligne de champ magnétique ne peut pénétrer dans un tel matériau. On parle alors de diamagnétisme parfait ou d'*effet Meissner*. En 1935 les frères London [52] montrent que l'effet Meissner est une conséquence de la minimisation de l'énergie libre électromagnétique. Cette explication théorique laisse cependant plusieurs questions sans réponse. En particulier, elle n'explique pas *comment* se passe la transition entre l'état supraconducteur et l'état normal.

En 1950, Ginzburg et Landau [53] découvrent le mécanisme régissant la transition entre l'état normal et l'état supraconducteur. Grâce à des arguments thermodynamiques et l'approximation de champs moyens, leur théorie basée sur la théorie des transitions de phase du second ordre de Landau, prédit les propriétés macroscopiques des supraconducteurs. Ginzburg et Landau supposent l'existence d'un paramètre d'ordre complexe ψ dont l'interaction avec le champ électromagnétique est décrite par la fonctionnelle d'énergie libre

$$F = \int \left[\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{1}{4m_e} \left| -(i\hbar\nabla + 2e\vec{A})\psi \right|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \alpha|\psi|^4 + f_n \right] \mathrm{d}^3x \tag{1.7}$$

où μ_0 est la permittivité magnétique du vide, f_n la densité d'énergie libre dans la phase normale, α et β sont des paramètres phénoménologiques. m_e et e sont la masse et la charge de l'électron. ψ est la fonction d'onde macroscopique des électrons supraconducteurs qui est supposée nulle dans la phase normale. Remarquons dès à présent que la fonctionnelle d'énergie libre (1.7) est très similaire à l'énergie qu'on obtiendrait à partir du modèle Higgs abélien (1.5) étudié précédemment. L'analogie entre ces deux modèles sera développée plus en profondeur dans le chapitre suivant.

La variation fonctionnelle de l'énergie libre donne les équations de Ginzburg-Landau, analogues aux équations d'Euler-Lagrange (2.5) du modèle Higgs abélien (1.5). L'analyse de ces équations prédit l'existence de deux échelles de longueur

$$\xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_e|\alpha|}} \quad \text{et} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m_e\beta}{2\mu_0|\alpha|}}\,. \tag{1.8}$$

[3]Onnes obtient le prix Nobel de Physique en 1913 pour ses recherches sur les propriétés de la matière à basse température.

ξ est la longueur de corrélation qui donne l'échelle des fluctuations de ψ dans la phase supraconductrice, alors que λ est la longueur de pénétration, qui décrit l'échelle des variations du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué à un matériau supraconducteur, il induit un *courant supraconducteur* en surface. La profondeur jusqu'à laquelle pénètre le champ magnétique, et donc la profondeur à laquelle le courant disparaît, est déterminée par λ. On représente Fig. 1.3 la surface d'un

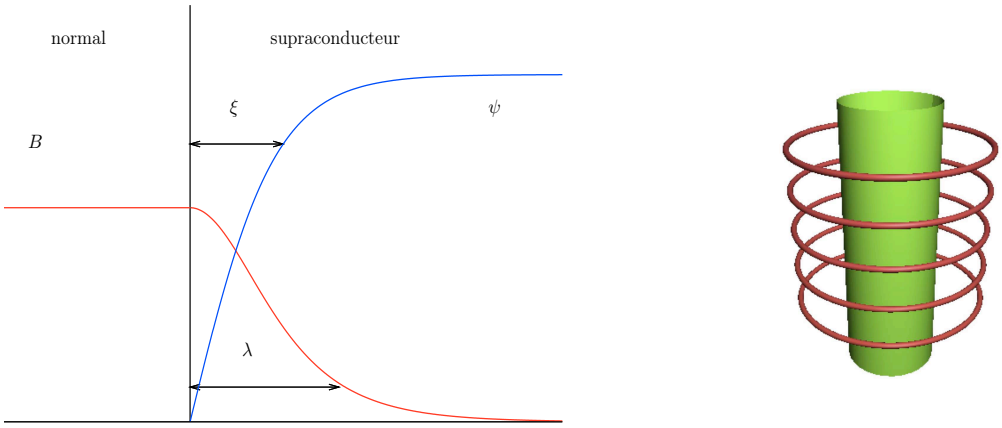


FIG. 1.3: À gauche : Profile du paramètre d'ordre et du champ magnétique à l'interface d'un supraconducteur. À droite : Représentation d'un vortex d'Abrikosov où les supercourants entourent le coeur normal.

supraconducteur placé dans un champ magnétique uniforme. Le matériau est pénétré sur une profondeur λ par le champ magnétique extérieur. Il est exponentiellement supprimé dans le supraconducteur. Le champ magnétique est 'massif' par un mécanisme analogue au mécanisme de Higgs (l'écrantage par les paires de Cooper). En surface, le champ magnétique induit un courant supraconducteur qui écrante le champ et l'empêche de pénétrer profondément.

Lorsque la température excède une température critique T_c, le matériau subit une transition de phase qui détruit la supraconductivité. La théorie de Ginzburg-Landau prédit également l'existence d'une excitation magnétique critique H_c au delà de laquelle la supraconductivité est également détruite. En 1952, Abrikosov [4] [54] montre que la théorie de Ginzburg-Landau prédit deux types de supraconducteurs (type I et II). Des considérations énergétiques montrent que le rapport $\kappa = \lambda/\xi$ permet de caractériser deux comportements différents :

a. si $\kappa < 1/\sqrt{2}$ on dit qu'il s'agit d'un supraconducteur de type I.

b. si $\kappa > 1/\sqrt{2}$ on dit qu'il s'agit d'un supraconducteur de type II.

Pour les supraconducteurs du premier groupe (type I) il existe une unique aimantation critique H_c alors que pour ceux du second groupe, il en existe deux H_{c1} et H_{c2}. Les

[4] En 2003 Abrikosov et Ginzburg obtiennent le prix Nobel de Physique pour leur contribution théorique à la supraconductivité et à la superfluidité. Landau quant à lui obtient également un prix Nobel en 1962 pour ses travaux sur l'hélium liquide.

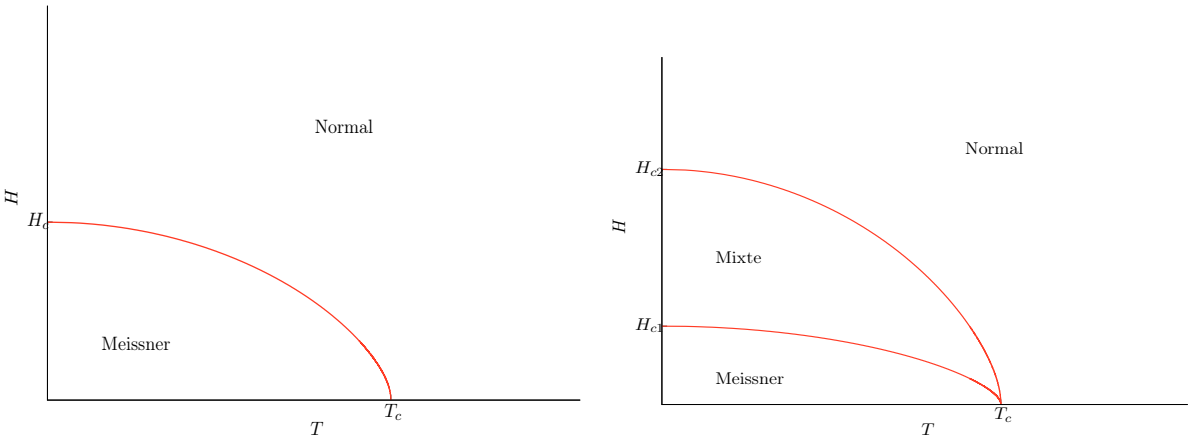


FIG. 1.4: À gauche : Diagramme de phase d'un supraconducteur de type I. À droite : Diagramme de phase d'un supraconducteur de type II.

diagrammes de phase des supraconducteurs des deux groupes sont résumés Fig. 1.4. Pour les supraconducteurs du premier groupe, il existe uniquement deux phases correspondant à l'état supraconducteur ou à l'état normal. Le diagramme des supraconducteurs du second groupe met en avant une phase *mixte* où coexistent les deux états. C'est précisément les supraconducteurs de type II qui nous intéressent, puisque c'est dans la phase mixte qu'apparaissent les vortex magnétiques que nous souhaitons étudier.

La théorie de Ginzburg-Landau décrit la supraconductivité à l'échelle macroscopique. En 1957 Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) [5] donnent une interprétation microscopique à la théorie de Ginzburg-Landau [55]. D'après cette théorie lorsque la température est suffisamment faible, grâce aux interactions avec le réseau cristallin, les électrons peuvent vaincre la répulsion Coulombienne pour se lier en paires dites *de Cooper*. La fonction d'onde décrivant la densité de ces paires, est en fait le paramètre d'ordre complexe de la théorie de Ginzburg-Landau. Notons cependant que la théorie BCS échoue à décrire certains types de supraconductivité dits 'non-conventionnels'.

Les arguments énergétiques de Ginzburg-Landau en dessous de la température critique prédisent la condensation de paires de Cooper (ce qui permet de gagner de l'énergie) et l'expulsion du champ magnétique par l'écrantage dû au courant (ce qui coûte de l'énergie). On comprend facilement qu'au delà d'une aimantation critique, il n'est plus favorable d'expulser le champ magnétique et les paires de Cooper ne sont pas formées. C'est le cas pour les supraconducteurs de type I où la *totalité* du matériau subit la transition de phase. Il est cependant concevable que la transition ne se fasse pas sur la totalité du volume du matériau, mais seulement dans certaines régions. C'est ce qui se passe pour les supraconducteurs du second groupe. En 1957, Abrikosov [15] se propose d'étudier les équations de Ginzburg-Landau dans cette phase mixte. L'analyse des paramètres montre que lorsque $\kappa > 1/\sqrt{2}$, l'énergie à l'interface entre le milieu normal et le milieu supraconducteur est *négative*. Il est donc énergétiquement intéressant de maximiser cette surface, en particulier

[5] Pour leur travaux Bardeen, Cooper et Schrieffer obtiennent le prix Nobel en 1972 (C'est d'ailleurs le deuxième pour Bardeen qui est déjà lauréat en 1956 pour ses travaux sur les semi-conducteurs).

si le champ pénètre *dans* le matériau. Abrikosov montre que la configuration optimum de pénétration des lignes de champs est un cylindre. Il existe une interaction répulsive entre ces cylindres qui forment ainsi un réseau triangulaire. C'est à dire que les zones, où le flux magnétique pénètre, s'agencent en un réseau hexagonal. Les zones de pénétration du flux, où l'état est normal (où la symétrie est restaurée), sont appelées *vortex*. Un vortex est alors un 'objet' dans lequel les électrons ne sont pas appariés, baignant dans un milieu supraconducteur où les paires de Cooper sont formées. Le champ magnétique pénétrant dans le matériau induit un courant supraconducteur circulaire qui engendre une aimantation qui s'oppose à la pénétration dans le reste du matériau. Un vortex (Fig. 1.3) est donc un tube où la symétrie est restaurée, entouré par un courant supraconducteur qui écrante le champ magnétique.

La fonctionnelle d'énergie de Ginzburg-Landau (1.7) est analogue à la fonctionnelle d'énergie issue du modèle Higgs-abélien (1.5). Étant donné la similarité entre les deux modèles, il est relativement naturel de s'attendre à trouver des structures analogues aux vortex d'Abrikosov dans la théorie relativiste. Nous allons donc considérer dans le chapitre suivant la construction de telles solutions et étudier leurs propriétés dans le cadre de la théorie abélienne.

Chapitre 2

Les Vortex en théories de jauge

2.1 Modèle de Higgs abélien

Le modèle de Higgs abélien (HA) est particulièrement intéressant pour le sujet qui nous préoccupe. En effet, on comprend facilement qu'il s'agit ni plus ni moins de la théorie de Ginzburg-Landau [53] réécrite selon le formalisme d'une théorie relativiste. De plus cette théorie est relativement simple, puisqu'elle décrit un champ scalaire complexe interagissant avec un seul champ de jauge. Dans ce modèle le champ scalaire complexe est l'analogue de la densité de paires de Cooper dans la théorie de la supraconductivité. Comme dans la théorie de Ginzburg-Landau, il est possible de construire des solutions analogues aux vortex magnétiques d'Abrikosov.

2.1.1 Le Modèle

La théorie décrit un champ scalaire complexe chargé sous le groupe $\mathrm{U(1)}_{\mathrm{HA}}$ d'électromagnétisme. Le champ scalaire, communément appelé Higgs est couplé à lui-même au travers d'un terme auto-interactif dans le potentiel. Il s'agit ici d'un potentiel en forme de *sombrero* utilisé par Higgs (Sec. 1.1.2). Le modèle est décrit par l'action

$$\mathbf{S}_{\mathrm{HA}} = \frac{1}{\mathbf{c}} \int \mathrm{d}^4\mathbf{x} \left[-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} + (\mathbf{D}_\mu \mathbf{\Phi})^* \mathbf{D}^\mu \mathbf{\Phi} - \boldsymbol{\lambda} \left(|\mathbf{\Phi}|^2 - \mathbf{\Phi}_0^2 \right)^2 \right] . \tag{2.1}$$

Ici le tenseur de force abélien est $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$ et la dérivée covariante $\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i\mathbf{e}}{2}\mathbf{A}_\mu$. $\mathbf{e}$ désigne la charge électrique, $\mathbf{\Phi}_0$ la valeur moyenne du champ scalaire dans le vide et $\boldsymbol{\lambda}$ est la constante d'auto-interaction du champ scalaire. Les indices grecs désignent les composantes spatio-temporelles (0,1,2,3) et les indices latins les composantes spatiales (1,2,3). Selon la convention d'Einstein, la répétition des indices sous-entend implicitement leur sommation. Le tenseur métrique de Minkowski avec la signature $(+,-,-,-)$ est utilisé pour monter ou descendre les indices. Conformément au mécanisme de brisure spontanée de symétrie (Sec. 1.1.2), le potentiel possède plusieurs extrema tels que dans le vide, la symétrie $\mathrm{U(1)}_{\mathrm{HA}}$ soit spontanément brisée.

En toute rigueur, l'action (2.1) est écrite avec des grandeurs dimensionnées. Il est cependant toujours plus commode de travailler avec des grandeurs adimensionnées. Le système considéré possède une échelle de longueur intrinsèque $\mathbf{L} = 1/\mathbf{e\Phi}_0$ correspondant à la longueur de Compton du boson de jauge $\mathbf{A}_\mu$. Ainsi les variables sans dimension sont données par les relations

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 \Phi \,, \qquad \mathbf{A}_\mu = \mathbf{\Phi}_0 A_\mu \,, \qquad \mathbf{x}^\mu = \frac{x^\mu}{\mathbf{e\Phi}_0} \,, \qquad \beta = \frac{8\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{e}^2} \,. \tag{2.2}$$

Par convention on utilisera les symboles en gras pour représenter des variables dimensionnées, pour désigner des variables adimensionnées on utilisera plutôt des symboles normaux. Dans le nouveau système de variables (2.2), l'action s'écrit

$$\mathbf{S}_{\text{HA}} = \frac{1}{\mathbf{c\Phi}_0^2} \int \mathrm{d}^4 x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - \frac{\beta}{8} \left(|\Phi|^2 - 1 \right)^2 \right] , \tag{2.3}$$

avec à présent $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu$. Le potentiel possède toujours deux extrema $|\Phi| = 0$ et $|\Phi| = 1$. L'invariance $\mathrm{U}(1)_{\text{HA}}$ est réalisée par les transformations (locales) de jauge

$$\Phi \to \mathrm{e}^{i\alpha} \Phi \,, \qquad\qquad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha \,, \tag{2.4}$$

avec α une fonction locale réelle univaluée. Les équations d'Euler-Lagrange obtenues par la variation fonctionnelle de l'action (2.3) par rapport aux champs s'écrivent

$$D_\mu D^\mu \Phi + \frac{\beta}{4} \left(|\Phi|^2 - 1 \right) \Phi = 0 \,, \qquad \partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left((D_\nu \Phi)^* \Phi - \Phi^* D_\nu \Phi \right) \equiv J_\nu^{\text{ANO}} \,. \tag{2.5}$$

L'énergie associée à la théorie est similaire à celle de Ginzburg-Landau (1.7)

$$E_{\text{HA}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + |D_0 \Phi|^2 + |D_i \Phi|^2 + \frac{\beta}{8} \left(|\Phi|^2 - 1 \right)^2 \right] \tag{2.6}$$

où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement les champs électrique et magnétique définis par $E_i = F_{0i}$ et $2B_k = \epsilon_{ijk} F_{ij}$. Afin que l'énergie soit une fonctionnelle définie non-négative il faut que la constante de couplage β soit positive. Cette constante qui est l'analogue de κ dans la théorie de Ginzburg-Landau (Sec. 1.3) définit le rapport de masse des bosons vecteur et scalaire. L'état fondamental de la théorie (le vide) $A_\mu = 0$, $|\Phi| = 1$ est choisi afin de briser la symétrie $\mathrm{U}(1)_{\text{HA}}$. Ainsi, en faisant le développement autour du vide, le champ scalaire a la masse $m_{\text{H}} = \sqrt{\beta/2}$ et le champ de jauge acquiert sa masse $m_{\text{V}} = 1/\sqrt{2}$ via le mécanisme de Higgs (Sec. 1.1.2). Comme le vide est donné aux transformations de jauge pure près, la variété du vide est un cercle

$$\mathcal{M}_{\text{HA}} = \{ \Phi \in \mathbb{C} | \Phi^* \Phi - 1 = 0 \} \cong S^1 \,. \tag{2.7}$$

Toute fonction $\mathrm{e}^{i\alpha(\varphi)}$ définit une application du cercle S^1 à l'infini spatial vers la variété vide $\Phi^\infty : S^1 \to S^1$. Une telle application est caractérisée par la classe d'homotopie $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. On dit que le premier groupe d'homotopie de la variété du vide est le groupe des entiers. Les configurations d'énergie finie sont séparées en différentes classes dénotées par leur nombre d'enroulement n.

Afin que l'énergie (2.6) soit bornée, il est à la fois nécessaire que la partie potentielle et la partie cinétique s'annulent à l'infini spatial. C'est-à-dire qu'asymptotiquement les champs ont valeur dans la variété du vide (2.7). Le champ scalaire converge donc vers le vide de manière covariante et A_μ est une jauge pure

$$A_\mu = \partial_\mu \alpha \,, \qquad D_\mu \Phi = 0 \,, \qquad \Phi = \mathrm{e}^{i\alpha} \in \mathcal{M}_{\mathrm{HA}} \,, \qquad |x^i| \to \infty \,. \tag{2.8}$$

Il faut à nouveau souligner ici l'analogie entre le modèle Higgs-abélien (2.3) et la fonctionnelle d'énergie de Ginzburg-Landau (1.7). Dans la théorie de Ginzburg-Landau, le paramètre κ donné par le rapport des deux échelles de longueur permet de différencier les deux types de supraconducteurs. Le rapport de masses β joue exactement le même rôle pour le modèle Higgs-abélien [1]. En effet $\beta < 1$ (*resp.* $\beta > 1$) correspond aux supraconducteurs du premier (*resp.* second) groupe.

Ayant posé rigoureusement les bases du modèle Higgs-abélien, nous allons considérer à présent dans quelle mesure il est possible de poursuivre l'analogie avec la théorie de Ginzburg-Landau, et construire des solutions de type vortex.

2.1.2 Les solutions de Nielsen et Olesen

En 1973 , H. B. Nielsen et P. Olesen [11] construisent l'analogue des vortex magnétiques existants dans les supraconducteurs de type II dans le cadre du modèle Higgs-abélien. Il s'agit de configurations statiques possédant la symétrie cylindrique. D'après les symétries requises, il est naturel d'utiliser un système de coordonnées cylindriques $(\rho\,,\varphi\,,z\,)$. L'univaluation de α implique $\alpha = n\varphi$, avec n un entier relatif. Cet entier appelé *nombre d'enroulement* compte le nombre de fois que le champ scalaire *s'enroule* lors d'une révolution autour de l'axe du vortex.

D'après les conditions sur le comportement asymptotique des champs (2.8), il faut avoir la forme asymptotique du champ de jauge $A_\rho = 0$ et $A_\varphi = \frac{n}{\rho}$. Ainsi, le calcul du flux du champ magnétique dans le plan orthogonal à un vortex situé le long de l'axe z donne

$$\Psi_{\mathrm{HA}} = \int \vec{B}.d\vec{S} = \oint \vec{A}.d\vec{\ell} = 2\pi n \,. \tag{2.9}$$

La relation (2.9) montre que le flux magnétique est *quantifié* ; le quantum de flux dans le système dimensionné étant $\frac{2\pi}{\mathbf{e}}$. Étant donnée la symétrie cylindrique, il est toujours possible de restreindre l'étude de l'espace tridimensionnel à l'étude dans le plan orthogonal à l'axe de symétrie (axe du vortex). La configuration est infiniment longue selon l'axe z. Par abus de langage *énergie* désigne souvent la *densité linéique d'énergie* le long du vortex (l'énergie elle-même étant infinie).

La séparation de variables décrivant une configuration statique des champs, purement magnétique, possédant la symétrie axiale est

$$A_\mu \mathrm{d}x^\mu = 2(n - v_{\mathrm{ANO}}(\rho))\mathrm{d}\varphi \,, \qquad \Phi = f_{\mathrm{ANO}}(\rho)\mathrm{e}^{in\varphi} \,. \tag{2.10}$$

[1] Les masses sont proportionnelles à l'inverse de longueur de Compton associée à la particule.

Pour la suite, il est pratique de considérer la dépendance dans la coordonnée radiale ρ, comme implicite. L'insertion de la séparation de variables (2.10) dans les équations d'Euler-Lagrange (2.5) mène à un système de deux équations différentielles non-linéaires

$$\rho\left(\frac{v'_{\mathrm{ANO}}}{\rho}\right)' = \frac{v_{\mathrm{ANO}}}{2} f_{\mathrm{ANO}}^2\,, \qquad \frac{1}{\rho}\left(\rho f'_{\mathrm{ANO}}\right)' = \left[\frac{v_{\mathrm{ANO}}^2}{\rho^2} + \frac{\beta}{4}(f_{\mathrm{ANO}}^2 - 1)\right] f_{\mathrm{ANO}}\,. \tag{2.11}$$

Ces équations comportent deux points singuliers réguliers $\rho = 0$ et $\rho = \infty$. Afin de respecter les prescriptions sur le comportement asymptotique des champs, et pour que les configurations soient régulières sur l'axe de symétrie, il faut imposer les conditions aux bords $n \leftarrow v_{\mathrm{ANO}} \rightarrow 0$ et $0 \leftarrow f_{\mathrm{ANO}} \rightarrow 1$. Ainsi, il faut résoudre les équations (2.11) en imposant

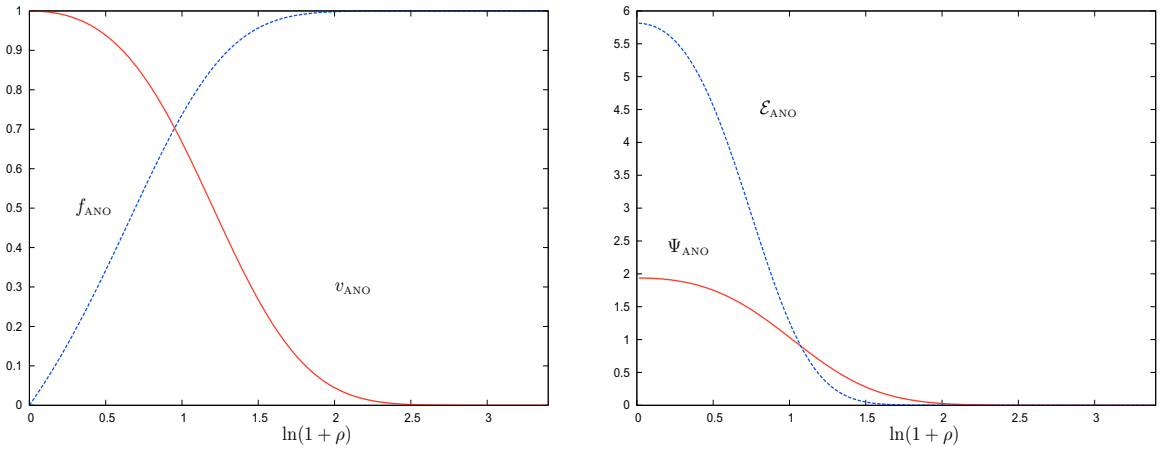


FIG. 2.1: À gauche : Les profils des amplitudes des vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen pour $n = 1$ et $\beta = 2$. À droite : Les densités d'énergie et de flux magnétique correspondantes.

le comportement adéquat aux points singuliers. Il n'est malheureusement pas possible de trouver une solution analytique au système. Il doit donc être résolu numériquement. Une partie dédiée à la résolution numérique de systèmes d'équations différentielles est traitée en partie annexe App. A. Les amplitudes solution du système d'Abrikosov-Nielsen-Olesen [2] sont représentées sur la figure Fig. 2.1. Conformément à nos attentes, d'après Fig. 2.1 et Fig. 2.2 il est clair qu'à la fois l'énergie et le flux magnétiques sont *confinés* dans une région restreinte du plan orthogonal au vortex. En l'occurrence, il s'agit de la région entourant le coeur du vortex. On constate par ailleurs que les amplitudes f_{ANO} et v_{ANO} interpolent entre deux phases correspondant aux vides de la théorie. Au coeur du vortex la symétrie $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{HA}}$ est restaurée (c'est le faux vide), alors que loin du coeur la symétrie est brisée (les champs ont atteint le vide). Les vortex sont donc des défauts qui interpolent entre les deux phases de la théorie. Comme $\pi_1(\mathcal{M}_{\mathrm{HA}}) \neq 1$, ils sont dits *topologiques* D'après les symétries du problème, les solutions sont invariantes par rotation dans le plan orthogonal au vortex. Ainsi les graphiques Fig. 2.2 ne sont rien de plus que ceux Fig. 2.1 auxquels on a appliqué

[2] Bien qu'issus de modèles physiques différents, les vortex d'Abrikosov et ceux de Nielsen-Olesen ont la même physique. On les appellera donc vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen –ANO

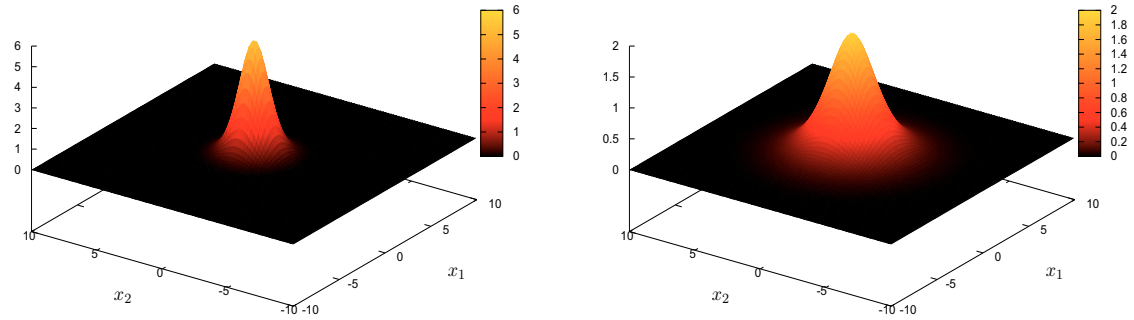


FIG. 2.2: Représentation des grandeurs physiques pertinentes du vortex fondamental $n = 1$, ($\beta = 2$), dans le plan orthogonal au vortex. À gauche : la densité radiale d'énergie $\mathcal{E}_{\text{ANO}}$. À droite : le flux magnétique Ψ_{ANO}. Ces grandeurs sont localisées au coeur du vortex.

une rotation. Cependant, ils permettent de bien visualiser les quantités physiquement pertinentes. On voit alors qu'à la fois les densités radiales d'énergie et de flux magnétique sont concentrées au coeur du vortex, et sont exponentiellement supprimées lorsqu'on s'éloigne du coeur.

2.1.3 Propriétés physiques des vortex

Les vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen sont des solutions statiques, à symétrie cylindrique du modèle Higgs-abélien. Il s'agit de configurations des champs dont la densité linéique d'énergie est finie. Nous avons également vu que le flux magnétique de telles configurations est quantifié $\Psi_{\text{ANO}} = 2\pi n$ de part la topologie non triviale du système. Les vortex sont donc caractérisés par leur nombre d'enroulement n. Ceci implique *classiquement* qu'il n'existe pas de transformation continue, d'énergie finie qui permette de modifier ce nombre d'enroulement n. En particulier, il n'est pas possible, par des transformations continues de passer d'un vortex vers le vide de la théorie (solution triviale caractérisée par $n = 0$). Cette impossibilité s'interprète physiquement par l'existence d'une barrière de potentiel infinie séparant chaque secteur topologique. On peut montrer l'existence d'une loi de conservation associée à la charge topologique n. Cette loi de conservation ne découle pas des symétries de l'action, mais de la structure topologique de la variété du vide via la brisure spontanée de la symétrie $\text{U}(1)_{\text{HA}}$. Une autre façon d'interpréter les choses est que chaque quantum de flux (chaque n) correspond à un vortex. Donc si n augmente, le nombre de vortex augmente. La question de la stabilité des solutions est importante. Il s'avère que dans le modèle Higgs-abélien, les propriétés de stabilité des solutions de Nielsen et Olesen se résument simplement :

a. Si $n = 1$ alors les vortex sont stables $\forall\ \beta$.

b. Si $n > 1$ et $\beta < 1$ alors les vortex sont stables.

c. Si $n > 1$ et $\beta > 1$ alors les vortex sont instables.

Ces résultats [56, 57] obtenus à l'aide de fonction test, confirmés plus tard numériquement [58], méritent qu'on s'y attarde un peu. En effet, la connaissance des propriétés de stabilité est importante pour la suite. D'une part, il faut remarquer que le vortex fondamental $n = 1$ est absolument stable. La raison de cette stabilité est entièrement liée à la topologie de $\mathcal{M}_{\text{HA}}$ précédemment évoquée.

La stabilité des configurations *multivortex* ($n > 1$) dépend quant à elle de la valeur du paramètre β. Lorsque $\beta \leq 1$ (situation correspondante au supraconducteur de type I), les configurations multivortex sont stables. C'est-à-dire qu'il est préférable énergétiquement à plusieurs vortex de se regrouper plutôt que de rester séparés. Dans ce cas ($\beta < 1$) la force entre plusieurs vortex est *attractive*. A contrario, lorsque $\beta > 1$ (situation correspondant au supraconducteur de type II) la superposition de plusieurs vortex est instable. C'est-à-dire que la force entre vortex est *répulsive* et qu'un *multivortex* se sépare en plusieurs vortex *élémentaires*. C'est d'ailleurs le cas dans les supraconducteurs du second groupe où les vortex d'Abrikosov se repoussent pour former un réseau hexagonal. Comme en matière condensée, il existe une région de l'espace (le coeur du vortex) dans laquelle le flux magnétique est confiné. Le couplage entre champ de jauge et champ scalaire y maintient les champs dans la phase symétrique où le champ de jauge est à masse nulle. Plus loin du coeur du vortex, dans la phase brisée, le champ magnétique est écranté (le champ de jauge devient massif) et Φ prend une valeur moyenne non-nulle. Ainsi les champs sont des configurations qui interpolent entre les vides de la théorie (entre les phases symétrique et brisée). Cette concentration du flux magnétique qui est l'analogue de l'effet Meissner intervient pour des raisons énergétiques plutôt que topologiques. Cette nuance sera importante pour le cas du modèle standard où il n'existe pas de borne topologique.

Ainsi, les vortex élémentaires de Nielsen-Olesen sont analogues aux vortex d'Abrikosov de la théorie de Ginzburg-Landau. Leur stabilité est garantie par l'existence d'une borne topologique. Il est toujours possible de 'plonger' une théorie dans une autre dont le groupe de symétrie contient celui de la première. Le plongement d'une solution simple dans une théorie 'plus grande' met en avant des phénomènes physiques nouveaux, cependant comme la théorie est différente la stabilité peut être différente.

2.2 Vortex supraconducteurs – Le modèle de Witten

En 1985, Witten [27] introduit un nouveau modèle qui généralise le modèle Higgs abélien, dans lequel il existe des solutions de type vortex. La présence de nouveaux champs dans ce modèle introduit des degrés de liberté supplémentaires. Ainsi, le modèle de Witten est riche de phénomènes physiques nouveaux.

2.2.1 Le modèle de Witten

La supraconductivité et la formation de vortex sont attribuées à la brisure spontanée de l'invariance de jauge de l'électromagnétisme. Dans son article [27], Witten étudie deux processus pouvant engendrer un courant électrique selon l'axe des vortex. Le premier processus

consiste à considérer des porteurs de charge fermioniques piégés à l'intérieur d'un vortex (en l'occurrence on l'appelle 'corde cosmique'). Cette situation ne nous intéresse pas ici, puisqu'on préfère considérer uniquement des théories bosoniques. Le deuxième processus, introduit des porteurs de charge bosoniques. Afin qu'une corde cosmique puisse acquérir un courant, il faut qu'un champ scalaire ait une valeur moyenne non-nulle à l'intérieur du vortex. On parle alors de *condensat*. La théorie de Witten décrit l'interaction de deux champs scalaires complexes chargés avec deux champs de jauge dont le groupe de symétries est le groupe abélien $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$. Afin qu'un vortex se forme, il faut qu'une des deux symétries de jauge soit spontanément brisée. Ainsi, le champ de jauge de la symétrie brisée est responsable de la formation de vortex alors que celui associé à la symétrie non brisée est responsable du *condensat* créant le courant électrique. Considérons le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ décrit par l'action

$$\mathbf{S}_{\text{Witten}} = \int \mathrm{d}^4\mathbf{x} \left[-\frac{1}{4} \sum_{a=1,2} \mathbf{F}^{(a)}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{(a)\,\mu\nu} + \sum_{a=1,2} (D_\mu \mathbf{\Phi}_a)^* D^\mu \mathbf{\Phi}_a - V(|\mathbf{\Phi}_1|^2, |\mathbf{\Phi}_2|^2) \right] , \quad (2.12)$$

où les tenseurs de force abéliens sont $\mathbf{F}^{(a)}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}^{(a)}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}^{(a)}_\mu$, les dérivées covariantes de jauge $D_\mu \mathbf{\Phi}_a = (\partial_\mu - i\mathbf{g}_a \mathbf{A}^{(a)}_\mu)\mathbf{\Phi}_a$. D'après la structure des dérivées covariantes, chaque scalaire $\mathbf{\Phi}_a$ est couplé à son champ de jauge $\mathbf{A}^{(a)}_\mu$ avec la constante de couplage $\mathbf{g}_a$. Les champs scalaires sont couplés entre eux au travers du potentiel qui doit refléter les symétries requises. Alors que la symétrie $\mathrm{U}(1)_{\phi_1}$ est spontanément brisée au profit de la formation d'un vortex, l'électromagnétisme $\mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ reste une symétrie de l'état fondamental. Ainsi, le processus de brisure de la symétrie est

$$\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2} \to \mathbb{1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2} \quad (2.13)$$

et le vide de la théorie est

$$|\mathbf{\Phi}_1| = \boldsymbol{\eta}_1 , \qquad |\mathbf{\Phi}_2| = 0 , \qquad \mathbf{A}^{(a)}_\mu = 0 . \quad (2.14)$$

Le potentiel est choisi de sorte à refléter la brisure spontanée (2.13)

$$V(|\mathbf{\Phi}_1|^2, |\mathbf{\Phi}_2|^2) = \frac{\boldsymbol{\lambda}_1}{4}(|\mathbf{\Phi}_1|^2 - \boldsymbol{\eta}_1^2)^2 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_2 |\mathbf{\Phi_2}|^2}{4}(|\mathbf{\Phi}_2|^2 - 2\boldsymbol{\eta}_2^2) + \boldsymbol{\gamma}|\mathbf{\Phi}_1|^2|\mathbf{\Phi}_2|^2 . \quad (2.15)$$

Afin que le vide (2.14) soit minimum global de la théorie , les paramètres du potentiel doivent satisfaire les relations

$$\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 > 0 , \qquad \boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{\eta}_1^4 - \boldsymbol{\lambda}_2 \boldsymbol{\eta}_2^4 > 0 , \qquad 4\boldsymbol{\gamma}^2 - \boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{\lambda}_2 > 0 . \quad (2.16)$$

Les relations (2.16) garantissent que la symétrie est partiellement brisée et les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\partial^\mu \mathbf{F}^{(a)}_{\mu\nu} = i\mathbf{g}_a((D_\nu \Phi_a)^* \mathbf{\Phi}_a - \mathbf{\Phi}_a^* D_\nu \mathbf{\Phi}_a) \equiv \mathbf{g}_a J^{(a)}_\nu , \quad D_\mu D^\mu \mathbf{\Phi}_a + \frac{\partial V}{\partial |\mathbf{\Phi}_a|^2} \mathbf{\Phi}_a = 0 . \quad (2.17)$$

Les charges de Noether associées aux courants conservés $J^{(2)}_0$ et $J^{(2)}_3$ de la symétrie non brisée donnent respectivement la charge et le courant électrique (2.21). Les couples $(\mathbf{A}^{(1)}_\mu, \mathbf{\Phi}_1)$ et $(\mathbf{A}^{(2)}_\mu, \mathbf{\Phi}_2)$ sont respectivement associés aux groupes de symétrie $\mathrm{U}(1)_{\phi_1}$ et $\mathrm{U}(1)_{\phi_2}$. Comme la symétrie $\mathrm{U}(1)_{\phi_1}$ est brisée, on appelle le couple $(\mathbf{A}^{(1)}_\mu, \mathbf{\Phi}_1)$ champ du vortex. Le couple $(\mathbf{A}^{(2)}_\mu, \mathbf{\Phi}_2)$ est quant à lui appelé champ du condensat.

2.2.2 Les vortex supraconducteurs

Le modèle de Witten, qui étend le théorie Higgs abélienne permet ainsi la formation de vortex. Ces vortex ont la particularité de porter un courant électrique. Ces nouvelles solutions pouvant apparaître dans le contexte de théories grandes unifiées ont suscité un grand intérêt (voir par exemple [27, 59, 60, 61, 62, 63] ou également le livre [16] pour une revue complète). On souhaite construire des solutions stationnaires possédant la symétrie axiale. Les champs sont invariants sous les boost de Lorentz dans le plan (t, z). Étant donné le vecteur $\sigma_\alpha = (\sigma_0, 0, 0, \sigma_3)$, les champs prennent la forme

$$\mathbf{\Phi}_1 = f_1 \mathrm{e}^{in\varphi}\,, \quad g_1 \mathbf{A}^{(1)}_\mu \mathrm{d}\mathbf{x}^\mu = (n-v)\mathrm{d}\varphi\,, \quad \mathbf{\Phi}_2 = f_2 \mathrm{e}^{i\sigma_\alpha x^\alpha}\,, \quad g_2 \mathbf{A}^{(2)}_\mu \mathrm{d}\mathbf{x}^\mu = \sigma_\alpha(1-u)\mathrm{d}\mathbf{x}^\alpha\,. \tag{2.18}$$

Les équations des champs associées (2.17) sont

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{v'}{\rho}\right)' = 2\mathbf{g}_1^2 f_1^2 v\,, && \frac{1}{\rho}\left(\rho f_1'\right)' = \left(\frac{v^2}{\rho^2} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1}{2}(f_1^2 - \boldsymbol{\eta}_1^2) + \boldsymbol{\gamma} f_2^2\right) f_1\,, \\ &\frac{1}{\rho}\left(\rho u'\right)' = 2\mathbf{g}_2^2 f_2^2 u\,, && \frac{1}{\rho}\left(\rho f_2'\right)' = \left(\sigma^2 u^2 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_2}{2}(f_2^2 - \boldsymbol{\eta}_2^2) + \boldsymbol{\gamma} f_1^2\right) f_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $\sigma^2 = \sigma_\alpha \sigma^\alpha$. Selon le signe de σ^2, c'est-à-dire si le vecteur σ^α est de genre temps, espace ou lumière, les solutions des équations du mouvement (2.19) sont appelées *magnétiques* ($\sigma^2 > 0$), *électriques* ($\sigma^2 < 0$) et *chirales* ($\sigma^2 = 0$). Les amplitudes du vortex (f_1 et v) satisfont les mêmes conditions aux bords que dans le cas d'Abrikosov-Nielsen-Olesen. Les amplitudes du condensat respectent asymptotiquement la condition de brisure de symétrie (2.14) et les conditions de régularité sur l'axe de symétrie. De plus, le potentiel du champ électrique u, correspond dans la phase brisée au potentiel de Biot et Savart de l'électrodynamique classique (voir par exemple [64, 65]). En effet, asymptotiquement, seul le champ électromagnétique $\mathbf{A}^{(2)}_\mu$ reste à masse nulle (tous les autres champs étant devenus massifs). Un vortex porteur de courant doit être vu asymptotiquement comme un fil électrique parcouru par une densité de courant constante. Ainsi les conditions aux bords lorsque $0 \leftarrow \rho \rightarrow \infty$ sont

$$n \leftarrow v \rightarrow 0\,, \qquad 0 \leftarrow f_1 \rightarrow 1\,, \qquad 1 \leftarrow u \rightarrow c_1 + Q\ln\rho\,, \qquad q \leftarrow f_2 \rightarrow 0\,, \tag{2.20}$$

où c_1 et Q sont des constantes à déterminer [3]. La densité de courant $J^{(2)}_\nu$ intégrée sur le plan orthogonal au vortex définit le courant et la charge parcourant le vortex

$$\mathcal{I}_\alpha = \int J^{(2)}_\alpha \mathrm{d}^2\mathbf{x} = \int \partial^\mu \mathbf{F}^{(2)}_{\mu\alpha} \mathrm{d}^2\mathbf{x} = -\frac{2\pi Q \sigma_\alpha}{\mathbf{g}_2}\,. \tag{2.21}$$

$\mathcal{I}_0$ est la densité linéique de charge du vortex, et $\mathcal{I}_3$ sa densité linéique de courant. Par construction, les champs (2.18) sont invariants sous les *boost* de Lorentz dans le plan (t, z). Ainsi dans le cas magnétique ($\sigma^2 > 0$), qui nous intéresse particulièrement ici, il est toujours possible de se placer dans le référentiel de repos où la charge $\mathcal{I}_0 = 0$. Le courant électrique

[3] La question des conditions aux bords en général est abordée plus en détail dans les parties suivantes.

est alors $\mathcal{I}_3 = -\dfrac{2\pi Q\sigma}{\mathbf{g}_2}$ où $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ est appelé paramètre de *twist* car il représente un phase tournante lorsqu'on se déplace le long de l'axe du vortex. La valeur q du condensat sur l'axe de symétrie est un paramètre essentiel des solutions qui permet de caractériser différentes solutions. Le cas particulier $q = 0$ renvoie simplement à la solution (sans courant) des équations d'ANO (2.11).

Avant de considérer les solutions plus générales de ce modèle, il est intéressant d'étudier plus en détail le cas des solutions ANO. En effet, il est possible de trouver des solutions de type vortex en plongeant les solutions ANO dans la théorie étendue (2.12). Bien que la stabilité de ces solutions soit garantie pour des raisons topologiques dans le modèle Higgs abélien, il n'y a pas de raison pour que de telles solutions soient stables une fois plongées dans la nouvelle théorie. En particulier, il est possible de considérer de petites déformations autour du fond d'un vortex ANO en linéarisant les équations (2.19). Pour cela, il suffit de considérer le cas $q \ll 1$. Ainsi, la déformation est décrite par l'équation

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho f_2'\right)' = \left(\sigma^2 - \frac{\boldsymbol{\lambda}_2}{2}\boldsymbol{\eta}_2^2 + \boldsymbol{\gamma} f_1^2\right) f_2 \,. \tag{2.22}$$

Il s'agit d'un problème spectral de Schrödinger dont σ^2 est la valeur propre . D'après les conditions aux bords (2.20) et les contraintes sur les paramètres du potentiel (2.16), il est clair qu'il existe des valeurs des paramètres pour lesquelles le potentiel est défini négatif. Ainsi il doit exister des solutions de type états liés ce qui implique que la solution ANO *plongée* n'est pas stable. Il faut cependant mentionner qu'elle sera stabilisée par l'existence d'un condensat du deuxième scalaire dans le coeur du vortex. En effet à cause de la topologie, le vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen plongé ne peut pas se 'dérouler' vers le vide (modifier le nombre d'enroulement vers $n = 0$). Il est néanmoins toujours possible de relaxer vers une solution de même n mais moins énergétique. C'est le cas ici où ma solution relaxe vers une solution où le second scalaire n'est pas nul. On parle alors de solution habillée.

Connaissant qualitativement le comportement au niveau linéaire, il faut s'intéresser aux solutions du système non-linéaire. Les équations (2.19) sujettes aux conditions aux bords (2.20) sont alors résolues numériquement. On peut voir des exemples des profiles des amplitudes Fig. 2.3. Lorsque le condensat augmente, un phénomène physique très important apparaît. En effet, comme on le voit Fig. 2.4, il n'est pas possible de 'condenser' le deuxième scalaire indéfiniment. Il existe une valeur maximale $q_\star$ au delà de laquelle il n'existe pas de solution. Cette valeur dépend évidemment des paramètres du potentiel qui sont utilisés. Lorsqu'on augmente le condensat q , d'abord le courant augmente puis il est brutalement *éteint*. On parle d'extinction du courant (ou *current quenching*). Pour un jeu de paramètres fixé, les vortex porteurs de courant constituent une 'famille' qui interpole entre deux solutions, sans courant, physiquement différentes. Lorsque $q = 0$, la solution est la solution ANO plongée dans le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$. La deuxième solution sans courant est la solution telle que $q = q_\star$ qu'on appelle *habillée* (*dressed string*) puisqu'elle est vue comme un vortex magnétique ANO *habillé* d'un condensat de champ scalaire. Une telle solution dont le courant s'annule à cause de $\sigma^2 = 0$ est aussi appelée solution chirale. Cette dernière est différente d'ANO plongée, puisque le condensat y est maximum (Fig. 2.3 – à droite). De plus la solution ANO plongée ($q = 0$) est plus énergétique que la solution *habillée* (Fig. 2.4 – à droite) qui est par conséquent physiquement favorisée.

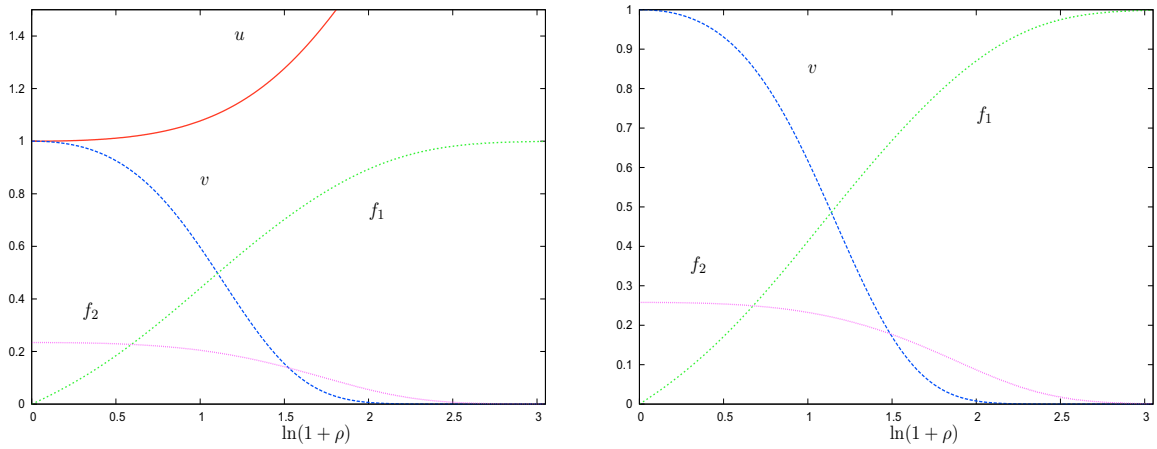


FIG. 2.3: Amplitudes des solutions dans le modèle de Witten, pour les paramètres du modèle $\eta_1 = g_1 = g_2 = 1$, $\eta_2 = 0.31$, $\gamma = 0.6$, $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 10$. À Gauche : la solution générique porteuse de courant. À Droite : la solution 'habillée'.

Puisque la solution ANO est plus 'énergétique' elle doit relaxer vers la solution *habillée*. Cette relaxation ne se fait pas en parcourant la famille de solutions représentée sur la figure Fig. 2.4. En effet dès lors que la solution est parcourue par un courant, son énergie totale est infinie à cause de la divergence logarithmique du potentiel de Biot et Savart. Afin d'abaisser l'énergie de la solution, le deuxième scalaire se condense au coeur du vortex jusqu'à atteindre la valeur $q_\star$. Le phénomène de *current quenching* est une caractéristique

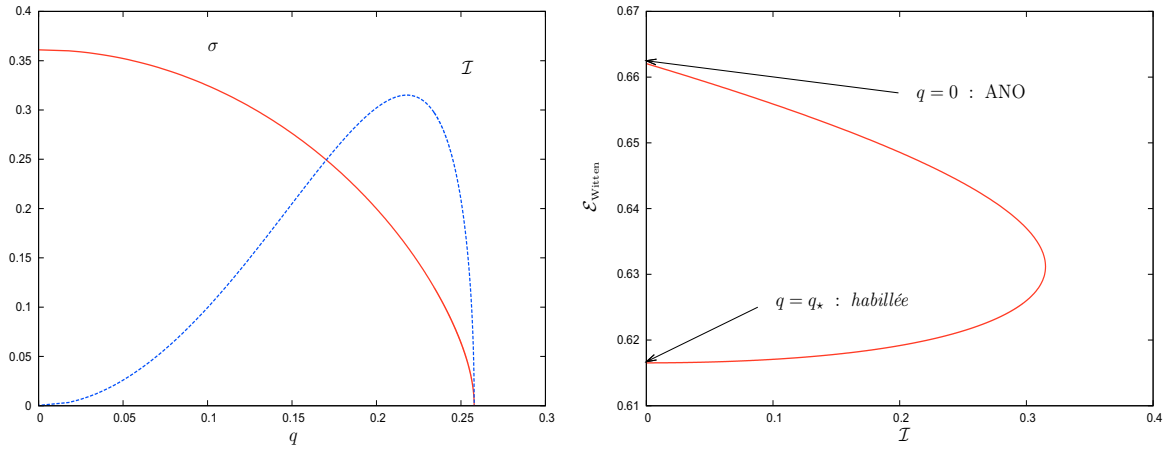


FIG. 2.4: À Gauche : Destruction du supercourant par 'extinction' du condensat scalaire. À Droite : L'énergie magnétique des solutions interpole entre deux solutions sans courant. La première est Abrikosov-Nielsen-Olesen plongée et l'autre est la solution *habillée*.

essentielle de la supraconductivité *scalaire*. D'après les observations de la matière condensée il existe toujours un courant critique (plus précisément une aimantation critique). En effet si l'aimantation est trop importante, les paires de Cooper ne sont pas formées et le

matériau subit une transition de phase pour passer dans l'état normal. Le cas des vortex supraconducteurs de Witten est encore plus dramatique puisque le vortex est fin et donc facilement plus petit que la longueur de pénétration du champ magnétique. Ainsi le supercourant est facilement détruit dans le modèle de Witten. On verra que lorsque les porteurs de charge ne sont plus des *scalaires*, mais des *bosons vecteurs* la physique est complètement différente.

2.3 Cordes Cosmiques et Motivations

« *Only when you know the question will you know what the answer means* »

Dans la discussion précédente, il a été mis en avant la très forte analogie existant entre le modèle Higgs abélien et la théorie de Ginzburg-Landau de la supraconductivité. Ce parallèle avait déjà été fait dans l'article original de Nielsen et Olesen [11]. Cependant leurs motivations étaient d'ordre plus théorique. Il s'agissait plutôt pour eux de contribuer à une meilleur compréhension des théories des cordes. En particulier en étudiant les liens entre théorie des champs et théories duales [11]. Les solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen peuvent être promues à des théories plus générales comme le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ de Witten. Elles sont alors instables au profit de solutions *habillées* et portent génériquement un courant électrique supraconducteur en leur coeur. Cependant, le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ n'apparaît pas au niveau de la physique des particules. En effet, il n'existe pas de trace expérimentale de la brisure du groupe de jauge du modèle standard $(\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}})$ donnant le modèle de Witten. Cependant, le modèle de Witten est physiquement pertinent dans le contexte de théories grandes unifiées. Il a ainsi été supposé, dans le cadre de ces théories, qu'il pouvait apparaître des groupes de symétries tels que $\mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ dont la brisure spontanée puisse donner naissance à des vortex. Les échelles d'énergies des théories grandes unifiées dépassent de loin les échelles d'énergies expérimentalement accessibles de nos jours. Lorsque les brisures spontanées de symétries dans les théories grandes unifiées donnent naissance à des vortex, ceux-ci sont généralement appelés *cordes cosmiques*. L'activité scientifique autour des cordes cosmiques a été très intense dans les années 1990 (voir [16] pour une revue sur les cordes cosmiques). Sans entrer dans les détails des nombreuses simulations au sujet des cordes cosmiques, nous allons considérer une propriété particulièrement intéressante pour nous. Il s'agit de la propriété d'*intercommutation*. Un tel phénomène permet la création, à partir de vortex infiniment longs, de nouvelles solutions appelées *vortons* qui sont des *boucles fermées* de vortex [66]. La dynamique d'un réseau de vortex peut amener deux vortex à se 'croiser'. Il existe alors un certaine probabilité pour qu'ils s'intersectent et échangent leurs parties. Cette *intercommutation* est représentée Fig. 2.5. Si elles n'intercommutent pas, les cordes cosmiques passent alors au travers l'une de l'autre sans 'se voir'.

On peut imaginer plusieurs façons pour une corde cosmique de s'intersecter. En particulier de sorte à former une boucle fermée de vortex Fig. 2.5. Si la dynamique d'un système mène à la formation de vortons, sous l'effet de sa tension, la boucle à tendance à 'rétrécir' jusqu'à disparaître puisqu'aucune autre force n'entre en jeu pour s'opposer à la tension.

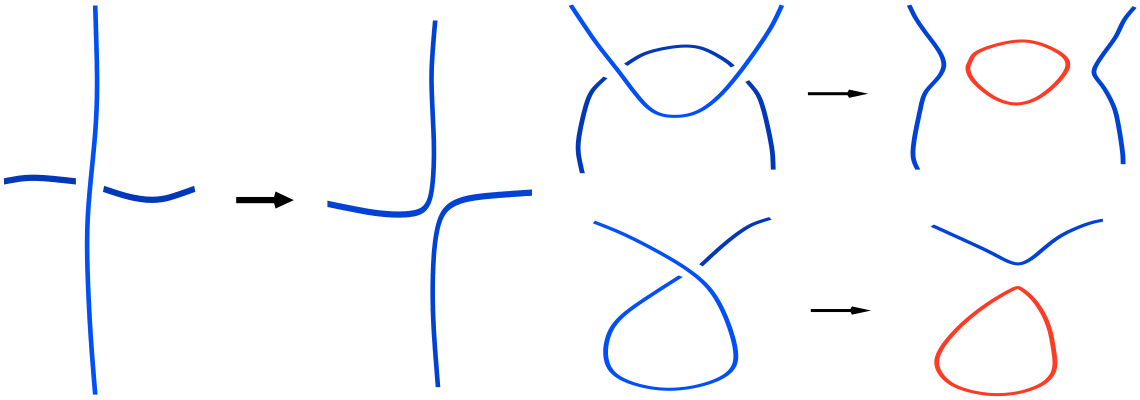


FIG. 2.5: À Gauche : exemple d'intercommutation de deux cordes cosmiques. À Droite : exemples de formation de vortons.

Cependant, il existe deux scénarios pour stabiliser de tels objets. Si la boucle tourne sur elle même, la force centrifuge qui s'oppose à la tension peut stabiliser le vorton. Également, si un courant électrique 'coule' dans le vortex, celui-ci génère un moment angulaire qui s'oppose à la tension. Les vortex supraconducteurs de Witten sont des candidats idéaux pour former des vortons stabilisés par le courant électrique. Il s'agit d'objets solitoniques de forme toroïdale constitués de vortex porteur d'un courant électrique. Ils pourraient avoir une longue durée vie et être présents à des échelles cosmiques. De tels objets ont déjà été explicitement construits dans le modèle de Witten lorsque les champs de jauge découplent [67, 68, 69]. Cependant le modèle de Witten est pertinent dans le contexte des théories grandes unifiées dont les échelles d'énergies sont inaccessibles. Il est légitime de s'interroger sur l'existence de telles solutions dans le cadre d'une théorie plus 'abordable'. Dans le contexte du modèle de Witten, on a vu qu'il faut deux champs scalaires et deux champs de jauge pour construire un vortex supraconducteur. Le modèle standard, est un bon candidat puisqu'il contient tous les éléments nécessaires à la construction de ces vortex. De plus le modèle standard est expérimentalement vérifié à de très grandes précisions.

On s'interroge donc sur l'existence de vortex supraconducteurs dans le modèle standard. En effet puisque cette théorie est accessible à l'expérimentation, au LHC par exemple, on devrait être en mesure d'avoir des traces expérimentales des nouvelles solutions qu'on souhaite construire. C'est pourquoi on s'est intéressé à la possibilité de construire des solutions analogues à celles de Witten dans le cadre de la théorie de Weinberg-Salam (modèle standard). Les solutions de type vortex, dans la théorie électrofaibles ont suscité un intérêt certain dans les années 1990. Cependant le sujet est tombé en désuétude après un certain nombre de résultats négatifs à leur encontre. En particulier les seuls vortex du modèle standard sont le plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen. Ces solutions sont instables pour les valeurs expérimentales des constantes de couplage de la théorie. Étonnamment, il n'a pas été possible de construire de nouvelles solutions plus générales. L'objectif principal de nos travaux est donc de tenter d'élucider la question de l'existence des vortex dans le modèle standard. On verra dans ce qui suit que les solutions génériques du modèle standard manifestent de nouvelles propriétés intéressantes.

Par ailleurs, en étudiant les propriétés de nos nouvelles solutions *supraconductrices*,

on devrait avoir une meilleure compréhension des constituants élémentaires qui pourraient permettre de construire des solutions analogues aux vortons dans le modèle standard. La construction de tels objets demanderait de sérieux efforts, et il est hors de propos ici de construire explicitement de telles configurations. Cependant la possible existence de solitons électrofaibles, pourrait avoir des conséquences importante pour la physique.

Deuxième partie

Vortex supraconducteurs dans la théorie de Weinberg-Salam

Un des aboutissements majeur de la physique du 20e siècle est le *modèle standard* des particules, ou théorie de Weinberg-Salam [70, 71]. Il décrit les interactions entre particules élémentaires au niveau subatomique. En particulier, ce modèle décrit de manière unifiée les interactions électromagnétiques et les interactions nucléaires faibles. On parle de modèle *électrofaible*. Bien qu'étant d'une richesse physique surprenante, il est complètement hors de propos d'exposer ici toutes les propriétés du modèle standard. Cependant, le lecteur intéressé peut se reporter à un des nombreux ouvrages couvrant le sujet (voir par exemple [38]). On se restreindra en particulier au secteur *bosonique* de la théorie classique. Tous les phénomènes impliquant des fermions ne sont pas abordés dans cette thèse.

Rien qu'au niveau classique, le secteur bosonique de la théorie est riche de beaucoup de solutions de type solitons. Parmi les solitons existant dans cette théorie, il faut mentionner les sphalérons [23, 72, 73, 74], leurs généralisations en rotations ou bien chargées [75, 76] ainsi que les configuartion multi-sphalérons [77, 78] . Les sphalérons sont des points-selles de l'énergie potentielle de la théorie, intervenant dans les processus de violation des nombres baryoniques et leptoniques. Il existe également des monopôles magnétiques [79, 80] et des oscillons [81, 82]. De nombreuses solutions plus ou moins en rapport avec les vortex ont également été construites. Les solutions correspondant au plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans le modèle standard ont été construites. Il s'agit des Z-string [24, 25] et W-string [26]. Ce sont les seules exemples de vortex proprement dit du modèle standard (voir [37] pour une revue couvrant le sujet). On trouve également des solutions 'composites' telles que les solutions périodiques BPS [83, 84, 85, 86, 87] qui décrivent un réseau de vortex. Les 'haltères en rotation' [88, 89] sont des vortex reliant une paire de monopôle-antimonopôle. L'attraction entre la paire de monopôles est contrebalancée par la force centrifuge due à la rotation menant ainsi à une configuration potentiellement stable. Il faut également mentionner des solutions de type 'noeuds' [90, 91]. Comme leur nom l'indique, les 'noeuds' sont en quelque sorte des boucles nouées de vortex.

Plongés dans des théories dont le groupe de jauge est plus grand, les vortex acquièrent des propriétés nouvelles. C'est le cas dans le modèle de Witten, significatif dans le contexte de théories grandes unifiées, où les vortex sont génériquement porteurs de courant. On peut alors s'interroger sur l'existence d'un tel phénomène à des échelles d'énergies plus accessibles. Pour que les solutions soient porteuses de courant, il faut deux champs scalaires et deux champs de jauge. Le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam semble alors un candidat idéal, pour la construction de solutions porteuses de courant à des échelles d'énergie raisonnables, puisqu'il possède suffisamment de champs. Notons par ailleurs que dans le cadre du modèle de Witten, il est possible de construire des vortons. On peut donc s'interroger également sur l'existence de telles solutions à des énergies moindre. Un premier pas en vu d'étudier de telles solutions dans le cadre du modèle standard est de considérer des solutions 'droites' et d'en construire la généralisation porteuse de courant. Soulignons le fait que les seules solutions décrivant des vortex infiniment longs dans le secteur bosonique du modèle standard sont le plongement d'ANO. Il serait étonnant, vu la richesse de la théorie (il y a beaucoup de champs), qu'il s'agisse des seules solutions possibles. Récemment ont été construites des solutions plus générales [92] qui portent un courant. Cette partie de la thèse reprend les travaux que nous avons menés [93] en vue d'étudier en détail les propriétés physiques des *vortex supraconducteurs* de la théorie de Weinberg-Salam.

Après avoir introduit le modèle et les quantités physiques utiles pour notre étude, nous discuterons des solutions de type vortex déjà connues dans un premier chapitre. Les chapitres suivants de cette partie sont, quant à eux, respectivement dédiés à la construction des nouvelles solutions supraconductrices et à l'étude de leurs propriétés physiques. Une grande partie des calculs qui seront présentés ici sont publiés [93], c'est pourquoi certains détails sont omis pour se concentrer sur nos observations. Le lecteur intéressé par plus de détails pouvant se référer à l'article. Seuls les résultats concernant l'analyse perturbative dans le régime des courants faibles Sec. 5.2 sont nouveaux et n'ont pas fait l'objet d'une publication.

Chapitre 3

Rappels sur la théorie de Weinberg-Salam

L'activité scientifique autour de vortex dans la théorie de Weinberg-Salam à été très importante au cours des années 1990 . En particulier en vue de promouvoir les solutions de Witten dans le modèle standard (pour une revue, voir [37]).

3.1 Le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam

Dans cette section, nous présentons dans les grandes lignes le cadre théorique dans lequel on travaillera. Il s'agit du modèle de Weinberg-Salam [70, 71] . Ce modèle apparu dans la deuxième moitié des années 1970 décrit de manière unifiée les interactions nucléaires faibles et l'électrodynamique[1]. On parle alors d'interactions électrofaibles. Pour plus de détail à ce sujet, nous renvoyons le lecteur à un des nombreux ouvrages dédiés à ce sujet (par exemple [38]). Le modèle standard est une théorie quantique des champs qui décrit les interactions entre les particules au niveau subatomique (la portée des interactions faibles étant de l'ordre du fermi). Il est néanmoins pertinent de considérer cette théorie au niveau classique. Le modèle standard des interactions électrofaibles est décrit par l'action

$$\mathbf{S}_{\mathrm{WS}} = \mathbf{S}^{(\mathrm{b})}_{\mathrm{WS}} + \mathbf{S}^{(\mathrm{f})}_{\mathrm{WS}} \,. \tag{3.1}$$

Ici $\mathbf{S}^{(\mathrm{b})}_{\mathrm{WS}}$ désigne le secteur bosonique de la théorie et $\mathbf{S}^{(\mathrm{f})}_{\mathrm{WS}}$ le secteur fermionique. Nous portons notre attention exclusivement sur le secteur bosonique de la théorie. Ainsi le secteur fermionique est complètement passé sous silence ici.

Le secteur bosonique du modèle standard est décrit par une théorie invariante sous le groupe de jauge $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$. $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}}$ est le groupe d'isospin faible et $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ celui d'hypercharge. Il décrit la dynamique d'un doublet scalaire complexe (le champ de Higgs $\mathbf{\Phi}$ dans représentation fondamentale), couplé à un champ de jauge abélien ($\mathbf{B}_\mu$ chargé

[1] En 1979 , Weinberg, Salam et Glashow sont gratifiés du Prix Nobel de Physique pour leurs contributions à la théorie unifiant les interactions faibles et électromagnétiques entre les particules élémentaires, en particulier la prédiction du courant neutre.

sous $\mathrm{U(1)_Y}$) et à un champ de jauge non-abélien ($\mathbf{W}_\mu$ chargé sous $\mathrm{SU(2)_I}$). Le secteur bosonique est décrit par l'action classique

$$\mathbf{S}^{(\mathrm{b})}_{\mathrm{WS}} = \frac{1}{\mathbf{c}} \int \left[-\frac{1}{4} \mathbf{W}^a_{\mu\nu} \mathbf{W}^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathbf{B}_{\mu\nu} \mathbf{B}^{\mu\nu} + (\mathbf{D}_\mu \mathbf{\Phi})^\dagger (\mathbf{D}^\mu \mathbf{\Phi}) - \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_0^2)^2 \right] \mathrm{d}^4 \mathbf{x} \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{c}$ la vitesse de la lumière dans le vide et $\mathbf{\Phi}_0$ la valeur moyenne du vide du champ de Higgs. † désigne la conjugaison hermitienne. Les tenseurs de force des champs et la dérivée covariante de jauge sont

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{W}^a_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}^a_\mu + \mathbf{g} \epsilon_{abc} \mathbf{W}^b_\mu \mathbf{W}^c_\nu \,, \\ \mathbf{B}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu \,, \\ \mathbf{D}_\mu \mathbf{\Phi} &= \left(\partial_\mu - \frac{i\mathbf{g}'}{2} \mathbf{B}_\mu - \frac{i\mathbf{g}}{2} \tau^a \mathbf{W}^a_\mu \right) \mathbf{\Phi} \,. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Conformément aux notations utilisées précédemment, les indices grecs prennent les valeurs $0 \ldots 3$ en référence aux dimensions d'espace-temps, les indices latins $(i\,, j\,, k\,, \ldots)$ désignent les composantes spatiales $(1\,, 2\,, 3\,)$. Les autres indices latins $(a\,, b\,, c\,, \ldots)$ relatifs au groupe d'isospin faible prennent les valeurs $1\,, 2\,, 3\,$. La répétition des indices indique implicitement la sommation, selon la convention d'Einstein. La contraction avec le tenseur métrique de Minkowski permet de transformer les composantes covariantes en contravariantes. $\mathbf{W}^a_\mu$ et $\mathbf{B}_\mu$ sont respectivement les champs de jauge d'hypercharge et d'isospin faible. $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$ et $\boldsymbol{\lambda}$ désignent les constantes de couplage de la théorie qui seront discutées sous peu. À nouveau les caractères gras désignent des grandeurs dimensionnées dont il sera utile de se débarrasser au profit de grandeurs adimensionnées.

Soient τ^a les matrices de Pauli choisies dans la représentation fondamentale

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

à partir desquelles sont définis les générateurs du groupe d'isospin faible $\mathrm{T}^a = \frac{\tau^a}{2}$. qui satisfont les relations de commutations $[\mathrm{T}^a, \mathrm{T}^b] = i\epsilon^{abc}\mathrm{T}^c$. Le générateur du groupe d'hypercharge quant à lui est noté $\mathrm{Y} = \mathbb{1}$. Dans sa phase symétrique ($\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y}$), les bosons de jauge de la théorie de Weinberg-Salam sont à masse nulle. Expérimentalement, le spectre de masse de la théorie est composé de particules massives (les bosons chargés $\mathrm{W}^\pm$, le boson neutre Z^0 et le boson de Higgs) et d'un photon à masse nulle. Les champs acquièrent une masse, conformément au mécanisme de brisure spontanée exposé avant (Sec. 1.1.2). Pour reproduire le spectre de particules expérimentalement observé, le processus de brisure spontanée de symétrie est

$$\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y} \to \mathrm{U(1)_{EM}} \,. \quad (3.5)$$

Le vide de la théorie devant briser $\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y}$ est donné, dans la jauge unitaire, par

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = (\mathbf{\Phi}_0, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}^a_\mu = \mathbf{B}_\mu = 0 \,, \quad (3.6)$$

définissant ainsi la variété du vide

$$\mathcal{M}_{\mathrm{WS}} = \frac{\mathrm{SU(2)_I} \times \mathrm{U(1)_Y}}{\mathrm{U(1)_{EM}}} \,. \quad (3.7)$$

3.1.1 Échelle de longueurs – Variables adimensionnées

Afin de simplifier l'analyse du modèle, il est important d'introduire les échelles de longueur pertinentes. Il est ainsi utile de définir les paramètres $\mathbf{g}_0 = \sqrt{\mathbf{g}^2 + \mathbf{g}'^2}$ et l'angle de mélange faible $\theta_{\rm W} = \tan^{-1}(\mathbf{g}'/\mathbf{g})$. Les expériences menées dans les accélérateurs de particules, donnent comme valeur *physique* $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23\ldots$. Jusqu'ici toutes les quantités intervenant dans l'action (3.2) sont des grandeurs dimensionnées. Afin de simplifier les calculs, il est utile d'introduire des quantités adimensionnées. Soient

$$g = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}_0} \equiv \cos\theta_{\rm W}\,,\ g' = \frac{\mathbf{g}'}{\mathbf{g}_0} \equiv \sin\theta_{\rm W} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{8\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{g}_0^2}\,, \tag{3.8}$$

les constantes de couplage adimensionnées. Le paramètre $\mathbf{g}_0$ est lié à la charge de l'électron d'après la relation $\mathbf{e} = gg'\hbar\mathbf{c}\mathbf{g}_0$. Ainsi, la dimension de $\mathbf{g}_0$ est l'inverse de la dimension de la charge de l'électron ($[\mathbf{g}_0] = [1/\mathbf{e}]$) et sa valeur est calculée à partir de la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{\mathbf{e}^2}{4\pi\hbar\mathbf{c}} = \frac{1}{137}\,. \tag{3.9}$$

Afin de briser spontanément la symétrie, le champ de Higgs prend une valeur moyenne non nulle dans le vide. Expérimentalement, cette valeur est

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = 246\ \ \text{GeV} = 54.26\times 10^9\ \ \text{Volts}\,. \tag{3.10}$$

L'échelle naturelle de longueur est donnée par la longueur de Compton du boson neutre Z

$$\mathbf{L}_{\rm Z} = \sqrt{2}\mathbf{L} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{L} = \frac{1}{\mathbf{g}_0\boldsymbol{\Phi}_0} = 1.52\times 10^{-18}\ \ \text{mètres}\,. \tag{3.11}$$

Connaissant les échelles de longueur, il n'est plus nécessaire de garder les variables dimensionnées. Soient les grandeurs adimensionnées

$$x^\mu = \mathbf{g}_0\boldsymbol{\Phi}_0\mathbf{x}^\mu\,, \qquad B_\mu = \frac{g'}{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{B}_\mu\,, \qquad W^a_\mu = \frac{g}{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{W}^a_\mu\,, \qquad \Phi = \frac{\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{\Phi}_0} \tag{3.12}$$

telles que l'action s'écrit à présent

$$\mathbf{S}^{(\rm b)}_{WS} = \frac{1}{\mathbf{c}\boldsymbol{\Phi}_0^2}\int \mathcal{L}_{\rm ws}{\rm d}^4x\,, \tag{3.13}$$

avec la densité lagrangienne d'action

$$\mathcal{L}_{\rm ws} = -\frac{1}{4g^2}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4g'^2}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \frac{\beta}{8}(\Phi^\dagger\Phi - 1)^2\,. \tag{3.14}$$

À présent les tenseurs de force et la dérivée covariante de jauge s'écrivent

$$\begin{aligned} W^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + \epsilon_{abc}W^b_\mu W^c_\nu\,,\\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\,,\\ D_\mu\Phi &= \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}B_\mu - \frac{i}{2}\tau^a W^a_\mu\right)\Phi\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

La densité lagrangienne (3.14) est invariante sous les transformations de jauge

$$\Phi \to \mathrm{U}\Phi\,, \qquad\qquad \mathcal{W} \to \mathrm{U}\mathcal{W}\mathrm{U}^{-1} + 2i\mathrm{U}\partial_\mu \mathrm{U}^{-1}\mathrm{d}x^\mu \tag{3.16}$$

générées par $\mathrm{U} = \exp i\left(\vartheta^0 + \tau^a\vartheta^a\right)/2$, où ϑ^0 et ϑ^a, sont des fonctions arbitraires de x^μ, et $\mathcal{W} = (B_\mu + \tau^a W^a_\mu)\mathrm{d}x^\mu$ le champ de jauge à valeur dans l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$. La variation fonctionnelle de l'action (3.13) par rapport aux champs défini les équations du mouvement d'Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
\partial^\mu B_{\mu\nu} &= g'^2 \frac{i}{2}((D_\nu\Phi)^\dagger\Phi - \Phi^\dagger D_\nu\Phi) \equiv g'^2 J^0_\nu\,,\\
D^\mu W^a_{\mu\nu} &= g^2 \frac{i}{2}((D_\nu\Phi)^\dagger\tau^a\Phi - \Phi^\dagger\tau^a D_\nu\Phi) \equiv g^2 J^a_\nu\,,\\
D_\mu D^\mu\Phi &+ \frac{\beta}{4}(\Phi^\dagger\Phi - 1)\Phi = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $D_\mu W^a_{\alpha\beta} = \partial_\mu W^a_{\alpha\beta} + \epsilon_{abc} W^b_\mu W^c_{\alpha\beta}$. La variation de l'action par rapport au tenseur métrique d'espace-temps $g^{\mu\nu}$ définit le tenseur énergie-impulsion

$$\begin{aligned}
T^\mu{}_\nu &= 2g^{\mu\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{WS}}}{\partial g^{\sigma\nu}} - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}_{\mathrm{WS}}\\
&= -\frac{1}{g^2}W^{a\mu\sigma}W^a_{\nu\sigma} - \frac{1}{g'^2}B^{\mu\sigma}B_{\nu\sigma} + (D^\mu\Phi)^\dagger D_\nu\Phi + (D_\nu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}_{\mathrm{WS}}\,.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.1.2 Spectre de masse de la théorie

Dans le système des variables adimensionnées le vide unitaire (3.6) s'écrit

$$B_\mu = W^a_\mu = 0\,, \qquad\qquad \Phi^{-1} = (1,0)\,. \tag{3.19}$$

Afin de déterminer le spectre de masse des particules de la théorie, il faut considérer les fluctuations des champs autour du vide unitaire (3.19). Ainsi les fluctuations sont $\Phi^{-1} = (1+\phi, 0)$ avec ϕ, B_μ, W^a_μ réels et petits. Les équations pour les perturbations obtenues en linéarisant (3.17) sont

$$\begin{aligned}
&\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0\,,\\
&\partial^\mu Z_{\mu\nu} + m^2_{\mathrm{Z}}\, Z_\nu = 0\,,\\
&\partial^\mu W^a_{\mu\nu} + m^2_{\mathrm{W}}\, W^a_\nu = 0 \qquad (a = 1,2)\,,\\
&\partial^\mu\partial_\mu\phi + m^2_{\mathrm{H}}\,\phi = 0.
\end{aligned} \tag{3.20a}$$

Les champs électromagnétique F et Z sont $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$. Les potentiels associés sont définis comme des combinaisons linéaires des champs de jauge

$$A_\mu = \frac{g}{g'}B_\mu - \frac{g'}{g}\,W^3_\mu\,, \qquad Z_\mu = B_\mu + W^3_\mu\,, \qquad W^\pm_\mu = W^1_\mu \pm iW^2_\mu \tag{3.21}$$

et les masses associées aux différents champs sont

$$m_{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad m_{\mathrm{W}} = g m_{\mathrm{Z}}\,, \qquad m_{\mathrm{H}} = \sqrt{\beta}\, m_{\mathrm{Z}}\,. \tag{3.22}$$

Le paramètre β est alors le rapport entre les masses du champ de Higgs et celle du boson neutre Z. Les masses (3.22) sont exprimées selon les grandeurs adimensionnées. Afin de déterminer les masses réelles, il faut multiplier les expressions (3.22) par $\hbar \mathbf{c} \mathbf{g}_0 \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{e}\mathbf{\Phi}_0/(gg')$. Ainsi la masse du boson Z, par exemple, est

$$\mathbf{m}_{\mathrm{Z}}\mathbf{c}^2 = \mathbf{e}\mathbf{\Phi}_0 m_{\mathrm{Z}}/(gg') \approx 91.18 \quad \mathrm{GeV}\,. \tag{3.23}$$

La masse du boson de Higgs est inconnue à ce jour (et par extension le rapport de masse β). Cependant les expériences donnent comme estimation des valeurs physiques de β [38] l'intervalle $1.5 \leq \beta \leq 2.5$. Pour la plupart des calculs numériques qui seront menés, on considérera que $\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.23$ sont les valeurs *physiques* des paramètres de la théorie.

3.1.3 Définition des champs physiques

Définir les champs électromagnétique et Z est problématique. En effet, il n'y a pas de définition unique permettant de construire les quantités physiques invariantes de jauge. La définition utilisée précédemment pour déterminer le spectre de masse de la théorie n'est valide qu'au voisinage du vide unitaire (3.19). Il faut donc une définition des champs invariants de jauge hors du vide, mais la définition n'est pas unique. On présentera donc deux définitions qui s'accordent dans le vide avec (3.21).

La définition de Nambu [88] des champs électromagnétique et Z est celle que nous utiliserons principalement tout au long de ce manuscrit. Nambu introduit les tenseurs de champs invariants de jauge

$$F_{\mu\nu} = \frac{g}{g'} B_{\mu\nu} - \frac{g'}{g} n^a W^a_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad Z_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + n^a W^a_{\mu\nu}\,. \tag{3.24}$$

Par définition, le tenseur $Z_{\mu\nu}$ est la combinaison linéaire des tenseurs de champs d'isospin faible ($\mathrm{SU(2)_I}$) et d'hypercharge ($\mathrm{U(1)_Y}$) orthogonale au tenseur du champ électromagnétique, $F_{\mu\nu}$. Les (iso)vecteurs unitaires sont

$$n^a = \frac{\Phi^\dagger \tau^a \Phi}{|\Phi|^2}\,. \tag{3.25}$$

On vérifie aisément que les n^a sont effectivement des vecteurs unitaires ($n^a n^a = 1$) en utilisant l'identité de Fierz $\sum_a (\Phi^\dagger \tau^a \Phi)^2 = |\Phi|^2$. Ils se transforment dans la représentation fondamentale de $\mathrm{SU(2)_I}$ et $|\Phi|$ est un scalaire invariant de jauge. Il n'est pas possible de définir les potentiels vecteurs associés aux champs (3.24), puisque les 2-formes ne sont en général pas *fermées*. Bien qu'une autre définition des champs électromagnétique et Z donnée par 't Hooft permettent de définir des potentiels, la définition de Nambu est en général préférée pour traiter des vortex dans le modèle standard [2].

[2] C'est cette définition qui a été utilisée par exemple dans [37, 94]. Le problème de la définition des champs électromagnétique et Z est par ailleurs discuté dans [95].

La définition de 't Hooft [12], peu utilisée au sujet des vortex[3], permet d'introduire les potentiels invariants de jauge. Les tenseurs invariants de jauge des champs électromagnétique et Z sont

$$F^{\mathrm{H}}_{\mu\nu} = \frac{g}{g'}B_{\mu\nu} - \frac{g'}{g}\mathcal{V}_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad Z^{\mathrm{H}}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \mathcal{V}_{\mu\nu} \tag{3.26}$$

où la 2-forme invariante de jauge $\mathcal{V}_{\mu\nu}$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(n^a W^a_\nu) - \partial_\nu(n^a W^a_\mu) - \epsilon_{abc}\partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \\ &= n^a W^a_{\mu\nu} - \epsilon_{abc} D_\mu n^b D_\nu n^c \\ &= \partial_\mu \mathcal{V}_\nu - \partial_\nu \mathcal{V}_\mu \,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ici $D_\mu n^a = \partial_\mu n^a + \epsilon_{abc} W^b_\mu n^c$ et $\mathcal{V}_\mu = n^a W^a_\mu + 2i\frac{\Phi^\dagger}{|\Phi|}\partial_\mu\frac{\Phi}{|\Phi|}$. Cette définition est plus élégante puisqu'elle permet de connaître les potentiels des champs de jauges explicitement. Ainsi les potentiels électromagnétique et Z sont

$$A^{\mathrm{H}}_\mu = \frac{g}{g'}B_\mu - \frac{g'}{g}\mathcal{V}_\mu \quad \text{et} \quad Z^{\mathrm{H}}_\mu = B_\mu + \mathcal{V}_\mu \,. \tag{3.28}$$

Lorsque $n^a = (0,0,1)$, ce qui correspond à la jauge unitaire, les potentiels prennent la forme $A_\mu = \frac{g}{g'}B_\mu - \frac{g'}{g}W^3_\mu$ et $Z_\mu = B_\mu + W^3_\mu$ plusieurs fois utilisée [83, 96, 84, 86, 87]. Bien que la définition de 't Hooft (3.26) définisse explicitement les potentiels, elle mène à des résultats singuliers dont l'interprétation est parfois difficile. C'est pourquoi, la définition de Nambu (3.24) sera utilisée, puisqu'elle permet une interprétation sans ambiguïté.

Les Flux F et Z peuvent être calculés d'après les différentes définitions des tenseurs invariants de jauge (3.24) ou (3.26)

$$\Psi_F = \frac{1}{2}\int \epsilon_{ij}F_{ij}\mathrm{d}^2x \,, \quad \Psi_Z = \frac{1}{2}\int \epsilon_{ij}Z_{ij}\mathrm{d}^2x \tag{3.29}$$

où d^2x est l'élément de surface du plan orthogonal au vortex. La définition de 't Hooft admettant des potentiels, il est possible d'appliquer le théorème de Stokes pour déterminer les flux en fonction des intégrales sur le bord du plan. Dans le cas de Nambu, il faut calculer les intégrales de surfaces.

3.2 Plongement des solutions ANO dans la théorie de Weinberg et Salam

Une idée relativement naturelle pour construire des solutions de type vortex dans la théorie de Weinberg-Salam, est d'y définir un plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen. En effet, le groupe de symétrie du modèle Higgs abélien est contenu dans celui de Weinberg-Salam. Deux plongements inéquivalents des vortex ANO sont possibles. Ils génèrent deux solutions physiquement différentes appelées *Z-string* [24, 25] et *W-string* [26].

[3]Cette définition est plus couramment utilisée pour traiter des monopôles magnétiques.

3.2.1 Z-strings et W-strings

Deux plongements inéquivalents des solutions du modèle $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{HA}}$ (2.3) dans $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ (3.13) sont paramétrés par les champs

$$\mathcal{W}_{\mathrm{Z}} = 2(g'^2 + g^2\tau^3)(n - v_{\mathrm{ANO}})\mathrm{d}\varphi\,, \qquad \Phi_{\mathrm{Z}}^{-1} = (f_{\mathrm{ANO}}\mathrm{e}^{in\varphi}, 0)\,, \tag{3.30a}$$

$$\mathcal{W}_{\mathrm{W}} = 2\tau^1(n - v_{\mathrm{ANO}})\mathrm{d}\varphi\,, \qquad \Phi_{\mathrm{W}}^{-1} = f_{\mathrm{ANO}}\left(\cos(in\varphi), i\sin(in\varphi)\right)\,. \tag{3.30b}$$

La configuration $(\mathcal{W}_{\mathrm{Z}}, \Phi_{\mathrm{Z}})$ est appelée *Z-string* et $(\mathcal{W}_{\mathrm{W}}, \Phi_{\mathrm{W}})$ *W-string*. Chacune des configurations, conjointement aux équations du mouvement (3.17) mène au système d'équations défini pour les vortex dans le modèle Higgs abélien (2.11). Bien que les deux configurations (3.30a) et (3.30b) satisfassent les mêmes équations, elles sont *physiquement différentes*. En effet il n'existe pas de transformation de jauge (3.16) permettant de passer d'une configuration à l'autre. En particulier le calcul des flux invariants de jauge (3.29), montre que les solutions ont des propriétés physiques *différentes*

$$\Psi_{\mathrm{Z}}(\text{Z-string}) = 4\pi n\,, \qquad \Psi_{\mathrm{F}}(\text{Z-string}) = 0\,, \tag{3.31a}$$

$$\Psi_{\mathrm{Z}}(\text{W-string}) = \frac{4\pi n}{\sqrt{2}}\,, \qquad \Psi_{\mathrm{F}}(\text{W-string}) = -\frac{4\pi n}{\sqrt{2}}\frac{g'}{g}\,. \tag{3.31b}$$

Ceci est dû au fait qu'il existe deux façon inéquivalentes de plonger le groupe $\mathrm{U}(1)$ dans $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ [97, 98].

3.2.2 Instabilité du plongement

Ayant montré la possibilité de plonger les solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans la théorie de Weinberg-Salam, on s'interroge légitimement sur leur stabilité. Il nous a en effet été donné de constater, dans le cas du plongement des solutions ANO dans le modèle de Witten, que le plongement ne garantit pas le report des propriétés de stabilité (Sec. 2.2). C'est d'autant plus vrai que la topologie de la théorie de Weinberg-Salam est très différente de celle du modèle Higgs abélien. C'est la topologie du vide de la théorie qui garantit la stabilité des solutions ANO (Sec. 2.1.3) (tout du moins lorsque le vortex possède une unité de flux magnétique). La variété du vide de la théorie ne permet pas d'imposer de borne topologique à l'énergie [99, 23, 72]. Il est en effet possible de déformer continument les solutions plongées vers des configurations triviales. Les Z-strings et les W-strings sont 'posées' sur des sphères non-contractibles et sont alors interprétées comme des *sphalerons* [100]. W-string est instable pour toutes les valeurs de θ_{W}. Pour les Z-strings l'instabilité est moins flagrante puisque l'analyse ne prouve l'instabilité que pour un intervalle de θ_{W}.

Une autre approche, afin d'étudier la stabilité des solutions ANO plongées dans le modèle standard, est de considérer les petites fluctuations autour des champs de fond. Ainsi en choisissant les champs $\mathcal{W} + \delta\mathcal{W}$ et $\Phi + \delta\Phi$, les amplitudes pertinentes sont

$$\delta\mathcal{W} = (\cos\psi\tau^1 - \sin\psi\tau^2)[\delta u_1 \sigma^\alpha \mathrm{d}x^\alpha - \delta v_1 \mathrm{d}\varphi]\,, \qquad \delta\Phi^{-1} = \left(0, \delta f_2 \mathrm{e}^{i(n\varphi - \psi)}\right)\,. \tag{3.32}$$

La phase est $\psi = \nu\varphi - \sigma_\alpha x^\alpha$ $(\alpha = 0, 3)$ et chacune des amplitudes δu_1, δv_1, δf_2 dépend implicitement de la variable radiale ρ. Afin de déterminer l'influence des fluctuations sur

la configuration, il faut considérer les équations du mouvement linéarisées autour du fond de Z-string. Ainsi les configurations perturbées (3.32) doivent satisfaire les équations du mouvement (3.17) linéarisées. La connaissance des propriétés de stabilité des solutions est capitale pour la construction des nouvelles solutions. Cependant la connaissance de l'allure explicite des équations n'est pas importante pour la discussion qui nous intéresse ici. On ne présentera donc que les résultats concernant la stabilité. En fait, on verra qu'il existe plusieurs façons d'écrire le système décrivant la stabilité. Soit comme un problème spectral (Sec. 5.2), soit comme un problème de Schrödinger (Sec. 7.2) dont la valeur propre est σ^2. Dans les deux cas les résultats sont parfaitement identiques et reproduisent exactement ceux de [28, 29]. En fonction du choix, c'est l'allure de l'opérateur différentiel qui change, mais on détermine la même valeur propre $\sigma^2 = \sqrt{-\sigma_\alpha \sigma^\alpha}$. On cherche ainsi à connaître le spectre des solutions du type états liés d'un opérateur différentiel. Puisqu'il s'agit d'états liés, les amplitudes doivent être localisées et se comportent asymptotiquement comme $\delta f_2 \sim \mathrm{e}^{-m_\sigma \rho}$ avec le taux de convergence $m_\sigma^2 = m_\mathrm{W}^2 + \sigma^2$. Si $\sigma^2 < 0$ la configuration de fond est instable puisque $\delta\Phi_2 \sim \mathrm{e}^{i\sigma_0 t}$. Pour plus de détails au sujet des fluctuations autour de Z-string, voir [93] et Sec. 5.2 ou Sec. 7.2 pour le détail des équations. Les solu-

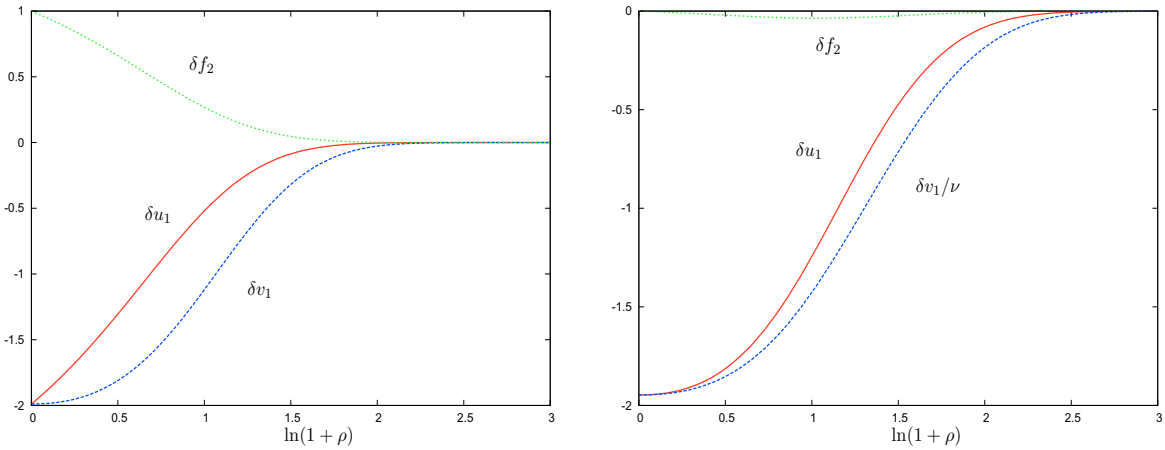


FIG. 3.1: Les amplitudes solutions du problème de Schrödinger pour des valeurs physiques des paramètres de la théorie $\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.23$ et $\beta = 2$. À gauche : $n = \nu = 1$ et la valeur propre $\sigma^2 = 0.5036$ À droite : $n = 1, \nu = 2$ et la valeur propre $\sigma^2 = -0.0876$.

tions de l'opérateur des perturbations autour de Z-string sont construites numériquement pour différentes valeurs des paramètres de la théorie. Pour la résolution numérique, il faut également tenir compte des conditions de régularité à l'origine. D'après le profil Fig. 3.1 les amplitudes sont clairement localisées.

Pour construire des solutions au niveau non-linéaire, la connaissance de la structure de l'espace des solutions au niveau linéaire s'avère très précieuse. Il faut donc considérer des solutions pour un maximum de valeurs différentes des paramètres de la théorie. Pour une valeur donnée de β et lorsque $\sin^2\theta_\mathrm{W}$ n'est pas trop grand, on trouve $2n$ différents états liés voir Fig. 3.2 et Fig. 3.3. Il est par exemple possible de voir pour le vortex élémentaire ($n = 1$) qu'il existe deux solutions $\nu = 1$ et $\nu = 2$. Sur les figures Fig. 3.2 et Fig. 3.3

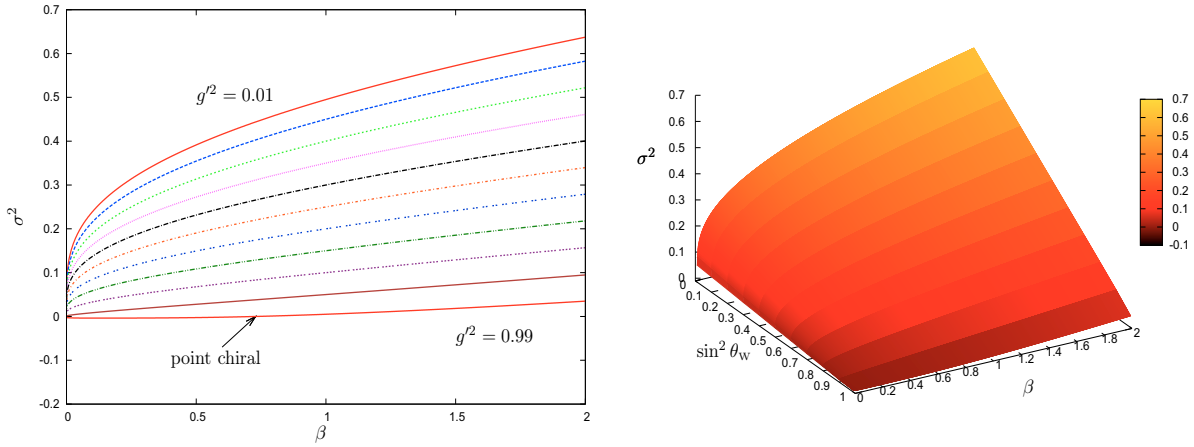


FIG. 3.2: La valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction du rapport de masses β pour différentes valeurs de $\sin^2\theta_W = g'^2$ de la solution $n = \nu = 1$. À droite est représentée la surface $\sigma^2(\beta, \theta_W)$ de cette solution.

est représentée la valeur propre σ^2 pour chacune des solutions. L'influence des paramètres physiques β, θ_W y est mise en avant avec les graphiques des surfaces $\sigma^2(\beta, \theta_W)$.

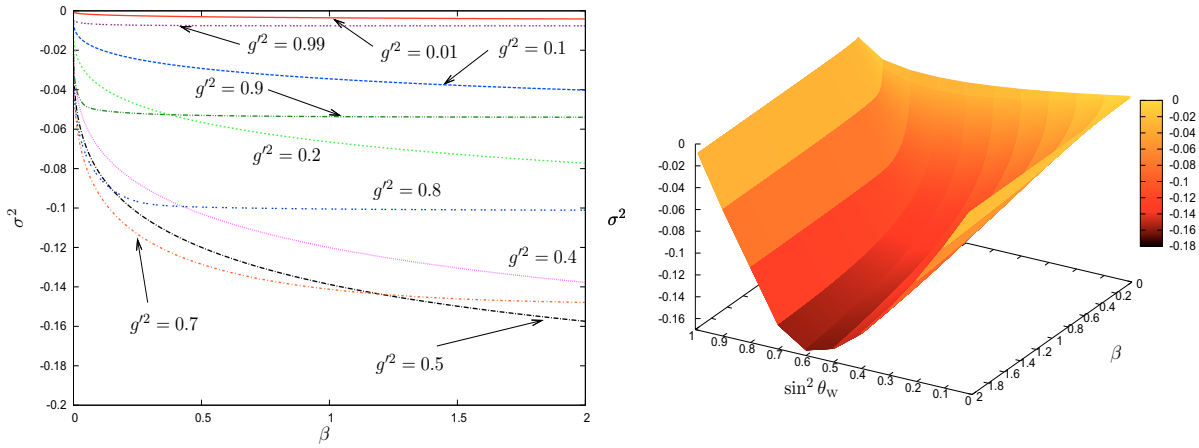


FIG. 3.3: La valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction du rapport de masses β pour différentes valeurs de $\sin^2\theta_W = g'^2$ de la solution $n = 1$, $\nu = 2$. À droite est représentée la surface $\sigma^2(\beta, \theta_W)$ de cette solution.

Les différents états liés dénotés par $\nu = 1, \ldots, 2n$ ayant $\sigma^2(\beta, \theta_W, n, \nu)$ pour valeur propre sont interprétés comme des déformations de Z-string par un courant faible $\mathcal{I}_\alpha \sim \sigma_\alpha$. Il faut cependant remarquer qu'au niveau linéaire le courant n'est pas encore défini, puisqu'il apparaît comme une caractéristique des solutions non-linéaires. Selon les valeurs prises par ν la nature de la valeur propre change. Effectivement lorsque $\nu = 1$ la valeur propre est positive tant que $\sin^2\theta_W$ est suffisamment petit, alors que pour $\nu = 2$ elle est toujours négative. La localisation des solutions impose cependant que la masse effective m_σ soit

réelle, c'est à dire

$$\sigma^2 < m_{\rm W}^2 \,. \tag{3.33}$$

Comme dans le cas du modèle de Witten la nature de la valeur propre permet de classifier la nature des solutions. Rappelons que si $\sigma^2 < 0$ la solution est qualifiée d'*électrique* et si $\sigma^2 > 0$ la solution est appelée *magnétique*. Le cas spécial $\sigma^2 = 0$ est la solution *chirale*. Afin de mieux comprendre comment apparaissent les différentes solutions, il est utile d'explorer l'espace des paramètres pour les configurations *multivortex* ($n > 1$). Pour cela on construit les différentes excitations (différentes valeurs de ν) pour différents fonds (différentes valeurs de n) dont les courbes sont présentées Fig. 3.4, Fig. 3.5. D'après le comportement de la

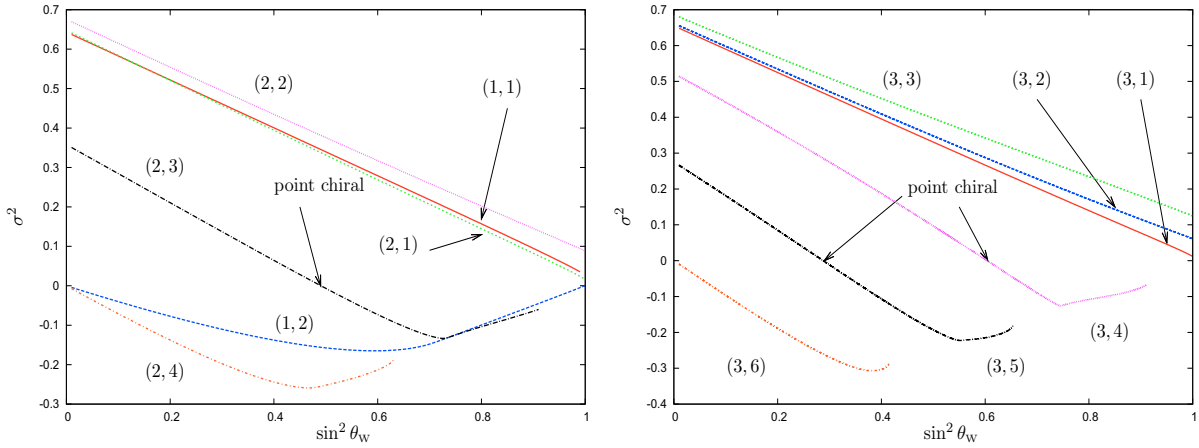


FIG. 3.4: Dépendance de la valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction de $\sin^2\theta_{\rm W}$ pour le rapport de masses $\beta = 2$. Les valeurs des entiers n et ν sont données (n, ν). Les solutions chirales $\sigma^2 = 0$ n'existent pas de manière générique. Lorsque la condition (3.33) est violée les courbes telles que $\sigma^2 < 0$ se terminent.

valeur propre en fonction des paramètres β et $\theta_{\rm W}$ de la théorie (Fig. 3.2–Fig. 3.5), il est possible au niveau linéaire, de dégager la prédiction suivante :

Il existe $2n$ *excitations de la configuration de fond* n. *Parmi elles les* n *premières excitations* $\nu = 1, \ldots n$ *de nature magnétique existent quelque soit la valeur de l'angle* θ_W. *L'excitation* $\nu = 2n$ *est toujours électrique. La nature des* $n-1$ *excitations telles que* $n < \nu < 2n$ *dépend de l'angle* θ_W. *Les solutions électriques existent tant que la condition de localisation* (3.33) *est respectée.*

Contrairement au modèle de Witten, les excitations 'chirales' dans le modèle standard ne sont pas génériques. Elles n'existent en effet que pour des valeurs très *particulières* de β et $\theta_{\rm W}$ telles que

$$\sigma^2(\beta, \theta_{\rm W}; n, \nu) = 0 \,. \tag{3.34}$$

Cette condition détermine l'ensemble des courbes 'chirales' de la théorie (Fig. 3.6). Ces courbes chirales coïncident avec les courbes délimitant les régions de stabilité des Z-strings

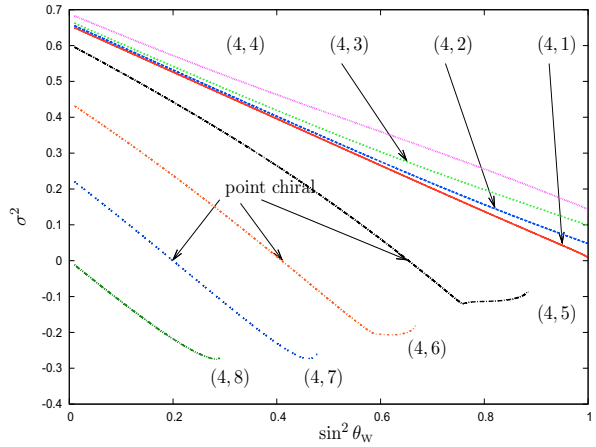


FIG. 3.5: Dépendance de la valeur propre σ^2 du problème de Schrödinger en fonction de $\sin^2\theta_W$ pour le rapport de masses $\beta = 2$ de la solution de fond $n = 4$.

[28, 29]. Il est en effet possible d'interpréter ces courbes pour reproduire les résultats sur la stabilité des Z-strings. D'après (3.32), les amplitudes sont

$$(\delta\mathcal{W}, \delta\Phi) \sim \exp\{\pm i(\sigma_0 x^0 + \sigma_3 x^3)\}\,, \tag{3.35}$$

pour la valeur propre $\sigma^2 = \sigma_3^2 - \sigma_0^2$. La pulsation est alors $\sigma_0 = \sqrt{\sigma_3^2 - \sigma^2}$. Ainsi, lorsque $\sigma^2 > 0$ le choix du nombre d'onde $\sigma_3 < \sigma$ rend la pulsation imaginaire et les fluctuations divergentes dans le temps. Au contraire, en choisissant $\sigma_3 > \sigma$ ou $\sigma^2 < 0$, la pulsation σ_0 est toujours réelle. Les amplitudes décrivent alors des déformations stationnaires des Z-strings. Le signe de la valeur propre détermine alors la présence de modes négatifs. Les courbes chirales $\sigma^2(\beta, \theta_W; n, \nu) = 0$ (Fig. 3.6) délimitent les régions de l'espace des paramètres pour lesquelles la ν-ième excitation du n-ième vortex (le vortex avec n quanta de flux) est électrique (*resp.* magnétique) et par conséquent stable (*resp.* instable). Les courbes chirales joueront un rôle crucial dans la construction des solutions au niveau non-linéaire. On verra en effet qu'elles permettent de distinguer les régions où les vortex supraconducteurs peuvent exister de celles où elles ne peuvent pas.

Rappelons que le détail de l'opérateur décrivant les fluctuations sera abordé à plusieurs reprises. Tout d'abord, afin de décrire la bifurcation avec les solutions Z-strings, dans le régime où le courant est faible Sec. 5.2. La stabilité des Z-string sera revisitée plus en détail lors de l'étude détaillée de l'opérateur de stabilité des solutions supraconductrices Sec. 7.2. En particulier, on reviendra sur l'interprétation de l'instabilité de Z-string App. C.2.1.

3.2.3 Condensation de bosons chargés W

Ambjorn et Olesen [83, 101, 96, 85], ont relevé un fait intéressant. Si le champ magnétique est suffisamment intense le vide de la théorie électrofaible est *instable* [102]. De plus en considérant le fait que le boson W acquiert sa masse par un mécanisme de brisure de symétrie il est possible d'établir une borne supérieure à cette instabilité. La condition

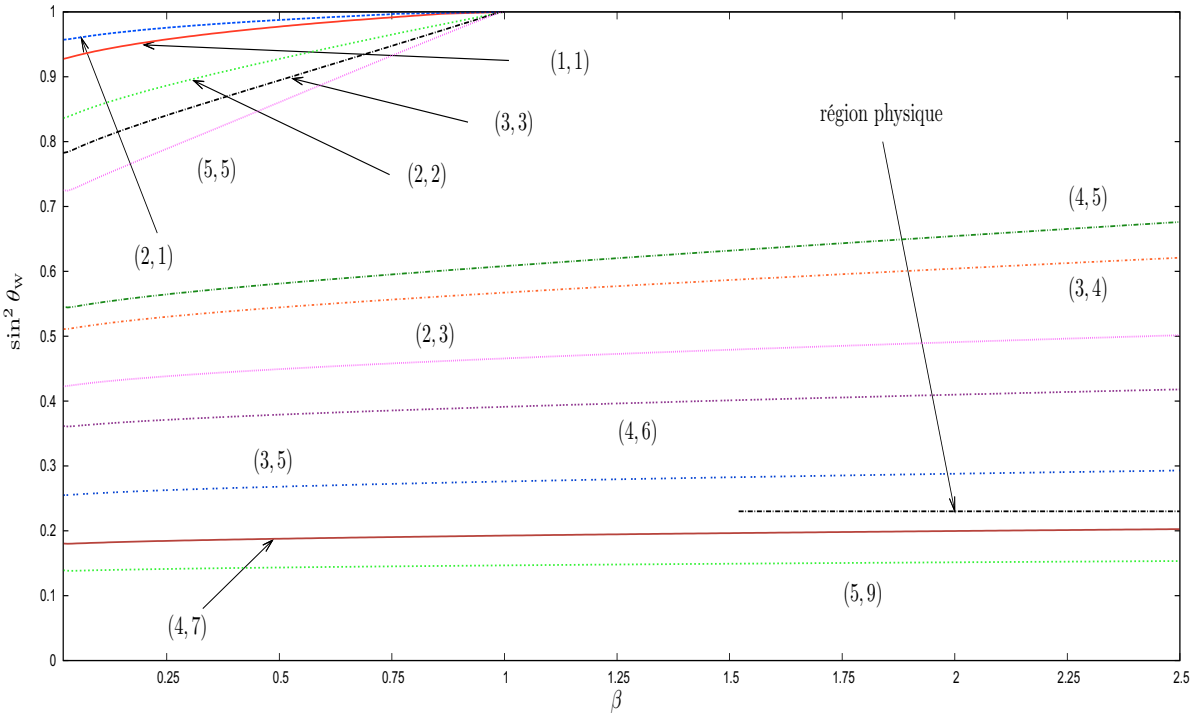


FIG. 3.6: Courbes chirales pour différentes excitations de la solution Z-string, en fonction des valeurs différentes des paramètres de la théorie.

d'instabilité du vide intervient lorsque

$$m_{\rm W}^2 < \mathbf{e}F_{12} < m_{\rm H}^2\,, \tag{3.36}$$

où F_{12} est la densité de champ magnétique dans le plan. L'instabilité de se manifeste par la condensation de bosons chargé W. Pour remplir de telles conditions, il faut alors des champs magnétiques qui soient suffisamment intense. Un candidat idéal pour générer de forts champs magnétiques sont les vortex supraconducteurs de Witten. À une certaine distance du coeur, champ magnétique de Biot et Savart créé par un vortex supraconducteur satisfait l'inégalité (3.36). Si le champ magnétique est trop intense, la symétrie électrofaible est restaurée et il ne se passe pas grand chose. L'analyse linéaire de stabilité autour d'un vortex de Witten servant de source de champ magnétique [103] montre qu'il se forme un condensat électrofaible sur une coque cylindrique autour du vortex lorsque le champ magnétique satisfait (3.36). On dit alors que le vortex supraconducteur est 'habillé' d'un condensat W [104, 105].

Dans ce qui suivra, on présentera un phénomène similaire sauf que le champ magnétique n'est pas engendré par des vortex de Witten issus de théories grandes unifiées. Le phénomène qui sera présenté est d'origine purement électrofaible.

Chapitre 4

Construction des vortex supraconducteurs électrofaibles

« *For every complex problem, there is a solution that is simple neat and wrong* »
H.L. MENCKEN

Nous avons brièvement revu les propriétés des solutions de type vortex déjà connues dans le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam. En particulier, nous avons pu montrer que les solutions correspondant au plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$, sont instables pour les valeurs expérimentales des paramètres de la théorie. Nous allons présenter à présent la construction des nouvelles solutions *supraconductrices*, qui généralisent les solutions ANO plongées. Cette généralisation se fait dans la direction de l'instabilité principale. C'est d'ailleurs exactement cette procédure qui est utilisée pour construire les vortex supraconducteurs dans le modèle de Witten (Sec. 2.2). On verra ainsi que les solutions supraconductrices qui généralisent les solutions sans courant permettent de reproduire tous les résultats précédemment connus au sujet des vortex électrofaibles. On verra en particulier qu'elles réalisent le scénario d'Ambjorn et Olesen évoqué précédemment.

Dans ce chapitre, la réduction à un problème à symétrie axiale sera d'abord présentée, suivie d'une discussion des propriétés physiques et des conditions aux limites nécessaires à la construction numérique. On verra ensuite comment ces solutions reproduisent les résultats antérieurement connus. Les propriétés physiques des nouvelles solutions seront discutées au chapitre suivant.

4.1 Réduction de symétrie

Les vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen sont des solutions statiques à symétrie cylindrique des équations des champs. C'est-à-dire qu'elles sont symétriques sous les rotations autour de l'axe du vortex et invariantes pour les translations selon cet axe. Nous présentons ici la construction de solutions stationnaires des équations (3.17) décrivant un vortex orienté selon l'axe x^3. Les coordonnées d'espace-temps se séparent naturellement en deux

groupes différents : $x^\alpha = (x^0, x^3)$ décrivant la *feuille d'univers* du vortex et $x^k = (x^1, x^2)$ qui couvrent le plan orthogonal. Les configurations désirées doivent être stationnaires et invariantes sous les rotations autour de x^3. De telles configurations sont ainsi invariantes sous les isométries générées par les 3 vecteurs de Killing

$$K_{(0)} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,, \qquad K_{(3)} = \frac{\partial}{\partial x^3}\,, \qquad K_{(\varphi)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{4.1}$$

où φ est l'angle azimutal des coordonnées polaires utilisées pour paramétrer le plan (x^1, x^2) : $x^1 + ix^2 = \rho \mathrm{e}^{i\varphi}$. Étant donné que ces trois vecteurs commutent entre eux et que toutes les symétries de la théorie sont jaugées, il existe une jauge où aucun des champs ne dépend des variables x^0 , φ et x^3 [106]. Il est ainsi possible d'écrire les champs ne dépendant que de la coordonnée radiale ρ. Ainsi les champs $\mathcal{W}$ et Φ contiennent 20 amplitudes réelles dépendantes de ρ[1] devant respecter l'invariance de jauge (3.16) où ϑ^0 et ϑ^a sont à présent des fonctions radiales. Les degrés de liberté supplémentaires associés à l'invariance de jauge sont fixés en imposant la jauge radiale $\mathcal{W}_\rho = 0$, réduisant ainsi le nombre de fonctions indépendantes à 16. Il s'avère qu'il est ensuite possible de tronquer la moitié d'entre elles [93]. Introduisons les (co)vecteurs orthonormaux afin de paramétrer la *feuille d'univers*

$$\Sigma_\alpha = (\sinh b, 0, 0, \cosh b)\,, \qquad \tilde{\Sigma}_\alpha = (\cosh b, 0, 0, \sinh b)\,, \qquad \sigma_\alpha = \sigma \Sigma_\alpha\,, \tag{4.2}$$

où b est un paramètre de boost, et σ le paramètre de *twist* (comme dans le cas du modèle de Witten). Les vecteurs Σ_α et $\tilde{\Sigma}_\alpha$ sont des vecteurs orthonormaux d'après les relations $\Sigma_\alpha \Sigma^\alpha = -1$, $\tilde{\Sigma}_\alpha \tilde{\Sigma}^\alpha = 1$ et $\Sigma_\alpha \tilde{\Sigma}^\alpha = 0$. L'inspection des équations des champs permet de montrer qu'il est possible d'imposer que la projection des champs de jauge sur $\tilde{\Sigma}_\alpha$ soit nulle, tout comme les composantes imaginaires des champs, sans perte de généralité [93]. Ainsi il est imposé *a priori* que

$$\tilde{\Sigma}_\alpha \mathcal{W}^\alpha = 0\,, \qquad W_\mu^2 = 0 \qquad \Im(\Phi) = 0\,. \tag{4.3}$$

C'est ce choix qui permet de tronquer la moitié des amplitudes de l'ansatz. Les 8 amplitudes restantes paramétrisent les champs

$$\mathcal{W} = \left(u + u_1 \tau^1 + u_3 \tau^3\right) \sigma_\alpha \mathrm{d}x^\alpha - \left(v + v_1 \tau^1 + v_3 \tau^3\right) \mathrm{d}\varphi\,, \qquad \Phi^{-1} = (f_1, f_2) \tag{4.4}$$

où la dépendance radiale des 8 fonctions réelles u , u_1 , u_3 , v , v_1 , v_3 , f_1 et f_2 est implicitement entendue. Cette configuration des champs possède les propriétés suivantes

- **a.** elle est invariante sous l'action des isométries générées par les trois vecteurs de Killing (4.1).
- **b.** elle est invariante sous conjugaison complexe $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}$, $\Phi^* = \Phi$.
- **c.** elle préserve sa forme sous les boosts de Lorentz dans la direction x^3 , ce qui a pour seul effet de modifier la valeur du paramètre de boost b. La norme $\sigma^2 = -\sigma_0^2 + \sigma_3^2$ est un invariant de Lorentz. Ce qui permet de distinguer différentes classes de solutions : $\sigma^2 > 0$ magnétique (genre espace), $\sigma^2 < 0$ électrique (genre temps), $\sigma^2 = 0$ chirale (genre lumière) [107, 108].

[1] $4 \times 4 = 16$ pour les champs de jauge plus $2 \times 2 = 4$ pour le doublet scalaire complexe

d. elle préserve sa structure sous l'action des transformations de jauges (3.16) générées par $\mathrm{U} = \exp\{-i\Gamma T^2\}$ avec Γ un angle constant dont l'effet est de 'tourner' les amplitudes des champs

$$\begin{aligned} f_1 &\to f_1 \cos\frac{\Gamma}{2} - f_2 \sin\frac{\Gamma}{2}\,, & f_2 &\to f_2 \cos\frac{\Gamma}{2} + f_1 \sin\frac{\Gamma}{2}\,, \\ u_1 &\to u_1 \cos\Gamma + u_3 \sin\Gamma\,, & u_3 &\to u_3 \cos\Gamma - u_1 \sin\Gamma\,, \\ v_1 &\to v_1 \cos\Gamma + v_3 \sin\Gamma\,, & v_3 &\to v_3 \cos\Gamma - v_1 \sin\Gamma \end{aligned} \tag{4.5}$$

alors que u et v restent invariants. Cette symétrie résiduelle est fixée grâce aux conditions aux bords en imposant $v_1(0) = 0$.

e. elle est invariante si les amplitudes électriques u, u_1, u_3, sont multipliées par une constante, et que le *twist* σ est divisé par cette même constante. Cette liberté est fixée en normant la fonction u_3 à l'origine.

4.1.1 Équation des champs

En utilisant la paramétrisation des champs (4.4), les 20 équations d'Euler-Lagrange du modèle standard (3.17) se réduisent à un ensemble de 8 équations différentielles du second ordre, plus une contrainte du premier ordre. Deux équations décrivent les amplitudes du champ de jauge (abélien) d'hypercharge $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\left(\rho u'\right)' &= \frac{g'^2}{2}\left\{(u+u_3)\,f_1^2 + 2u_1 f_1 f_2 + (u-u_3)\,f_2^2\right\}\,, \\ \rho\left(\frac{v'}{\rho}\right)' &= \frac{g'^2}{2}\left\{(v+v_3)\,f_1^2 + 2v_1 f_1 f_2 + (v-v_3)\,f_2^2\right\}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

$' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}$ désigne la variation par rapport à la coordonnée radiale. Deux équations décrivent les amplitudes du champ scalaire de Higgs

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\left(\rho f_1'\right)' &= \left\{\frac{\sigma^2}{4}\left[(u+u_3)^2 + u_1^2\right] + \frac{1}{4\rho^2}\left[(v+v_3)^2 + v_1^2\right] + \frac{\beta}{4}\left(f_1^2 + f_2^2 - 1\right)\right\} f_1 \\ &\quad + \left(\frac{\sigma^2 u u_1}{2} + \frac{v v_1}{2\rho^2}\right) f_2\,, \\ \frac{1}{\rho}\left(\rho f_2'\right)' &= \left\{\frac{\sigma^2}{4}\left[(u-u_3)^2 + u_1^2\right] + \frac{1}{4\rho^2}\left[(v-v_3)^2 + v_1^2\right] + \frac{\beta}{4}\left(f_1^2 + f_2^2 - 1\right)\right\} f_2 \\ &\quad + \left(\frac{\sigma^2 u u_1}{2} + \frac{v v_1}{2\rho^2}\right) f_1\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il reste alors quatre équations qui décrivent la dynamique des amplitudes du champ de jauge (non-abélien) d'isospin $\mathrm{SU(2)_I}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\rho u_1'\right)' &= \frac{v_3u_1 - v_1u_3}{\rho^2}v_3 + \frac{g^2}{2}\left[u_1\left(f_1^2+f_2^2\right) + 2uf_1f_2\right] ,\\
\frac{1}{\rho}\left(\rho u_3'\right)' &= \frac{v_1u_3 - v_3u_1}{\rho^2}v_1 + \frac{g^2}{2}\left[\left(u+u_3\right)f_1^2 + \left(u_3-u\right)f_2^2\right] ,\\
\rho\left(\frac{v_1'}{\rho}\right)' &= \sigma^2\left(v_1u_3 - v_3u_1\right)u_3 + \frac{g^2}{2}\left[v_1\left(f_1^2+f_2^2\right) + 2vf_1f_2\right] ,\\
\rho\left(\frac{v_3'}{\rho}\right)' &= \sigma^2\left(v_3u_1 - v_1u_3\right)u_1 + \frac{g^2}{2}\left[\left(v+v_3\right)f_1^2 + \left(v_3-v\right)f_2^2\right] ,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

et finalement une contrainte du premier ordre

$$\Lambda \equiv \sigma^2\left(u_1u_3' - u_3u_1'\right) + \frac{v_1v_3' - v_3v_1'}{\rho^2} + g^2\left(f_1f_2' - f_2f_1'\right) , \tag{4.9}$$

qui vient du fait que bien que $W_\rho^2 = 0$, l'équation de Yang-Mills correspondante ne s'annule pas identiquement, et donne plutôt la condition $\Lambda = 0$. En différenciant cette relation (4.9) et en utilisant les équations (4.6), (4.7), (4.8), on trouve la relation

$$\Lambda' + \frac{\Lambda}{\rho} = 0 \quad \text{dont la solution générale est} \quad \Lambda = \frac{C}{\rho} \tag{4.10}$$

avec C une constante d'intégration. Bien que la constante d'intégration C doive être nulle, elle joue un rôle subtil au niveau des conditions asymptotiques. Elle permet en effet d'avoir suffisamment de paramètres pour intégrer numériquement les équations du mouvement [93]. Soulignons le fait que les équations du mouvement sont complètement *indépendantes* du paramètre de boost b. Ainsi, la réduction des champs (4.4) permet une grande simplification des équations du mouvement d'Euler-Lagrange. Afin de résoudre ces équations, il faut déterminer le comportement local adéquat au voisinage des points singuliers $\rho = 0$ et $\rho = \infty$. Pour cela, il faut considérer la fonctionnelle d'énergie. En effet, comme nous l'avons vu plus tôt elle permet de déterminer les conditions aux bords (voir les sections Sec. 2.1, Sec. 2.2 par exemple).

4.1.2 Énergie

La réduction des champs (4.4) permet de simplifier l'expression du tenseur énergie impulsion (3.18). Il est en particulier possible de considérer la densité radiale d'énergie qui s'écrit comme la somme d'un terme *électrique*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 = \frac{\sigma^2(1+2\sinh^2 b)}{2}\Bigg\{&\frac{1}{g'^2}u'^2 + \frac{1}{g^2}(u_1'^2 + u_3'^2) + \frac{1}{g^2\rho^2}(v_1u_3 - v_3u_1)^2\\
&+ \frac{1}{2}\left[\left((u+u_3)f_1 + u_1f_2\right)^2 + \left((u-u_3)f_2 + u_1f_1\right)^2\right]\Bigg\} ,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

et d'un terme *magnétique*

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{1}{g'^2}v'^2 + \frac{1}{g^2}(v_1'^2 + v_3'^2)\right) + f_1'^2 + f_2'^2 \\ + \frac{1}{4\rho^2}\left[((v+v_3)f_1 + v_1 f_2)^2 + ((v-v_3)f_2 + v_1 f_1)^2\right] + \frac{\beta}{8}\left(f_1^2 + f_2^2 - 1\right)^2 . \qquad (4.12)$$

En utilisant les équations du mouvement (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9), on voit que $\rho\mathcal{E}_1$ peut s'écrire sous la forme d'une dérivée totale

$$\rho\mathcal{E}_1 = \frac{\sigma^2(1+2\sinh^2 b)}{2}\left(\frac{\rho}{g'^2}\,uu' + \frac{\rho}{g^2}\,(u_1u_1' + u_3u_3')\right)' . \qquad (4.13)$$

Il est intéressant de noter que seule la partie électrique de l'énergie (4.11) est affectée par les boosts de Lorentz. Les équations du mouvement quant à elles ne dépendent pas du tout du paramètre de boost. Par contre elles dépendent explicitement des constantes de couplage β et g. Il est possible de construire des solutions pour toutes les valeurs de ces dernières. Nous accorderons cependant une attention particulière aux valeurs physiques (expérimentales) de ces paramètres.

4.2 Conditions aux bords et quantités conservées

Afin de construire des solutions globales des équations (4.6)–(4.9), qui soient régulières sur tout la demi droite infinie $\rho \in [0, \infty)$, il faut apporter une attention toute particulière aux points réguliers singuliers de cet intervalle ($\rho = 0$ et $\rho = \infty$). En effet, comme on pourra le voir dans l'appendice App. A, c'est précisément la connaissance du comportement aux points singuliers qui permet l'intégration numérique des équations. Nous considérons dans un premier temps le comportement au voisinage de l'axe de symétrie lorsque ρ est petit.

4.2.1 Conditions sur l'axe de symétrie

A l'aide des expressions (4.11) et (4.12) de l'énergie, il est possible d'imposer les conditions de régularité garantissant le caractère fini de la densité radiale d'énergie sur l'axe. Pour trouver les configurations régulières sur l'axe de symétrie du système, l'inspection de la fonctionnelle d'énergie donne les conditions lorsque $\rho = 0$

$$\begin{aligned} &v' = v_1' = v_3' = 0\,, && v_1u_3 - v_3u_1 = 0\,, \\ &(v+v_3)f_1 + v_1f_2 = 0\,, && (v-v_3)f_2 + v_1f_1 = 0\,, \end{aligned} \qquad (4.14)$$

or d'après le choix de jauge qui fixe la symétrie résiduelle (4.5), $v_1(0) = 0$. Ainsi, les conditions énergétiques sur l'axe se résument à

$$\begin{aligned} &v' = v_1' = v_3' = 0\,, && v_3u_1 = 0\,, \\ &(v+v_3)f_1 = 0\,, && (v-v_3)f_2 = 0\,. \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Après avoir exposé les conditions énergétiques nécessaires sur l'axe, il faut tenir compte des conditions de régularité sur les champs. En effet, pour une configuration régulière, les composantes azimutales des champs de jauge doivent identiquement disparaître sur l'axe de symétrie. Dans la jauge (4.4) utilisée jusqu'à présent, cela signifie qu'il faudrait $v(0) = v_1(0) = v_3(0) = 0$. Une telle condition est en réalité beaucoup trop restrictive, puisqu'ainsi la possibilité d'obtenir des solutions triviales est trop grande. Cependant, il faut garder à l'esprit que cette jauge (où tous les champs sont réels) n'est pas celle communément utilisées pour traiter de vortex. En effet, habituellement le champ scalaire possède une phase dépendante de l'angle azimutal φ. Il est toujours possible d'effectuer des transformations de jauges pour donner des phases aux champs scalaires. C'est en fait dans une telle jauge qu'apparaissent les conditions adéquates pour traiter de la régularité des champs. En appliquant à l'ansatz (4.4) les transformations de jauge générées par

$$\mathrm{U} = \exp\left\{\frac{i}{2}\left[[(2n-\nu)\varphi + \sigma_\alpha x^\alpha] + [\nu\varphi - \sigma_\alpha x^\alpha]\,\tau^3\right)\right\}, \tag{4.16}$$

l'expression des champs devient

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \left(u + 1 + \tau^+ u_1 + \tau^3[u_3 - 1]\right)\sigma_\alpha \mathrm{d}x^\alpha + \left(2n - \nu - v - \tau^+ v_1 + \tau^3[\nu - v_3]\right)\mathrm{d}\varphi\,,\\ \Phi^{-1} &= (f_1 \mathrm{e}^{in\varphi}, f_2 \mathrm{e}^{i(n-\nu)\varphi + i\sigma_\alpha x^\alpha})\,,\end{aligned} \tag{4.17}$$

avec $\tau^+ = \mathrm{U}^{-1}\tau^1\mathrm{U} = \tau^1\cos(\nu\varphi - \sigma_\alpha x^\alpha) - \tau^2\sin(\nu\varphi - \sigma_\alpha x^\alpha)$. Il faut remarquer que cette transformation de jauge permet de se placer dans la jauge utilisée pour l'étude de la stabilité des Z-strings (Sec. 3.2.2) et fait apparaître les deux entiers n et ν. Étant donné que dans la jauge (4.4), les composantes azimutales des champs ne disparaissent pas, nous l'appellerons *jauge singulière*, en opposition à la *jauge régulière* (4.17) dans laquelle toutes les amplitudes azimutales disparaissent. Sans perte de généralité il est possible de montrer que $n \geq 1$ et $1 \leq \nu \leq 2n$. Pour que les champs soient réguliers sur l'axe dans cette jauge, il faut imposer la condition

$$v(0) = 2n - \nu\,, \qquad\qquad v_3(0) = \nu\,. \tag{4.18}$$

Ainsi, le passage à la jauge régulière introduit plus de paramètres que la jauge singulière. Les conditions sur l'énergie (4.15) combinées aux conditions régularité dans la jauge (4.17) se réduisent à

$$\nu u_1(0) = 0\,, \qquad\qquad n f_1(0) = 0\,, \qquad\qquad (n-\nu) f_2(0) = 0\,. \tag{4.19}$$

En résumé, les conditions de régularité sur l'axe donnent

$$u_1(0) = 0\,, \quad u_3(0) = 1\,, \quad v_1(0) = 0\,, \quad v_3(0) = \nu\,, \quad v(0) = 2n - \nu\,, \quad f_1(0) = 0 \tag{4.20}$$

et $u(0)$ et $f_2(0)$ prennent des valeurs arbitraires si $n = \nu$ tandis que $f_2(0) = 0$ si $\nu \neq n$. L'analyse menée jusqu'à présent donne le comportement dominant des amplitudes sur l'axe de symétrie. Pour mener à bien l'analyse numérique, il faut également connaître les comportements sous-dominants. Pour cela, nous appliquons la méthode de Frobenius [109, 110, 111]. Le principe est de développer les amplitudes en séries de Taylor lorsque $\rho \to 0$, dont les termes dominants sont donnés par (4.20). Ensuite les équations sont

résolues ordre par ordre. L'analyse au voisinage du point singulier $\rho = 0$ donne alors le comportement local

$$\begin{aligned} u &= a_1 + \dots , \\ u_1 &= a_2\rho^{\nu} + \dots , \\ u_3 &= 1 + \dots , \\ v &= 2n - \nu + a_3\rho^2 + \dots , \\ v_1 &= \mathrm{o}(\rho^{\nu+2}) + \dots , \\ v_3 &= \nu + a_4\rho^2 + \dots , \\ f_1 &= a_5\rho^n + \dots , \\ f_2 &= q\rho^{|n-\nu|} + \dots \end{aligned} \tag{4.21}$$

où les points de suspensions désignent les termes sous-dominants. Les paramètres $a_1, \dots, a_5$ et q sont des constantes d'intégrations obtenues d'après la méthode de Frobenius. Le paramètre q est appelé paramètre du condensat scalaire. Il joue, comme dans le modèle de Witten, un rôle important pour la construction et la caractérisation des solutions. Afin de construire numériquement les solutions du problème (4.6)–(4.8), il faut également étudier le comportement local des amplitudes (4.4) dans la région asymptotique.

4.2.2 Conditions asymptotiques

Afin que la symétrie soit brisée, les champs convergent asymptotiquement vers le vide. Il est important de souligner que la densité radiale d'énergie est nulle asymptotiquement. Les densités radiales d'énergie (4.11), (4.12) sont séparées en partie cinétique et potentielle. La partie potentielle est une somme de carrés parfaits, qui s'annule si et seulement si chacun des termes s'annule séparément. Ainsi la condition de finitude des densités radiales d'énergie est

$$\begin{aligned} &u' = u_1' = u_3' = v' = v_1' = v_3' = f_1' = f_2' = 0\,, \\ &(u+u_3)f_1 + u_1 f_2 = 0\,, \quad (u-u_3)f_2 + u_1 f_1 = 0\,, \\ &(v+v_3)f_1 + v_1 f_2 = 0\,, \quad (v-v_3)f_2 + v_1 f_1 = 0\,, \\ &f_1^2 + f_2^2 - 1 = 0\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

La dernière de ces conditions, particulièrement intéressante permet de contraindre

$$f_1(\infty) = \cos\frac{\gamma}{2}\,, \qquad\qquad f_2(\infty) = \sin\frac{\gamma}{2}\,. \tag{4.23}$$

Le paramètre γ, appelé *angle du vide*, est essentiel pour caractériser différentes solutions. L'invariance sous les rotations globales (4.5) qui transforment $\gamma \to \gamma + \Gamma$ ne peut permettre de modifier la valeur de γ , puisque cette symétrie est fixée à l'origine en imposant $v_1(0) = 0$. Néanmoins, elle peut permettre de restaurer des valeurs génériques de γ après une analyse simplifiée pour le cas particulier $\gamma = 0$. Ainsi considérons le cas où les amplitudes scalaires ont le comportement asymptotique

$$f_1(\infty) = 1\,, \qquad\qquad f_2(\infty) = 0 \tag{4.24}$$

ce qui d'après (4.22) donne

$$u' = u'_1 = u'_3 = v' = v'_1 = v'_3 = f'_1 = f'_2 = u_1 = v_1 = 0\,, \quad u = -u_3\,, \quad v = -v_3\,. \tag{4.25}$$

D'après ces conditions, les équations du mouvement sont asymptotiquement

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho u'\right)' = 0\,, \qquad\qquad \rho\left(\frac{v'}{\rho}\right)' = 0\,, \tag{4.26}$$

dont les solutions générales sont

$$u \equiv u_\infty = c_1 + Q\ln\rho\,, \qquad\qquad v = c_2 + A\rho^2\,, \tag{4.27}$$

avec c_1 , c_2 , A , Q , des constantes d'intégration. Afin que la densité radiale d'énergie soit bornée, il faut imposer $A = 0$. Bien que divergent asymptotiquement, le terme logarithmique laisse la densité radiale d'énergie bornée. Il doit par conséquent être conservé pour l'expression asymptotique des champs. Ainsi, la configuration vide est définie comme

$$\mathcal{W}^\infty = \left(\mathbb{1} + \tau^3\right)\left((c_1 + Q\ln\rho)\sigma_\alpha \mathrm{d}x^\alpha - c_2\mathrm{d}\varphi\right)\,, \qquad\qquad \Phi_\infty^{-1} = (1,0)\,. \tag{4.28}$$

En utilisant la définition des potentiels électromagnétique A et Z dans le vide unitaire (3.21), l'expression asymptotique des champs de jauge est alors

$$A^\infty_\mu \mathrm{d}x^\mu = \frac{1}{gg'}\left((c_1 + Q\ln\rho)\sigma_\alpha \mathrm{d}x^\alpha - c_2\mathrm{d}\varphi\right)\,, \qquad\qquad Z^\infty_\mu = 0\,. \tag{4.29}$$

Comme on s'y attend dans le vide, tous les champs massifs sont confinés à l'intérieur du vortex et seul survit le champ électromagnétique à masse nulle. Le potentiel électromagnétique A^∞_μ est e potentiel de Biot et Savart décrivant une distribution uniforme de courant (un fil électrique) [64], comme c'est d'ailleurs le cas dans le modèle de Witten (Sec. 2.2). La charge et le courant électriques seront définis plus tard, d'après la définition de Nambu (3.24) des champs invariants de jauge. Avant cela, il faut remarquer que la densité radiale d'énergie électrique (4.11) est asymptotiquement proportionnelle à Q^2/ρ^2. La densité linéique d'énergie diverge onc logarithmiquement dans la région asymptotique. Cette divergence logarithmique n'est pas pathologique. Tout comme le cas d'une distribution linéique de courant, elle découle du fait que la configuration est infinie dans la direction x^3 . C'est la particularité du potentiel Coulombien en deux dimensions d'espace, qui est responsable de cette divergence. Cependant, tant qu'on considère des portions finies de vortex, l'énergie totale du système est finie.

Ayant défini le vide dans la région asymptotique, il faut dorénavant déterminer la façon dont les champs convergent vers la configuration purement électromagnétique (4.28). La procédure est différente de la méthode de Frobenius utilisée pour le comportement local sur l'axe. Il faut ici étudier les équations du mouvement (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) pour les petites déviations autour de la configuration de Biot et Savart (4.28). Les équations du mouvement sont linéarisées par rapport aux déviations. La plupart du temps les solutions de telles équations sont une combinaison linéaire de fonctions croissante et décroissante. Afin de converger vers le vide, il faut imposer que les déviations s'annulent asymptotiquement, ce qui permet de réduire le nombre de constantes d'intégrations.

Il y a certaines subtilités pour déterminer les conditions à l'infini. En particulier, la contrainte (4.9) joue un rôle crucial. Une analyse détaillée des conditions asymptotiques montre que la contrainte est automatiquement satisfaite pourvu que les conditions aux bords soient appropriées [93]. Une fois les solutions locales connues pour le cas spécial $\gamma = 0$, il faut restaurer la dépendance dans l'*angle du vide* en utilisant les rotations globales (4.5). Au final, le comportement asymptotique est donné par

$$\begin{aligned}
u &= c_1 + Q\ln\rho + \frac{c_3 g'^2}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{Z}}\rho} + \dots\,, \\
v &= c_2 + c_4 g'^2\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{Z}}\rho} + \dots\,, \\
u_1 + iu_3 &= \mathrm{e}^{-i\gamma}\left\{\frac{c_7}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\int m_\sigma \mathrm{d}\rho} - i[c_1 + Q\ln\rho - \frac{c_3 g^2}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{Z}}\rho}]\right\} + \dots\,, \\
v_1 + iv_3 &= \mathrm{e}^{-i\gamma}\left\{c_8\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{-\int m_\sigma \mathrm{d}\rho} - i[c_2 - c_4 g^2\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{Z}}\rho}]\right\} + \dots\,, \\
f_1 + if_2 &= \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\gamma}\left\{1 + \frac{c_5}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{H}}\rho} + i\frac{c_6}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\int m_\sigma \mathrm{d}\rho}\right\} + \dots\,,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

où les $c_1, \dots, c_8$ sont des constantes d'intégrations apparaissant dans la résolution des équations linéarisées. $m_{\mathrm{H}}, m_{\mathrm{Z}}$ sont respectivement les masses des bosons de Higgs et Z définis (3.20). Il est important de noter que la masse du boson W n'apparaît pas seule, mais au travers de l'expression

$$m_\sigma = \sqrt{m_{\mathrm{W}}^2 + \sigma^2(c_1 + Q\ln\rho)^2}\,. \tag{4.31}$$

Lorsque le terme $\sigma^2(c_1 + Q\ln\rho)^2$ s'annule, c'est-à-dire pour une solution chirale, cette 'masse' se réduit à celle du boson W. Dès que $\sigma^2 \neq 0$, il est possible d'interpréter m_σ comme la masse du boson W qui est soit *écrantée* ($\sigma^2 < 0$) soit *habillée* ($\sigma^2 > 0$) par l'interaction des bosons chargés W avec le champ électromagnétique. La nature de σ^2, déjà discutée lors de l'analyse perturbative de Z-string (Sec. 3.2.2) prend ici un tournant tout à fait différent. En effet au niveau non-linéaire considéré ici, la situation *écrantée* où $\sigma^2 < 0$ semble peu probable, puisque m_σ serait imaginaire pure. Par conséquent, ormis u et v, toutes les amplitudes oscilleraient asymptotiquement avec une pulsation divergente. Bien qu'il soit possible d'envisager de tels comportements, ils sont complètement hors de propos pour l'analyse qui nous concerne ici puisqu'on cherche à construire des solutions décrivant des états liés.

Ayant présenté les équations du mouvement et leurs solutions locales au voisinage des points singuliers $\rho = 0$ et $\rho = \infty$, tous les ingrédients nécessaires à la construction numérique sont présents. Avant cela, nous allons considérer les quantités conservées associées à ces nouvelles solutions.

4.2.3 Calcul des quantités conservées

Ayant jusqu'ici réduit le nombre d'amplitudes significatives pour notre problème, puis construit les équations du mouvement et les conditions aux bords, nous allons à présent

considérer les quantités qui présentent un intérêt physique. Avant tout, il faut retenir le comportement dominant des amplitudes sur l'axe et à l'infini lorsque $0 \leftarrow \rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
a_1 \leftarrow u &\rightarrow c_1 + Q\ln\rho\,,\\
2n-\nu \leftarrow v &\rightarrow c_2\,,\\
0 \leftarrow u_1 &\rightarrow -(c_1+Q\ln\rho)\sin\gamma\,,\\
0 \leftarrow v_1 &\rightarrow -c_2\sin\gamma\,,\\
1 \leftarrow u_3 &\rightarrow -(c_1+Q\ln\rho)\cos\gamma\,,\\
\nu \leftarrow v_3 &\rightarrow -c_2\cos\gamma\,,\\
a_5\rho^n \leftarrow f_1 &\rightarrow \cos\frac{\gamma}{2}\,,\\
q\rho^{|n-\nu|} \leftarrow f_2 &\rightarrow \sin\frac{\gamma}{2}\,,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

afin de calculer la plupart des quantités physiques intéressantes.

4.2.3.1 Flux et courant

Les définitions des tenseurs électromagnétique et Z (3.24), (3.26) étant invariantes de jauge, il est possible d'utiliser la séparation de variables dans la jauge singulière (4.4) où l'expression des champs est la plus simple. Ainsi les composantes non nulles des tenseurs F et Z sont d'après la définition de Nambu (3.24)

$$\begin{aligned}
F^{\rm N}_{\rho\alpha} &= \sigma_\alpha\left(\frac{g}{g'}u' + \frac{g'}{g}u'_a n^a\right)\,, & Z^{\rm N}_{\rho\alpha} &= \sigma_\alpha\left(u' + u'_a n^a\right)\,,\\
F^{\rm N}_{\rho\varphi} &= -\frac{g}{g'}v' + \frac{g'}{g}v'_a n^a\,, & Z^{\rm N}_{\rho\varphi} &= -\left(v' + v'_a n^a\right)\,.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

La définition de 't Hooft (3.26) permet quant à elle de connaître explicitement les quantités physiques grâce à la structure de dérivée totale

$$\begin{aligned}
F^{\rm H}_{\rho\alpha} &= \sigma_\alpha\left(\frac{g}{g'}u + \frac{g'}{g}u_a n^a\right)'\,, & Z^{\rm H}_{\rho\alpha} &= \sigma_\alpha\left(u + u_a n^a\right)'\,,\\
F^{\rm H}_{\rho\varphi} &= \left(-\frac{g}{g'}v + \frac{g'}{g}v_a n^a\right)'\,, & Z^{\rm H}_{\rho\varphi} &= -\left(v + v_a n^a\right)'\,.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Les (iso)vecteurs unitaires n^a définis auparavant (3.25) forment une base orthonormée avec les (iso)vecteurs k^a et l^a tels que

$$n^a = \left(\frac{2f_1f_2}{f_1^2+f_2^2}, 0, \frac{f_1^2-f_2^2}{f_1^2+f_2^2}\right)\,,\quad k^a = \left(\frac{f_1^2-f_2^2}{f_1^2+f_2^2}, 0, \frac{-2f_1f_2}{f_1^2+f_2^2}\right)\,,\quad l^a = (0,1,0)\,. \tag{4.35}$$

La densité radiale de courant électromagnétique définie d'après la loi de Coulomb est $J^\alpha = \partial_\mu F^{\mu\alpha} = \frac{1}{\rho}\left(F^{\rho\alpha}\right)'$. En l'intégrant dans le plan (ρ,φ) orthogonal à l'axe z du vortex, on trouve les densités linéiques de charge et de courant

$$\mathcal{I}_\alpha = -2\pi\int(\rho F_{\rho\alpha})'{\rm d}\rho = -\frac{2\pi\sigma_\alpha Q}{gg'} \equiv \mathcal{I}\Sigma_\alpha\,. \tag{4.36}$$

Rappelons que σ_α dépend implicitement du paramètre de boost b. On appelle alors $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\sinh b$ la charge électrique et $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}\cosh b$ le courant électrique. Toutes les quantités présentées sont exprimées selon les grandeurs sans dimensions. Pour exprimer le courant $\mathcal{I}_3$ dans le système dimensionné, il faut le multiplier par $\mathbf{c}\mathbf{\Phi}_0$. On trouve alors que l'échelle naturelle des courants est

$$\mathbf{c}\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{c} \times 54.26^9 \text{ V} = 1.8 \times 10^9 \text{A}\,, \tag{4.37}$$

c'est à dire le *milliard* d'Ampères. Cette valeur est grande, mais nettement plus faible que le courant des vortex de Witten des théories grandes unifiées ($\sim 10^{20}$ A).

Il est également possible de calculer les composantes des champs magnétique et Z, dans le référentiel au repos

$$B_{\hat{z}} = \frac{1}{\rho}F_{\rho\varphi}\,, \qquad B_{\hat{\varphi}} = -F_{\rho z}\,, \qquad H_{\hat{z}} = \frac{1}{\rho}Z_{\rho\varphi}\,, \qquad H_{\hat{\varphi}} = -Z_{\rho z}\,, \tag{4.38}$$

ainsi que les composantes du condensat de bosons chargés W

$$w_{\hat{z}} = \frac{1}{\rho}k^a W^a_{\rho\varphi}\,, \qquad w_{\hat{\varphi}} = -k^a W^a_{\rho z}\,, \qquad w_{\hat{\rho}} = -\frac{1}{\rho}l^a W^a_{z\varphi}\,, \tag{4.39}$$

obtenus en projetant les composantes du tenseur de champ $W^a_{\mu\nu}$ sur les (iso)vecteurs k^a et l^a (4.35).

4.2.3.2 Charges de Noether – Énergie et impulsion

D'après les symétries imposées par construction (4.1), il est possible de définir les charges conservées de Noether en contractant ces vecteurs avec le tenseur énergie-impulsion (3.18). Ainsi les courants de Noether sont

$$j^\mu_{(K)} = T^\mu{}_\nu K^\nu \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu j^\mu_{(K)} = 0\,. \tag{4.40}$$

En intégrant sur le plan (x^1, x^2) on trouve les charges conservées associées qui sont respectivement les densités linéiques d'énergie, d'impulsion et de moment angulaire

$$\begin{aligned} E &= \int T^0{}_\nu K^\nu_{(0)} \mathrm{d}^2x = \int T^0{}_0 \mathrm{d}^2x\,, \\ P &= \int T^0{}_\nu K^\nu_{(3)} \mathrm{d}^2x = \int T^0{}_3 \mathrm{d}^2x\,, \\ M &= \int T^0{}_\nu K^\nu_{(\varphi)} \mathrm{d}^2x = \int T^0{}_\varphi \mathrm{d}^2x\,. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Les valeurs dimensionnées sont récupérées d'après les relations $\mathbf{E} = \mathbf{\Phi}_0^2 E$, $\mathbf{P} = \mathbf{\Phi}_0^2 P/\mathbf{c}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}_0^2 M/\mathbf{c}$. Il a déjà été question des densités radiales l'énergie (4.11), (4.12) puisqu'elles étaient nécessaires pour définir les conditions aux bords. La densité linéique d'énergie est donnée par la somme des parties électrique et magnétique

$$\begin{aligned} E &= \int T^0{}_0 \mathrm{d}^2x = \int (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)\mathrm{d}^2x \equiv E_1 + E_2\,, \\ &= \frac{\pi\sigma^2(1+2\sinh^2 b)}{gg'} Qu(\infty) + 2\pi\int_0^\infty \rho\mathcal{E}_2 \mathrm{d}\rho\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

À cause de la divergence logarithmique du potentiel Coulombien, la densité linéique d'énergie est infinie.

4.3 Rappel des solutions déjà connues

Au cours du chapitre précédent, les solutions correspondant au plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen ainsi que leur stabilité ont été étudiées. Nous avons par ailleurs annoncé que les nouvelles solutions (4.4) généralisent tous les résultats sur les vortex déjà connus dans le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam (3.13). Nous allons donc présenter ici, comment il est possible de montrer que les solutions Z-strings et W-strings (Sec. 3.2.1) ainsi que les états liés déterminant leur stabilité (Sec. 3.2.2) comme des cas particuliers des solutions supraconductrices (4.4),(4.17).

4.3.1 Z-strings

Les solutions Z-strings définies d'après (3.30a) sont retrouvées en considérant le cas particulier où les amplitudes électriques et les champs non-abéliens découplent

$$\begin{aligned} &u = -1\,, \qquad v = 2g'^{\,2}(v_{\rm ANO} - n) + 2n - \nu\,, \qquad u_1 = 0 \qquad v_1 = 0\,, \\ &u_3 = 1\,, \qquad v_3 = 2g^2(v_{\rm ANO} - n) + \nu\,, \qquad f_1 = f_{\rm ANO} \qquad f_2 = 0\,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Afin que cette définition corresponde exactement à (3.30a), il faut imposer

$$a_1 = c_1 = -1\,, \qquad Q = \gamma = 0\,, \qquad c_2 = 2ng^2 - \nu\,. \tag{4.44}$$

Cette paramétrisation donne exactement les équations d'ANO (2.11).

4.3.2 W-strings

Afin de retrouver le second plongement (3.30b) des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans la théorie électrofaible, il faut considérer

$$u = v = u_1 = u_3 = v_1 = 0\,, \qquad v_3 = 2v_{\rm ANO}\,, \qquad f_1 = -f_2 = \frac{f_{\rm ANO}}{\sqrt{2}}\,, \tag{4.45}$$

ainsi que les conditions de cohérence sur les paramètres

$$\nu = 2n\,, \qquad Q = c_1 = c_2 = 0\,, \qquad \gamma = -\frac{\pi}{4}\,, \tag{4.46}$$

A nouveau, on retrouve ici exactement les mêmes solutions que celles définies précédemment (3.30b).

4.3.3 Z-strings faiblement perturbées

L'instabilité principale des Z-strings s'interprète comme l'instabilité à la condensation de bosons W [104] au coeur du vortex. C'est-à-dire que les solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen plongées dans le modèle standard favorisent la création d'un condensat de particules chargées à l'intérieur du vortex. Au niveau linéaire, il n'est pas possible de définir le courant.

On voit qu'en réalité c'est la condensation de bosons W qui génère le courant électrique apparaissant au niveau non-linéaire. Ainsi, l'étude de la stabilité des Z-strings (Sec. 3.2.2) est l'étude des déformations de Z-strings par de *faibles courants*. Les champs (4.4) doivent donc décrire les résultats de stabilité dans une certaine limite. Le paramètre pertinent est q , le paramètre du condensat scalaire. Ainsi, les petites déviations autour de Z-string sont décrites par les amplitudes

$$\begin{aligned} u &= -1 + \delta u\,, & u_1 &= \delta u_1\,, & u_3 &= 1 + \delta u_3\,, & f_1 &= f_{\rm Z} + \delta f_1\,, \\ v &= v_{\rm Z} + \delta v\,, & v_1 &= \delta v_1\,, & v_3 &= v_{\rm Z3} + \delta v_3\,, & f_2 &= \delta f_2\,, \end{aligned} \tag{4.47}$$

où $v_{\rm Z} \equiv 2g'^2(v_{\rm ANO}-n)+2n-\nu$, $v_{\rm Z3} \equiv 2g^2(v_{\rm ANO}-n)+\nu$ et $f_{\rm Z} \equiv f_{\rm ANO}$. Chaque amplitude précédée du symbole δ correspond aux petites déformations. La séparation de variables (4.47) permet de linéariser les équations du mouvement (4.6)–(4.9). Une bonne partie des amplitudes (δu , δu_3 , δv , δv_3 , δf_1) découple et n'affecte pas la stabilité. Cependant, ces amplitudes sont utiles afin d'étudier la dynamique dans le régime des courants faibles. Pour le cas présent, il est suffisant de considérer que ces amplitudes soient nulles. Ainsi les perturbations (4.47) sont exactement équivalentes à (3.32) et les équations du mouvement sont exactement identiques.

Il faut remarquer qu'il y a une autre possibilité pour retrouver les résultats de la section Sec. 3.2.2. En effet, il suffit de considérer des valeurs petites de q (10^{-3} par exemple) pour accéder aux mêmes résultats. Ainsi la résolution du système non-linéaire dans cette limite reproduit exactement ces résultats. L'étude des solutions dans la limite de faible courant est revue plus en détails Sec. 5.2. L'interprétation des résultats est en partie revue App. C.2.1.

À présent, toutes les quantités nécessaires à la construction numérique des solutions sont connues. De plus, on sait calculer les grandeurs observables pertinentes. Il faut également souligner que l'analyse au niveau linéaire permet de savoir comment promouvoir certaines solutions au niveau non-linéaire.

Chapitre 5

Propriétés physiques des solutions

« N'est-il pas suffisant de contempler un jardin si magnifique sans avoir à croire en plus que des fées l'habitent ? »

Douglas Adams Le guide du routard galactique

Dans le chapitre précédent, tous les éléments nécessaires à la construction numérique des solutions supraconductrices ont été exposés. Les quantités physiques pertinentes y ont également été présentés. Nous allons à présent passer à la construction proprement dite des solutions. Après avoir exposé dans un premier temps les résultats relatifs aux solutions générales supraconductrices, nous étudierons plusieurs cas limites permettant de mieux comprendre les propriétés physiques des vortex supraconducteurs de la théorie de Weinberg-Salam. En particulier, les régimes de faibles et grands courants seront considérées en détails. D'autres limites de l'espace des paramètres de la théorie seront également étudiées. Finalement pour clore ce chapitre, on rappellera les propriétés physiques principales des vortex supraconducteurs avant d'en étudier la stabilité dans la troisième partie.

5.1 Solutions génériques supraconductrices

Le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam contient plusieurs paramètres physiques. Nous allons d'abord exposer les propriétés des solutions pour des valeurs génériques de ces derniers. L'étude générique des propriétés des vortex supraconducteurs de la théorie de Weinberg-Salam a été traitée dans notre second article [93].

5.1.1 Construction numérique des solutions

Il a été précédemment introduit le système des 8 équations du mouvement (4.6) – (4.9) ainsi que la contrainte de premier ordre. Il s'agit d'équations différentielles ordinaires non-linéaires du second ordre, satisfaisant les conditions locales aux points singuliers réguliers $\rho = 0$ (4.21) et $\rho = \infty$ (4.30). Ces conditions aux bords ont été introduites afin de garantir que la contrainte du premier ordre (4.9) soit systématiquement satisfaite. Les configurations

étudiées décrivent des solutions stationnaires, à symétrie axiale et régulières des équations des champs telles que la densité radiale d'énergie soit bornée partout.

Afin de résoudre un tel système, nous utilisons la méthode de *multishooting* [112] décrite en détail dans l'appendice App. A. La méthode a été implémentée en langage orienté objet C++. Le code qui se présente sous forme d'une classe abstraite est à présent inclus dans une librairie de calcul scientifique *O2scl* [113]. La méthode de *multishooting* repose sur le principe de *shooting* (méthode de tir) qui consiste à ajuster itérativement les paramètres d'un problème aux valeurs initiales, afin de résoudre le problème avec conditions aux bords. Le principe est celui du tir au canon. Pour atteindre une cible il faut déterminer la bonne force (ou le bon angle). Ainsi, si le boulet tombe avant (*resp.* après) la cible, il faut augmenter (*resp.* diminuer) la force du tir. La méthode de *shooting* est très puissante puisqu'elle permet de trouver les solutions d'un problème avec conditions aux bords avec une très bonne précision, tant que le choix initial est suffisamment bon. Tout l'inconvénient de la méthode réside dans cette phrase '*tant que le choix initial est suffisamment bon*'. En effet il n'est pas toujours évident d'avoir un bon choix de départ, et si celui-ci est trop mauvais, rien ne garantit la convergence vers une solution physiquement acceptable. La méthode de *shooting* est extrêmement sensible à ce choix initial. C'est ici qu'intervient le *multishooting* qui permet de s'affranchir en partie de la forte dépendance au choix initial en payant le prix d'une convergence plus lente. L'idée principale est de segmenter l'intervalle d'intégration en plusieurs sous-intervalles. Ceci augmente artificiellement la taille du système (c'est ce qui ralentit la convergence) et offre en contrepartie plus de paramètres ajustables, ce qui a pour effet de 'répartir' la sensibilité au choix initial. Même si la solution numérique est acceptable (faible erreur, bonne continuité, *etc*), elle ne constitue pas une preuve d'existence ni d'unicité au sens des mathématiques. Il est possible d'appliquer une batterie de tests reposant sur des observations empiriques, afin de contrôler la justesse du résultat, mais jamais ils ne constitueront une preuve au sens strict. Le lecteur intéressé par plus de détails techniques peut se référer à l'appendice App. A où la méthode est exposée de façon plus rigoureuse, les test y sont décrits et un exemple concret y est exposé. Dans ce qui suivra, il sera peu fait allusion à la construction numérique à proprement parler. Il sera surtout question des grandeurs physiques qui caractérisent les solutions et de leur implications sur la physique du système.

Dans le cas concret de notre problème, pour des valeurs fixées de n , ν , β , θ_{W} , et q , le système d'équations admet 5 paramètres libres à l'origine (4.21), 10 paramètres libres à l'infini (4.30), plus le paramètre de twist σ partout. Il y a donc en tout 16 paramètres libres qui doivent être ajustés de sorte que les 8 fonctions et leurs 8 dérivées soient continues sur toute la demi-droite infinie $\rho \in [0;\infty)$. Lorsque le programme converge, la solution numérique est trouvée avec un bonne précision. On peut estimer que la précision des résultats présentés dans ce qui suit varie entre 5 et 7 décimales.

5.1.2 Description des grandeurs physiques et numériques

Les solutions génériques du problème non-linéaire obtenues par résolution numérique, sont des généralisations des Z-strings [24, 25] et W-strings [26] connues depuis plus de 15 ans. En particulier il s'agit de généralisations dans la direction de leur instabilité principale,

à savoir la condensation de bosons W en leur coeur. L'étude au niveau linéaire, permet ainsi d'avoir des indications sur le comportement à attendre des nouvelles solutions. En particulier, la connaissance des courbes chirales (3.6) apporte des informations sur l'espace des solutions. Lorsque le paramètre du condensat scalaire q est petit, les solutions décrivent la stabilité linéaire des vortex sans courant (Sec. 4.3.3). Ces solutions peuvent également s'interpréter comme des 'bifurcations' entre les solutions sans courant et les vortex supraconducteurs. Lorsque q est itérativement augmenté, le système entre dans le régime non-linéaire et de nouvelles propriétés émergent.

Dans l'approximation linéaire, il a été vu que plusieurs types de solutions de nature différente peuvent exister. Elles peuvent être *magnétiques* ($\sigma^2 > 0$), *électriques* ($\sigma^2 < 0$) ou *chirales* ($\sigma^2 = 0$). Dans tous les cas, il s'agit d'états liés (les amplitudes n'oscillent pas asymptotiquement) dont les amplitudes convergent vers le vide exponentiellement vite, avec entre autres le taux de convergence

$$m_\sigma = \sqrt{m_{\rm W}^2 + \sigma^2}\,. \tag{5.1}$$

Ainsi, tant que $m_{\rm W}^2 + \sigma^2 > 0$ la solution liée existe. Il est donc possible d'avoir des configurations électriques ($\sigma^2 < 0$) dont les amplitudes n'oscillent pas asymptotiquement, tant que $|\sigma^2| < m_{\rm W}^2$. Lorsque le système entre dans le régime non-linéaire, il faut introduire une nouvelle version de la 'masse effective'

$$m_\sigma = \int \sqrt{m_{\rm W}^2 + \sigma^2 (c_1 + Q \ln \rho)^2}\mathrm{d}\rho\,, \tag{5.2}$$

qui décrit l'interaction des amplitudes chargées avec le champ électrique Coulombien. Dans ce cas, la solution électrique ($\sigma^2 < 0$) possède une masse 'tachyonique' lorsque la coordonnée radiale ρ est suffisamment grande. Dans une telle situation certaines amplitudes oscillent asymptotiquement et ne décrivent pas des états liés. Pour la discussion qui nous préoccupe, il a été imposé aux solutions d'être des états liés. Ainsi, il faut se résoudre à n'étudier que les types magnétiques ou chirales ($\sigma^2 \geq 0$). Il serait envisageable de considérer les solutions électriques, auquel cas il faut changer les conditions aux bords pour prendre en compte le caractère oscillatoire des amplitudes. La physique de telles solutions, et leur interprétation est entièrement différente. Les solutions magnétiques et chirales s'interprètent comme des condensats des bosons chargés W piégés et circulant au coeur du vortex. Les solution électriques ne sont pas forcément dénuées de sens, mais elles décriraient plutôt la diffusion de bosons chargés par un vortex magnétique. Nous mettrons l'accent sur les solutions magnétiques ou chirales. En effet, de telles solutions sont intéressantes pour nous à plusieurs égards. D'une part elles sont analogues, du point de vue de la théorie des champs, à des distributions linéiques de charges ou de courant de l'électrodynamique classique. D'autre part, elles sont la réalisation, à des échelles d'énergie accessibles expérimentalement des solutions de Witten qui apparaissent dans le contexte des théories grandes unifiées. Ayant choisi de se restreindre à l'étude de solutions liées, nous savons qu'il n'est pas possible de promouvoir toutes les solutions du problème linéaire au niveau non-linéaire. Lorsque les solutions magnétiques sont promues au niveau non-linéaire, l'interaction avec le champ électrique accroît la localisation de modes chargés. D'après l'analyse du problème linéarisé, il est possible de voir quel genre de solution peut être étendue au régime non-linéaire. En effet d'après Fig. 3.2 – Fig. 3.5, on a pu constater que les solutions telles que

$\nu \leq n$ sont toujours *magnétiques* ($\sigma^2 > 0$). Les configurations telles que $\nu = 2n$ sont toujours *électriques* ($\sigma^2 < 0$). Les solutions telles que $n < \nu < 2n$, quant à elles peuvent être *magnétiques*, *électriques* ou *chirales*. Au niveau linéaire, nous avions établi une règle permettant de classifier la nature des solutions. Il est possible de dégager une règle analogue pour classifier les solutions au niveau non-linéaire.

Pour un valeur donnée de n, il existe $2n-1$ solutions. Les solutions telles que $1 \leq \nu \leq n$ existent pour toutes les valeurs de l'angle faible θ_W. Alors que les solutions telles que $n < \nu \leq 2n-1$ n'existent que pour des valeurs suffisamment petites de l'angle faible θ_W (θ_W n'est pas trop proche de $\pi/2$). La solution pour laquelle $\nu = 2n$ est toujours électrique et ne peut être promue au niveau non-linéaire.

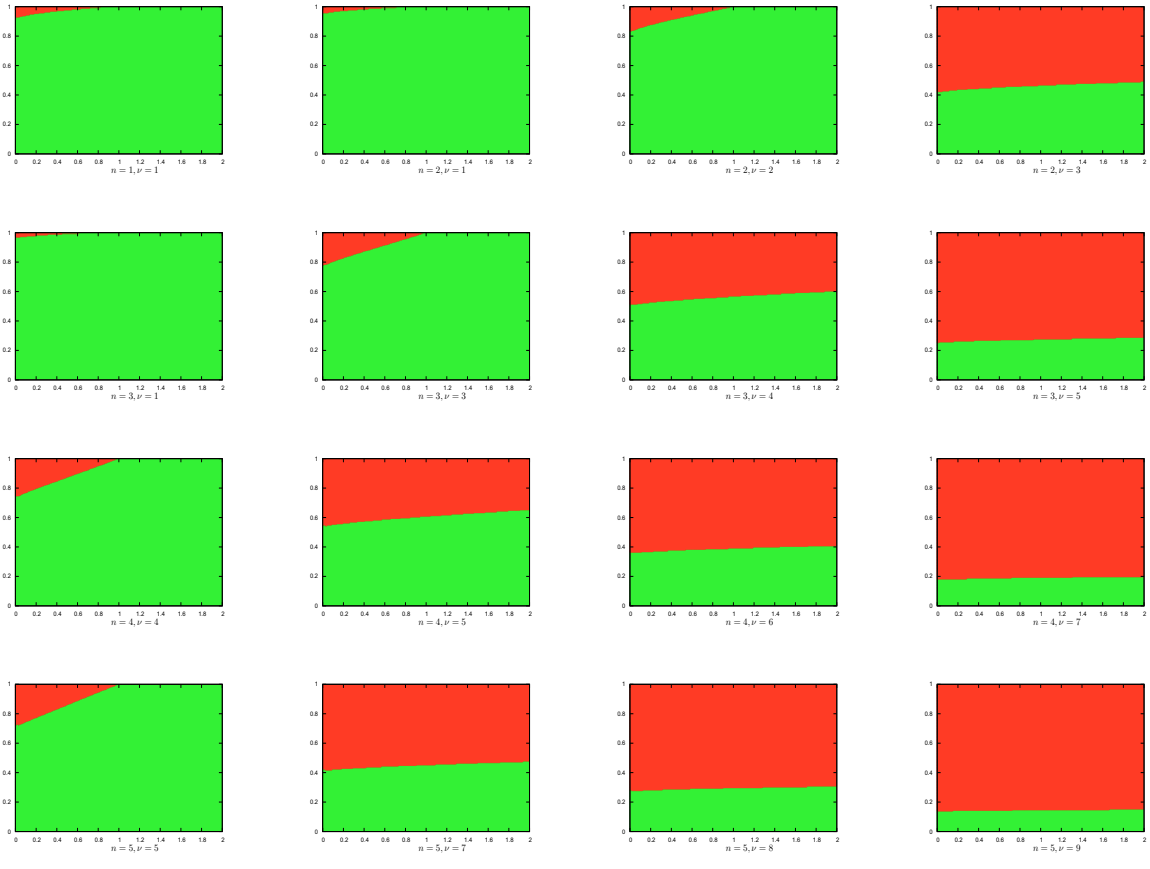


FIG. 5.1: Représentation des régions interdites et des régions autorisées où il est respectivement impossible ou possible, de promouvoir les solutions du problème linéaire au niveau non-linéaire. On a représenté plusieurs 'diagrammes d'existence' pour différentes valeurs des entiers n et ν, dans le plan $(\beta, \sin^2\theta_W)$.

Il est en fait possible d'être plus précis au sujet du domaine d'existence des solutions en considérant le diagramme des courbes chirales (Fig. 3.6). En effet, les courbes chirales sont des séparatrices entre les solutions électriques et magnétiques. À chaque courbe

chirale $\sigma(\beta, \theta_{\rm W}; n, \nu) = 0$ du diagramme Fig. 3.6 est associée un ensemble de solutions magnétiques ($\sigma^2 > 0$) dans la région située sous la courbe chirale. Nous qualifierons ces régions d'*autorisées* en référence aux régions où les solutions magnétiques de l'approximation linéaire peuvent être promues au niveau non-linéaire. Les régions situées au-dessus des courbes chirales seront appelées *interdites*, puisque dans le régime linéaire, elles définissent le domaine d'existence des solutions électriques qui ne peuvent être promues au niveau non-linéaire. Afin de visualiser plus précisément les régions *autorisées* et les régions *interdites*, on peut se référer aux diagrammes Fig. 5.1. Dans ces diagrammes du plan $(\beta, \sin^2\theta_{\rm W})$, les régions interdites sont représentées en rouge et les régions autorisées en vert pour différentes valeurs de n et ν. En s'éloignant du régime linéaire, c'est-à-dire lorsque le courant augmente, les diagrammes Fig. 5.1 restent qualitativement similaires. Cependant les courbes chirales 'remontent', c'est-à-dire que la surface des régions autorisées s'accroît. Il est ainsi légitime de s'attendre à trouver que le domaine autorisé remplisse quasiment tout l'espace dans la limite où le courant est grand. On peut affirmer que les solutions supraconductrices sont *génériques* au sens qu'elles existent pour *la plupart* des valeurs des constantes de couplage du modèle standard. En particulier de telles configurations existent pour les valeurs *physiques* ($\beta \simeq 2$, $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23\ldots$) de la théorie et devraient, si elles ont été réalisées par la nature, être observables expérimentalement. Pour des raison évidentes on choisit d'exposer nos résultats lorsque les paramètres prennent des valeurs expérimentales ($\beta \simeq 2$, $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23\ldots$). Cependant nous avons pu produire des solutions pour toutes les régions autorisées des diagrammes Fig. 5.1. En particulier, dans certaines limites spéciales de la théorie qui seront considérées plus tard.

5.1.2.1 Description des amplitudes

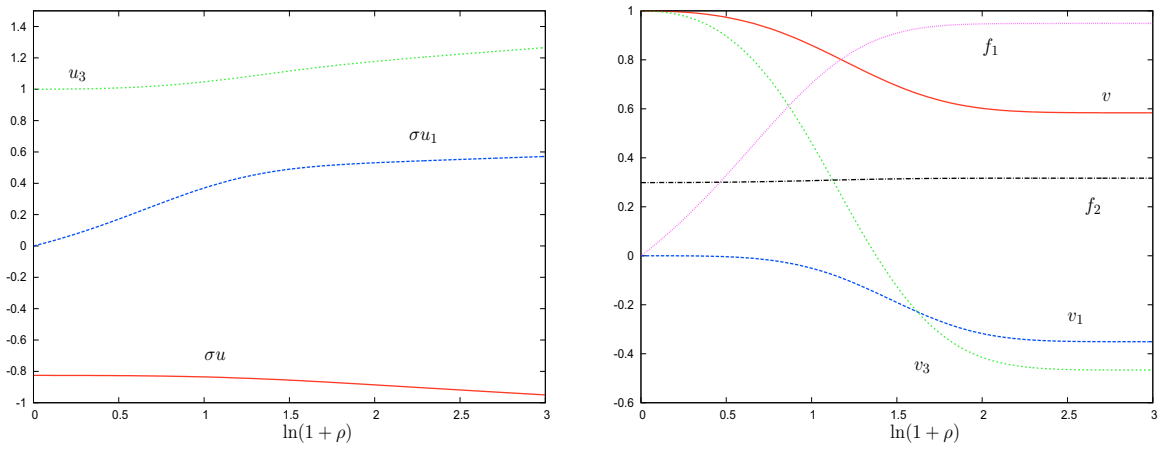


FIG. 5.2: Amplitudes du vortex supraconducteur fondamental ($n = \nu = 1$) pour le *twist* $\sigma = 0.6$ et les valeurs expérimentales des constantes de couplage ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = g'^{\,2} = 0.23$. À gauche : Les amplitudes *électriques*. À droite : Les amplitudes *magnétiques*.

Bien que n'étant pas invariantes de jauge, les 8 amplitudes (4.4) peuvent apporter des informations utiles pour l'étude des propriétés physiques des vortex porteurs de courant.

Fig. 5.2 représente le profile typique des amplitudes. Il s'agit de configurations *régulières* portant un courant (ou une charge) électrique. Il faut distinguer les amplitudes magnétiques (v , v_1 , v_3 , f_1 , f_2) qui sont toujours bornées, des amplitudes électriques (u , u_1 , u_3) qui exhibent asymptotiquement la divergence logarithmique propre au champ électromagnétique de Biot et Savart. Ainsi les champs massifs sont confinés au voisinage du coeur du vortex alors que le champ à longue portée associé au photon est décrit par les amplitudes électriques. D'après la définition des quantités conservées (Sec. 4.2.3), il est possible de reconstruire numériquement toutes les quantités physiquement intéressantes telles que le courant, l'énergie *etc* ... à partir des amplitudes (Fig. 5.2).

5.1.2.2 Description des grandeurs physiques observables

On fera ici la distinction entre les grandeurs *physiques* et les grandeurs *numériques*. Bien qu'inobservables, certaines grandeurs numériques sont pertinentes car elles permettent de dégager des tendances dans certains régimes (on pense en particulier aux limites de faible et grand courant, ou encore à la transition de phase qui sera évoquée plus tard). Parmi les paramètres numériques qui sont utiles dans la discussion de la physique du problème on gardera le paramètre de *twist* σ et le paramètre du condensat scalaire q . La grandeur fondamentale pour décrire les solutions supraconductrices est le courant $\mathcal{I}_\alpha \sim \sigma_\alpha$ dont les composantes sont la densité linéique de charge $\mathcal{I}_0$ et de courant électrique $\mathcal{I}_3$. Étant donné qu'on a choisi de se restreindre à l'étude des configurations magnétiques (ou chirales) $\sigma^2 \equiv \sigma_3^2 - \sigma_0^2 \geq 0$, le vecteur $\mathcal{I}_\alpha$ est de genre espace, ce qui signifie qu'il est toujours possible de se placer dans un référentiel comobile (au repos) où $\sigma_0 = \mathcal{I}_0 = 0$. Ainsi si $b = 0$, le courant $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}_3$ qui ne peut pas être éliminé par des transformations de Lorentz, est un paramètre essentiel des solutions, suggérant ainsi le terme de 'supraconductivité'. On rappelle que le *twist* $\sigma \equiv \sigma_3$ détermine dans le repère comobile la phase relative, dépendante de z, entre les deux composantes du doublet scalaire Φ (4.17). D'après la discussion précédente, les solutions existent pour toute valeur de $\beta > 0$ lorsque $\theta_{\rm W}$ appartient à la région autorisée Fig. 5.1. Pour une valeur donnée des entiers n et ν , les solutions dépendent non-seulement des valeurs de β et $\theta_{\rm W}$, mais également du paramètre du condensat scalaire q . Par conséquent le *twist* σ^2 est fonction de 5 arguments $\sigma^2 = \sigma^2(\beta, \theta_{\rm W}; n, \nu)$. Il faut de plus rappeler que les solutions étant invariantes sous les boosts de Lorentz, une même valeur de σ^2 désigne toute une famille de solutions (σ_0, σ_3) reliées entre elles par les transformations paramétrisées par b (4.2). Ainsi, pour des valeurs données de β et $\theta_{\rm W}$ les vortex supraconducteurs sont une famille de solutions à quatre paramètres n, ν, σ^2, b . D'après l'analyse linéaire, le paramètre q du condensat scalaire quantifie les déviations par rapport aux Z-strings. Augmenter ce paramètre permet ainsi de s'éloigner du régime linéaire et de générer le courant. Il s'avère que q n'est pas le paramètre le plus approprié pour explorer les nouvelles solutions. D'après Fig. 5.3, le courant et le *twist* sont des fonctions bivaluées de q. On comprend facilement d'après $\sigma(q)$ (Fig. 5.3) qu'il n'est pas aisé d'explorer la limite $\sigma \to 0$ si q est le paramètre de contrôle, ce qui est d'ailleurs déjà le cas dans le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ de Witten (Sec. 2.2). Il est donc préférable d'utiliser un autre paramètre de contrôle tel que le *twist* afin d'explorer l'espace des solutions dans le régime non-linéaire. Il existe une valeur maximale $q_\star(\mathcal{I}_\star)$ au delà de laquelle les solutions n'existent plus. On observe deux branches qui se rejoignent pour cette valeur spéciale.

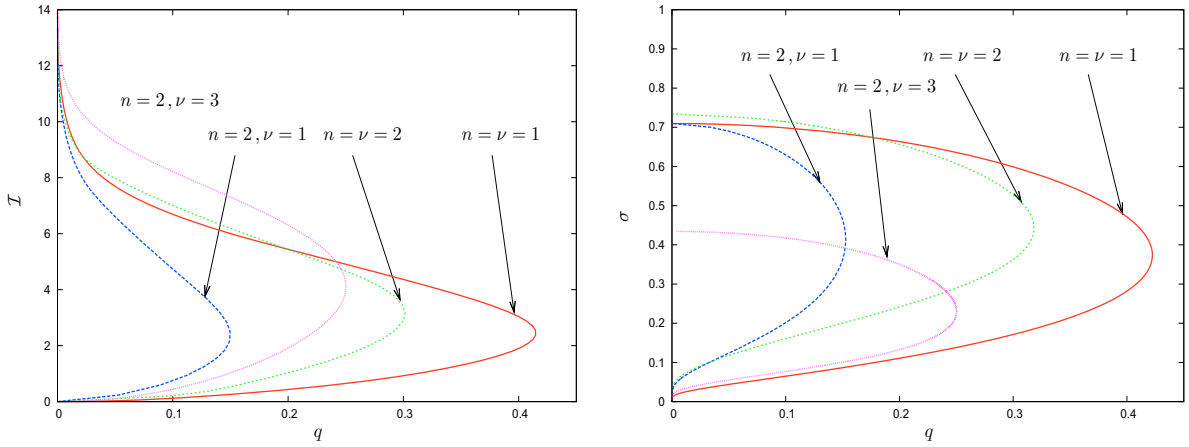


FIG. 5.3: Paramètres numériques importants pour décrire les vortex supraconducteurs électrofaibles. Les valeurs physiques de β et $\theta_{\rm W}$ sont choisies. À gauche : le paramètre du condensat q en fonction du courant. À droite : le *twist* σ en fonction de q.

Une forme à deux branches telle que celle-ci suggère l'existence d'une transition de phase accompagnée d'une modification des propriétés physiques du système.

Étant donné que q n'est pas approprié pour caractériser les solutions, on préférera dénoter les solutions par le courant invariant de jauge $\mathcal{I}$ ou le twist σ. À chaque jeu de paramètres, il est possible d'associer d'autres quantités physiques tels les flux $\Psi_{\rm F}$ et $\Psi_{\rm Z}$, les densités linéiques de charge $\mathcal{I}_0$ et de courant $\mathcal{I}_3$.

Énergie et courant Les amplitudes solutions des équations du mouvement (4.6) – (4.8) satisfaisant les conditions aux bords (4.21) (4.30) décrivent des configurations dont la densité linéique d'énergie est infinie à cause de la divergence du potentiel Coulombien en deux dimensions d'espace. La densité radiale d'énergie quant à elle est toujours bornée (voir par exemple Fig. 5.4 où la densité d'énergie est représentée dans le plan orthogonal à la feuille d'univers du vortex). D'après Fig. 5.4, non seulement les densités radiales d'énergie et de courant sont toujours bornées dans le plan orthogonal à la feuille d'univers du vortex, elles sont également toutes deux *confinées* au coeur de celui-ci. La densité linéique d'énergie (densité radiale d'énergie intégrée dans le plan (x_1, x_2) est infinie à cause de la divergence logarithmique des amplitudes électriques. La partie électrique de la densité linéique d'énergie (4.42) s'écrit

$$E_1 = \frac{\pi\sigma(1+2\sinh^2 b)}{gg'} Qu(\infty)\,, \tag{5.3}$$

Il n'y a pas réellement de sens à considérer seule la partie magnétique de l'énergie du vortex supraconducteur, puisque la partie électrique rend la totalité infinie. Cependant gardant à l'esprit que l'énergie est toujours infinie, l'analyse de la partie magnétique Fig. 5.5 met en avant certains faits intéressants. On constate en effet que la partie magnétique de

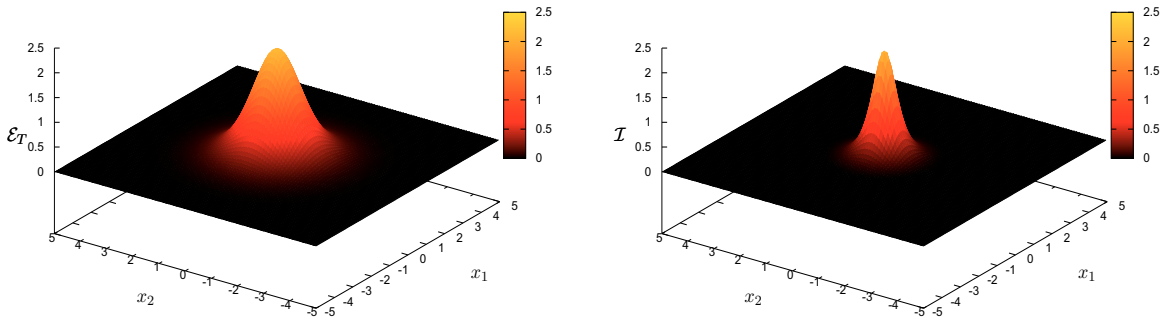


FIG. 5.4: À gauche : La densité radiale d'énergie dans le plan (x_1, x_2) orthogonal à la feuille d'univers du vortex. À droite : La densité radiale de courant $\mathcal{I}$.

la densité linéique d'énergie atteint un minimum pour une valeur finie du courant. En réalité cette valeur du courant est très exactement la valeur $\mathcal{I}_\star$ pour laquelle le condensat scalaire est maximum. Cela suggère, en un sens, que les solutions telles que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\star$ sont énergétiquement préférées. Il faut cependant rester prudent quant à l'interprétation de ce minimum puisqu'il ne s'agit que d'une partie de l'énergie, et non sa totalité. Remarquons seulement que le courant $\mathcal{I}_\star$ apparaît comme un point remarquable des quantités physiques.

Flux et champs magnétiques Les flux électromagnétiques $\Psi_{\rm F}$ et Z $\Psi_{\rm Z}$ sont calculés d'après la définition de Nambu (3.24). Il apparaît clairement d'après Fig. 5.6 que lorsque le courant est nul, les flux prennent les valeurs calculées pour les Z-strings (3.31). C'est-à-dire que $\Psi_{\rm F} = 0$ et le flux du champ Z est quantifié $\Psi_{\rm Z} = 4\pi n$. Il faut à nouveau remarquer un point particulier pour le flux magnétique. En effet, lorsque le courant électromagnétique atteint sa valeur critique $\mathcal{I}_\star$, le flux magnétique est maximum. Passée cette valeur critique, le flux décroît lentement lorsque le courant augmente. D'après le graphique Fig. 5.6, il n'est pas clair si $\Psi_{\rm F}$ s'annule lorsque le courant devient grand, ou si il tends vers une valeur finie quelconque. Grâce à l'approximation dans le régime des courants grands (Sec. 5.3), qui sera détaillée plus loin, il est possible de répondre à cette question. Pour cela on utilise la définition de 't Hooft (3.26) pour calculer les flux invariants de jauge avec les amplitudes données par l'approximation pour les grands courants (5.21), (5.25) et (5.26). On trouve alors

$$\Psi^{\rm H}_{\rm F}(\mathcal{I} = \infty) = 0\,, \quad \text{et} \quad ,\Psi^{\rm H}_{\rm Z}(\mathcal{I} = \infty) = 2\pi(2n - \nu)\,, \tag{5.4}$$

comme comportement pour les grands courants [1]. Les flux calculés d'après la définition de 't Hooft (3.26) ne se réduisent pas à ceux de Z-string lorsque le courant disparaît. Ceci est une conséquence du fait que le vecteur isotopique n^a (4.35) ne converge pas uniformément lorsque $q \to 0$. En effet lorsque $q = 0$, $f_2 = 0$ et $n^a = (0, 0, 1)$. Cependant d'après les conditions aux bordx (4.21), lorsque $q \neq 0$, $n^a = (0, 0, 1)$ presque partout sauf à l'origine où

[1] Nous n'avions pas réalisé au moment de la rédaction de notre article [93]

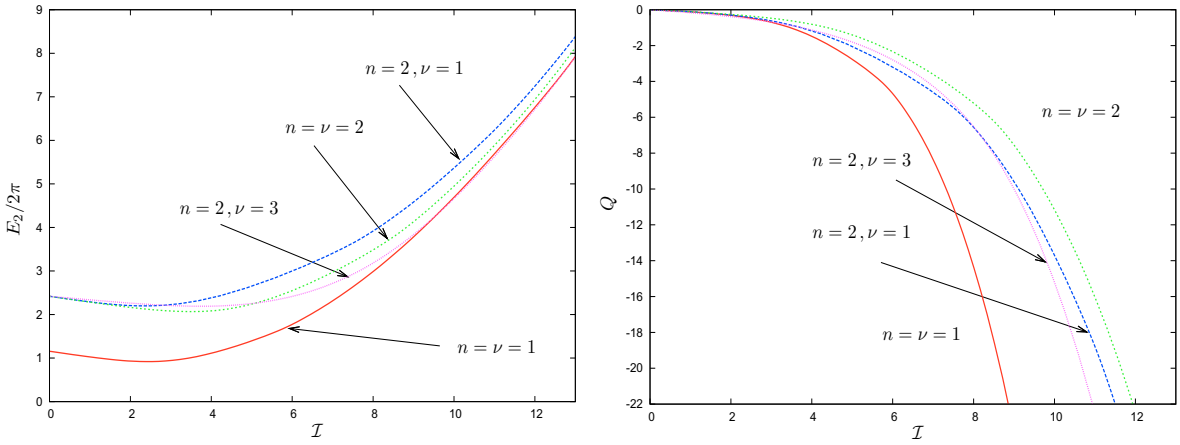


FIG. 5.5: Grandeurs caractéristiques du vortex supraconducteur ($n = \nu = 1$) pour les valeurs physiques $\beta = 2$ $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ en fonction du courant. À gauche : Densité linéique d'énergie magnétique À droite : Paramètre Q (charge Coulombienne).

$n^a = (0, 0, -1)$. Ainsi la définition de 't Hooft donne des résultats discontinus au voisinage de Z-string où on a par exemple

$$\Psi_{\rm Z}^{\rm H} = 4\pi n \quad \text{si} \quad q = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{\rm Z}^{\rm H} = 4\pi(n-\nu) \quad \text{sinon}\,. \tag{5.5}$$

C'est en particulier à cause de ce comportement singulier qu'il est préférable d'utiliser la définition de Nambu qui donne des valeurs parfaitement continues dans la limite où le courant disparaît. Ainsi les flux se comportent lorsque $0 \leftarrow \mathcal{I} \rightarrow \infty$ comme

$$0 \leftarrow \Psi_{\rm F} \rightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad 4\pi n \leftarrow \Psi_{\rm F} \rightarrow 2\pi(2n-\nu)\,. \tag{5.6}$$

Remarquons que le flux magnétique passe par un maximum, lorsque $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\star$. D'après les définitions des champs magnétique et Z (4.38), il est également possible de reconstruire les densités des différentes composantes des champs dans le plan orthogonal à la feuille d'univers du vortex (Fig. 5.7).

Condensats Il est également possible de représenter les densités des composantes du condensat de bosons chargés définies (4.39) dans le plan orthogonal à la feuille d'univers du vortex supraconducteur (voir Fig. 5.8). D'après (Fig. 5.8), le condensat W est singulier au coeur du vortex puisque $w_{\hat{\varphi}}$ (tout comme $w_{\hat{\rho}}$) ne s'annule pas sur l'axe. Cependant cette singularité est relativement douce puisque l'énergie ainsi que les potentiels sont réguliers. Il faut de plus souligner que cette singularité est absente dès que $\nu > 1$.

5.1.2.3 Description des paramètres numériques

Ayant présenté les quantités physiques observables, nous allons dicuter de certaines grandeurs qui sont d'ordre numérique. Bien qu'elles ne soient pas observables, elles aident

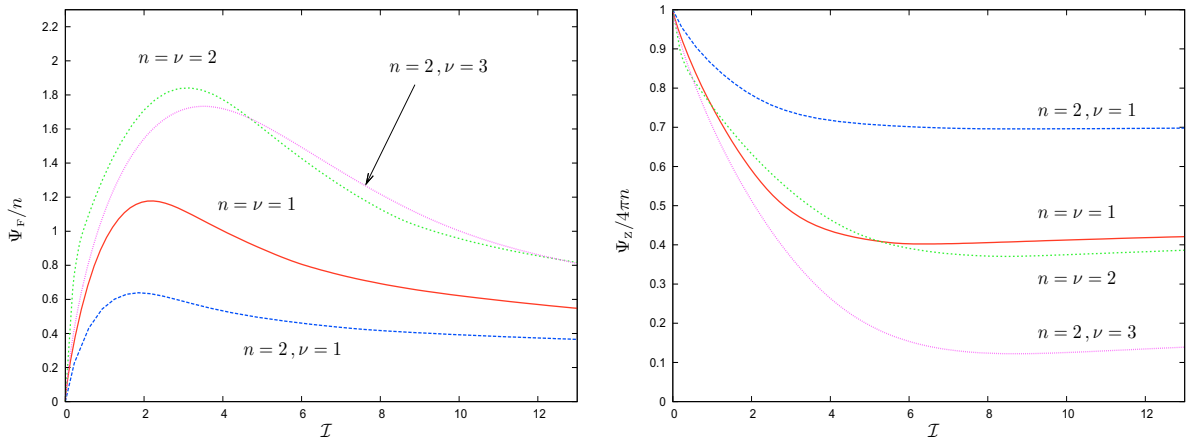


FIG. 5.6: Les flux des vortex supraconducteurs pour différentes valeurs des entiers n et ν pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie $\beta = 2$ et $\sin\theta_W = 0.23$. À gauche : le flux électromagnétique, À droite : le flux Z.

à comprendre le comportement des solutions supraconductrices dans certains régimes. En particulier, la connaissance du comportement de certains paramètres numériques sera utile lorsqu'il s'agira de modéliser le comportement des régimes de faible et fort courants. On représente Fig. 5.9 l'influence du courant de repos $\mathcal{I}$ sur les paramètres numériques qui sont le *twist* et l'*angle du vide*. Lorsque le courant est nul, les paramètres prennent les valeurs attendues pour Z-strings. En particulier, l'*angle du vide* s'annule et le *twist* prend une valeur finie correspondant à la valeur propre du problème de Schrödinger décrivant la stabilité des Z-strings. Lorsque le courant devient grand, le *twist* s'annule et l'*angle du vide* tend vers $\frac{\pi}{2}$. Sur Fig. 5.10 on peut voir l'évolution d'autres paramètres numériques en fonction du courant. En particulier on peut prédire $c_2 \to (2\nu - n)g^2$ lorsque $\mathcal{I} \to \infty$. Également, sur Fig. 5.5, on voit que la charge Coulombienne Q diverge lorsque le courant croît. En particulier, elle diverge plus vite que σ ne tend vers zéro, ce qui permet au courant de prendre des valeurs arbitrairement grandes. Cette observation va contre l'intuition qu'on a d'après l'étude du modèle de Witten Sec. 2.2. On avait vu en effet qu'il existait toujours une borne supérieure au courant. Dans la section dédié à l'étude du régime des courants forts Sec. 5.3, on verra qu'il n'y a pas de contradiction entre les observations dans les différents modèles.

Ayant jusqu'ici présenté les résultats à propos des solutions génériques obtenues de façon purement numérique, nous allons à présent voir qu'il est possible, dans des limites extrêmes où le courant est faible ou lorsqu'il est grand, de décrire en utilisant des approximations ou des outils (semi-)analytiques.

5.2 Description semi-analytique dans la limite de faibles courants

Il a été évoqué plus tôt (Sec. 3.2.2) qu'il est depuis longtemps reconnu que les Z-strings sont instables [28, 29]. Cette instabilité s'interprète par la condensation de bosons chargés

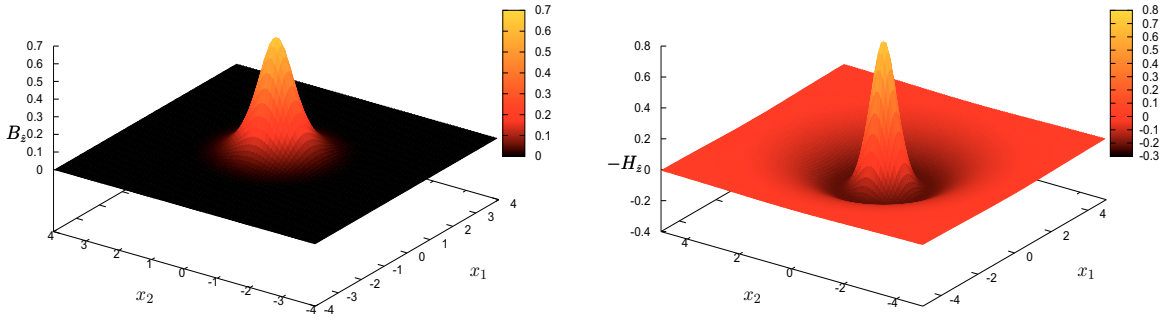


FIG. 5.7: À gauche : La densité de flux magnétique $B_{\hat{z}}$ dans le plan (x_1, x_2) orthogonal à la feuille d'univers du vortex. À droite : La densité de flux Z $H_{\hat{z}}$.

W au coeur du vortex [104, 85, 101, 103] (voir également Sec. 3.2.3). Puisqu'elles sont les seules particules chargées du secteur bosonique de la théorie électrofaible, il est naturel d'attendre que ce condensat soit responsable de la formation du courant de nos vortex supraconducteurs. Les nouvelles solutions (4.4) généralisent les solutions ANO dans la direction de l'instabilité dûe au courant. Ainsi, les solutions 'bifurquent' des Z-strings. Il est possible de suivre une analyse, standard en mécanique classique, afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeux au voisinage du point de bifurcation. Il s'agit d'une analyse perturbative au voisinage des solutions préexistantes (pour l'analyse perturbative en mécanique classique, voir par exemple [114]). L'idée d'appliquer ces techniques à été mise en avant pour l'étude des solutions supraconductrices dans la limite semilocale d'hypercharge $\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$ [115]. Une telle analyse s'est avérée être un outils puissant qui a permis de reproduire nos résultats numériques [116]. On s'attend donc, pour des valeurs génériques de θ_{W}, à ce que l'analyse perturbative lorsque le courant est faible, confirme nos résultats numériques. Le principe est de développer les amplitudes des champs en séries d'un paramètre infinitésimal ϵ, au voisinage des Z-strings. Le paramètre ϵ du développement caractérise la déviation par rapport à une solution connue (dans notre cas, il s'agit de Z-string). L'ordre zéro de la série doit reproduire la solution connue sans courant. C'est-à-dire les solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen plongées dans la théorie $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ (Sec. 3.2.1). Par construction, l'ordre suivant décrit la stabilité du plongement (Sec. 3.2.2), c'est à dire la déviation par rapport à Z-string engendrée par un faible courant. L'analyse des ordres sous-dominants permet de décrire plus finement le régime de faible courant. Ainsi, en suivant la procédure standard, les amplitudes de l'ansatz (4.4) sont développées

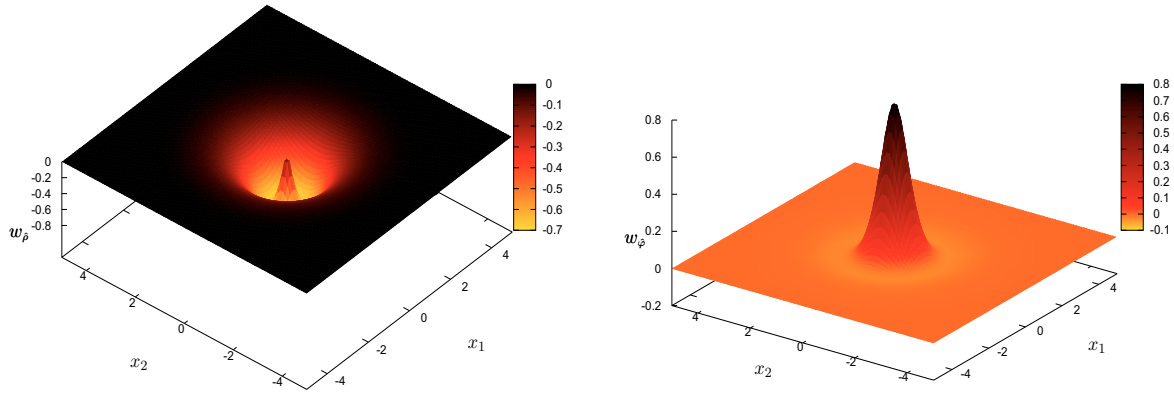


FIG. 5.8: À gauche : La densité de condensat $w_{\hat{z}}$ dans le plan (x_1, x_2) orthogonal à la feuille d'univers du vortex. À droite : La densité de condensat $w_{\hat{\varphi}}$.

en séries de puissances du paramètre infinitésimal ϵ

$$
\begin{aligned}
g\sigma^{(0)}(u+u_3) &= \epsilon^2 u_{\mathrm{Z}}^{(2)} + \dots\,, & \frac{\sigma^{(0)}}{g'}\left(g^2 u - g'^2 u_3\right) &= -\frac{\sigma^{(0)}}{g'} + \epsilon^2 u_{\mathrm{A}}^{(2)} + \dots\,,\\
\frac{v_1}{\rho} &= \epsilon v_1^{(1)} + \epsilon^2 v_1^{(2)} + \dots\,, & \frac{\sqrt{2}}{g'\rho}\left(g^2 v - g'^2 v_3\right) &= \frac{\sqrt{2}N}{g'\rho} + \epsilon^2 v_{\mathrm{A}}^{(2)} + \dots\,,\\
\sigma^{(0)} u_1 &= \epsilon u_1^{(1)} + \epsilon^2 u_1^{(2)} + \dots\,, & \frac{g\sqrt{2}}{\rho}\left(v+v_3\right) &= \frac{2g\sqrt{2}v_{\mathrm{ANO}}}{\rho} + \epsilon^2 v_{\mathrm{Z}}^{(2)} + \dots\,,\\
2g f_1 &= 2g f_{\mathrm{ANO}} + \epsilon^2 f_1^{(2)} + \dots\,, & g\sqrt{2} f_2 &= \epsilon f_2^{(1)} + \epsilon^2 f_2^{(2)} + \dots\,,\\
\sigma &= \sigma^{(0)} + \epsilon\sigma^{(1)} + \epsilon^2\sigma^{(2)} + \dots\,,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

où $N = 2ng^2 - \nu$ et les points de suspension désignent les termes sous-dominants. Les combinaisons linéaires sont choisies afin d'avoir des opérateurs différentiels symétriques dont les propriétés seront utilisées dans l'analyse des différents ordres. D'après les résultats numériques (Fig. 5.9), le paramètre de *twist* dépend du courant. Ainsi il doit également être développé en série afin de rendre compte de cette dépendance. On peut remarquer que certains termes ont été oubliés dans le développement (5.7). Par exemple pour le développement de f_1 le terme linéaire en ϵ est absent. En fait les termes linéaires qui ont été omis correspondent soit à des déformations non bornées, soit à des déformations à l'intérieur de la famille des Z-strings. On peut s'en convaincre en étudiant les équations à cet ordre. Il résulte que les déformations non bornées et les déformations dans la famille doivent être exclues. Ayant défini un développement en séries, il faut remplacer toutes les amplitudes de (4.4) par leur développement (5.7) dans les équations du mouvement (4.6)–(4.9), puis collecter les équations ordre par ordre. Nous allons tenter de rendre cette partie la plus clair possible en rejetant en partie les détails des équations vers l'appendice App. B.

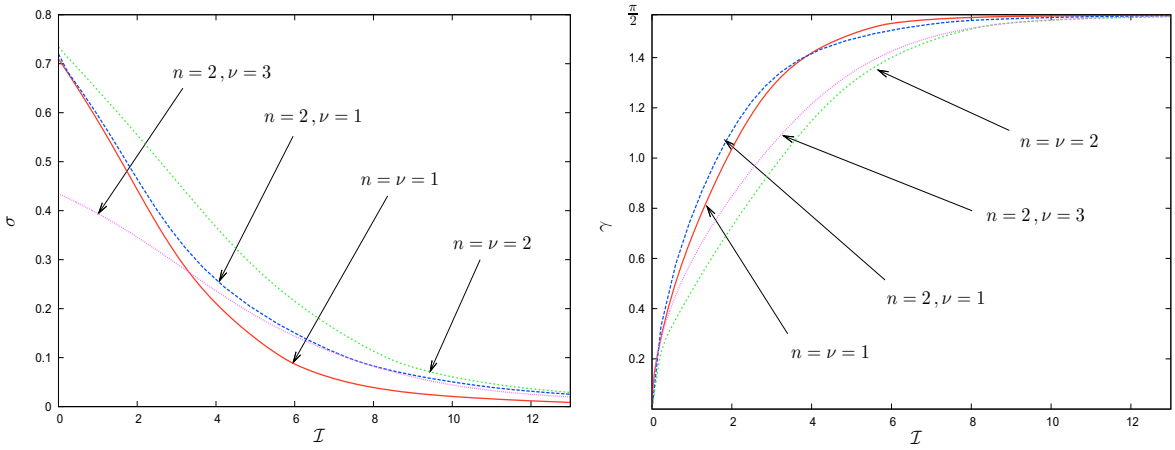


FIG. 5.9: Paramètres numériques du vortex supraconducteur fondamental ($n = \nu = 1$) dans la région physique de la théorie $\beta = 2$, $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$, en fonction du courant $\mathcal{I}$. À gauche : *twist* σ entre les composantes du champ scalaire À droite : *angle du vide* γ.

5.2.1 Déviation par rapport à la solution Z-string

D'après le développement en séries (5.7), l'ordre zéro du développement en ϵ décrit la solution d'Abrikosov-Nielsen-Olesen (2.11). Le premier ordre quant à lui décrit les perturbations linéaires autour des vortex électrofaibles. Il s'agit du système décrivant la déviation par rapport à Z-string. L'écriture explicite de l'opérateur des perturbations (Sec. 3.2.2) avait été laissée de coté afin de ne présenter que les résultats concernant la stabilité. Ici, les équations au premier ordre des perturbations sont analogues à celles qui décrivent la stabilité des Z-strings. Cependant la paramétrisation utilisée ici donne une expression légèrement différente, bien que les résultats soient exactement les mêmes. L'opérateur de stabilité sera discuté en détail dans la partie suivante (Sec. 6.4.1). Le choix des combinaisons linéaires des amplitudes (5.7) permet de décrire la déviation par rapport à Z-string au moyen d'un opérateur différentiel symétrique [2]. Grâce à la structure de cet opérateur différentiel, il est possible de définir un produit scalaire. Ainsi la déviation par rapport à Z-string s'écrit

$$\mathcal{D}^{\rm Z}\mathcal{Y}^{(1)} = 0\,, \qquad\qquad {\rm Wr}\,\mathcal{Y}^{(1)} = 0 \tag{5.8}$$

où le vecteur $\mathcal{Y}^{(1)}$ est défini d'après $\mathcal{Y}^{(a)} = (f_2^{(a)}, v_1^{(a)}, u_1^{(a)})$. Ici $\mathcal{D}^{\rm Z}$ est un opérateur différentiel symétrique 3×3 et Wr est la contrainte du premier ordre (4.9) linéarisée. Les opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{\rm Z}$ et Wr sont

$$\mathcal{D}^{\rm Z} = \begin{pmatrix} D_f & U_1 & U_2 \\ U_1 & D_v & U_3 \\ U_2 & U_3 & D_u \end{pmatrix}\,, \qquad\qquad {\rm Wr} = \begin{pmatrix} \hat{W}(\sigma^{(0)},\,.\,) \\ \hat{W}(\frac{2g^2 v_{\rm ANO}-N}{\rho},\,.\,) \\ \hat{W}(\frac{g f_{\rm ANO}}{\sqrt{2}},\,.\,) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

[2] Ce n'est cependant pas un opérateur de Schrödinger.

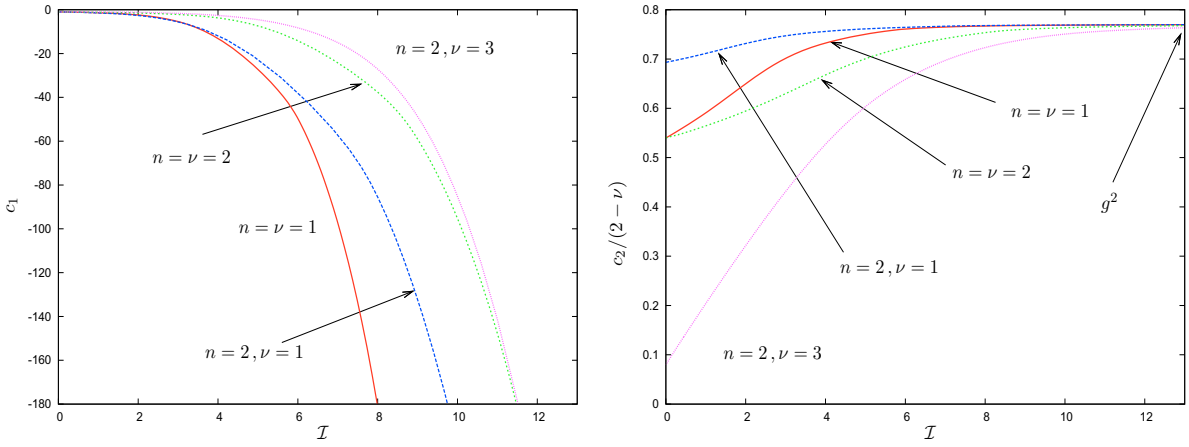


FIG. 5.10: Paramètres numériques du vortex supraconducteur élémentaire $(n=\nu=1)$ dans la région physique de la théorie $\beta=2$, $\sin^2\theta_{\rm W}=0.23$, en fonction du courant $\mathcal{I}$. À gauche : c_1 À droite : c_2. Lorsque le courant $\mathcal{I}\to\infty$, on voit que $c_2\to(2n-\nu)g^2$.

avec $\hat{W}(.,.)$ représente le déterminant Wronskien d'ordre 2 tel que $\hat{W}(x,\,y)=x'y-xy'$. Les éléments de matrice de l'opérateur $\mathcal{D}^{\rm Z}$ sont

$$
\begin{aligned}
D_f &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho)+\frac{(g'^{\,2}-g^2)v_{\rm ANO}+N}{\rho^2}+\sigma^{(0)\,2}+\frac{\beta}{4}(f_{\rm ANO}^2-1)\,,\\
D_v &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho)+\frac{1}{\rho^2}+\sigma^{(0)\,2}+\frac{g^2 f_{\rm ANO}}{2}\,,\\
D_u &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho)+\frac{g^2 v_{\rm ANO}-N}{\rho^2}+\frac{g^2 f_{\rm ANO}}{2}\,,\\
U_1 &= \frac{g(2g'^{\,2}v_{\rm ANO}+N)f_{\rm ANO}}{\sqrt{2}\rho}\,,\quad U_2=-\frac{\sigma^{(0)}g f_{\rm ANO}}{\sqrt{2}}\,,\quad U_3=-\sigma^{(0)}\frac{2g^2v_{\rm ANO}-N}{\rho}\,.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Les amplitudes du vecteur $\mathcal{Y}^{(1)}$ doivent satisfaire le comportement local

$$
\begin{aligned}
q\rho^{|n-\nu|}\leftarrow f_2^{(1)}\to g\sqrt{2}\left(\frac{\gamma}{2}+c_1\frac{{\rm e}^{-m_\sigma\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)+\dots\,,\quad {\rm o}(\rho^2)\leftarrow v_1^{(1)}\to-\frac{N\gamma}{\rho}+c_2\frac{{\rm e}^{-m_\sigma\rho}}{\sqrt{\rho}}+\dots\,,\\
a_2\rho^\nu\leftarrow u_1^{(1)}\to\sigma^{(0)}\left(\gamma+c_3\frac{{\rm e}^{-m_\sigma\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)+\dots
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

lorsque $0\leftarrow\rho\to\infty$. Les amplitudes du vortex ANO satisfont quant à elles les conditions usuelles $0\leftarrow f_{\rm ANO}\to 1$ et $n\leftarrow v_{\rm ANO}\to 0$. Le paramètre γ est l'*angle du vide* intervenant dans les conditions aux bords (4.30). Les conditions aux bords indiquent que le système est dans la jauge (4.4). Le problème (5.8), sujet aux conditions aux bords (5.11) dépend de 7 paramètres libres q, a_2, c_1, c_2, c_3, γ et $\sigma^{(0)}$. Comme il s'agit d'un système linéaire, il est toujours possible de fixer arbitrairement un de ces paramètres par une normalisation globale, sans perte de généralité. Ainsi, étant donné que q est essentiel pour quantifier la déviation par rapport à Z-string, nous adoptons $q=1$. La vraie valeur de q sera restaurée

lors de la reconstruction des solutions. Il reste par conséquent 6 paramètres libres pour satisfaire aux 6 conditions de continuité sur les amplitudes et leurs dérivées. Le paramètre $\sigma^{(0)}$ joue le rôle de valeur propre déterminant la stabilité de Z-string.

Il est extrêmement important ici que l'opérateur $\mathcal{D}^{\mathrm{z}}$ soit un opérateur symétrique (réel). En effet, cette propriété permet la définition d'un produit scalaire et d'une norme relatifs à cet opérateur $\mathcal{D}^{\mathrm{z}}$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f \cdot g \, \rho \mathrm{d}\rho \,, \qquad\qquad ||f||^2 = \langle f, f\rangle \,, \tag{5.12}$$

où $\cdot$ est le produit scalaire euclidien entre deux vecteurs. Par définition, les fonction f et g satisfont les conditions aux bords (5.11). Le produit scalaire est alors symétrique relativement à $\mathcal{D}^{\mathrm{z}}$

$$\langle \xi, \mathcal{D}^{\mathrm{z}} \zeta\rangle = \langle \zeta, \mathcal{D}^{\mathrm{z}} \xi\rangle \,. \tag{5.13}$$

Cette propriété de symétrie du produit scalaire est essentielle afin de supprimer les termes séculaires présents dans les équations des ordres plus élevés. Les éléments présentés jusqu'ici n'apportent aucune nouvelle information. Il faut considérer les ordres plus élevés du développement en série.

5.2.2 Corrections de la déviation

Nous présentons ici l'analyse des ordres supérieurs du développement en séries. Le détail des expressions est présenté en appendice App. B.

5.2.2.1 Corrections au deuxième ordre

L'inspection des ordre supérieurs, montre des équations contenant des termes séculaires (parfois appelés résonances). De tels termes doivent absolument être annulés afin de construire des corrections qui soient bornées. Au deuxième ordre en ϵ, les équations se séparent en plusieurs parties indépendantes. Une de ces parties contient le terme séculaire, proportionnel à $\sigma^{(1)}$, qu'il faut annuler. Les autres parties, quant à elles, sont des équations différentielles linéaires avec des termes de source, dépendants des amplitudes des ordres inférieurs. Le système contenant le terme séculaire proportionnel à $\sigma^{(1)}$ est

$$\mathcal{D}^{\mathrm{z}} \mathcal{Y}^{(2)} = -2\sigma^{(1)} \mathcal{M} \mathcal{Y}^{(1)} \,, \qquad\qquad \mathrm{Wr}\, \mathcal{Y}^{(2)} = -2\sigma^{(1)} u_1^{(1)} \,, \tag{5.14}$$

$\mathcal{M}$ est une matrice donnée en appendice Sec. B. Il faut à tout prix éliminer le terme séculaire proportionnel à $\mathcal{Y}^{(1)}$. C'est grâce au produit scalaire (5.12) qu'il est possible d'éliminer ce terme séculaire. En effet, d'après la propriété de symétrie (5.13), en prenant le produit scalaire de l'équation (5.14) avec $\mathcal{Y}^{(1)}$ on trouve $\langle \mathcal{Y}^{(1)}, \mathcal{D}^{\mathrm{z}} \mathcal{Y}^{(2)}\rangle = \langle \mathcal{Y}^{(2)}, \mathcal{D}^{\mathrm{z}} \mathcal{Y}^{(1)}\rangle = 0$. Par conséquent, $\sigma^{(1)}$ et $\mathcal{Y}^{(2)}$ doivent satisfaire les relations

$$-2\sigma^{(1)} \langle \mathcal{Y}^{(1)}, \mathcal{M} \mathcal{Y}^{(1)}\rangle = 0 \quad \text{et} \quad D^z \mathcal{Y}^{(2)} = 0 \,. \tag{5.15}$$

La seule possibilité de satisfaire ces conditions est d'abord d'imposer $\sigma^{(1)} = 0$. La deuxième condition est en réalité identique à l'équation (5.8) du premier ordre. Comme il n'est pas

possible que $\mathcal{Y}^{(2)}$ satisfasse les mêmes équations que $\mathcal{Y}^{(1)}$ il faut imposer $\mathcal{Y}^{(2)} = 0$ .Le terme séculaire apparaissant à cet ordre étant éliminé, il faut considérer les autres équations qui décrivent les amplitudes $f_1^{(2)}$, $u_{\rm A}^{(2)}$, $v_{\rm A}^{(2)}$, $u_{\rm Z}^{(2)}$, $v_{\rm Z}^{(2)}$. Elles satisfont des équations différentielles linéaires avec des termes de source qu'il faut résoudre. Le détail de ces équations est présenté App. B. Considérerons dorénavant que les amplitudes $f_1^{(2)}$, $u_{\rm A}^{(2)}$, $v_{\rm A}^{(2)}$, $u_{\rm Z}^{(2)}$, $v_{\rm Z}^{(2)}$ sont connues numériquement. Ainsi, toutes les amplitudes entrant dans la décomposition (5.7) sont reconstruites jusqu'au deuxième ordre en ϵ . Seules la correction au deuxième ordre du *twist* reste encore à déterminer puisqu'elle n'apparaît qu'à l'ordre suivant.

5.2.2.2 Correction du *twist*

A cet ordre les équations deviennent de plus en plus compliquées. Cependant il faut considérer les équations contenant des termes séculaires. Ces équations analogues à (5.14) permettent de déterminer la correction du *twist*

$$\mathcal{D}^{\rm z}\mathcal{Y}^{(3)} = -2\sigma^{(2)}\mathcal{M}\mathcal{Y}^{(1)} + \mathcal{S}^{(3)}\,, \tag{5.16}$$

où $\mathcal{S}^{(3)}$ est un vecteur qui s'exprime en fonction des amplitudes apparues dans les ordres inférieurs. Comme il a été vu pour le deuxième ordre, il faut éliminer les termes séculaires grâce à la propriété de symétrie du produit scalaire. Ainsi en prenant le produit scalaire de l'équation (5.16) avec $\mathcal{Y}^{(1)}$ les conditions d'élimination du terme séculaire sont

$$-2\sigma^{(2)}\langle\mathcal{Y}^{(1)},\mathcal{M}\mathcal{Y}^{(1)}\rangle + \langle\mathcal{Y}^{(1)},\mathcal{S}^{(3)}\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad D^z\mathcal{Y}^{(3)} = 0\,. \tag{5.17}$$

La deuxième condition impose d'avoir $\mathcal{Y}^{(3)} = 0$. La correction au deuxième ordre du twist s'écrit alors

$$\sigma^{(2)} = \frac{\langle\mathcal{Y}^{(1)},\mathcal{S}^{(3)}\rangle}{2\langle\mathcal{Y}^{(1)},\mathcal{M}\mathcal{Y}^{(1)}\rangle}\,. \tag{5.18}$$

L'expression compacte permettant de calculer la correction du *twist* est en réalité très lourde (voir App. B pour l'écriture complète). Néanmoins, le calcul peut être mené à bien puisque toutes les quantités entrant dans les produits scalaires sont connues.

5.2.3 Reconstruction des amplitudes et du *twist*

A présent les corrections (5.7) sont connues jusqu'au second ordre du développement en ϵ . Les équations étudiées sont valables pour des valeurs arbitraires des paramètres de la théorie (β , n , ν , et $\theta_{\rm W}$). Cependant, nous présenterons ici uniquement des résultats concernant les solutions fondamentales ($n = \nu = 1$) pour les valeurs expérimentales des paramètres de la théorie ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = 0,23$). Les amplitudes des différents ordres étant connues (voir Fig. B.1), il faut calculer les produits scalaires présents dans la correction au second ordre du twist $\sigma^{(2)}$ (5.18) d'après leur définition explicite présentée en appendice. Une fois le *twist* reconstruit, il est possible de reconstruire toutes les amplitudes (5.7) en fonction du paramètre ϵ . Il reste alors à donner un sens au paramètre ϵ . Dans l'approximation linéaire, on sait que le paramètre du condensat scalaire q permet de quantifier la déviation par rapport à Z-string. C'est donc tout naturellement qu'on cherche à

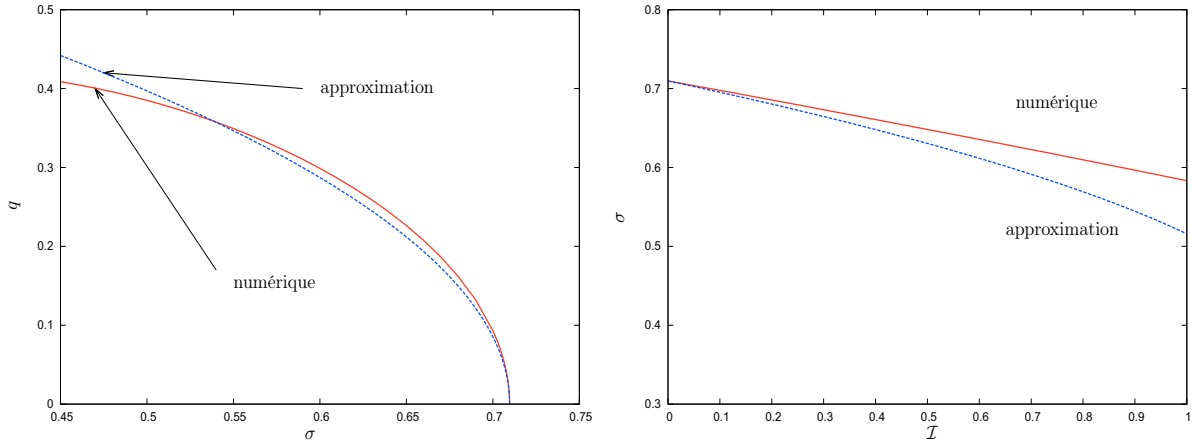


FIG. 5.11: Comparaison des quantités physiques obtenues d'après l'approximation (en bleu / pointillés) à celles obtenues en résolvant le problème non-linéaire (en rouge / plein). Pour le vortex fondamental $n = \nu = 1$ et les valeurs physiques des paramètres $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$. À gauche : Le paramètre du condensat scalaire q en fonction du *twist* σ. À droite : Le *twist* σ en fonction du courant $\mathcal{I}$.

relier ce dernier au paramètre ϵ du développement (5.7). q ayant été normé à l'unité lors de la résolution du système linéaire (5.8), on fait le lien entre les paramètres

$$\epsilon = qg\sqrt{2}\,, \qquad\qquad q = \sqrt{2g^2\frac{\sigma-\sigma^{(0)}}{\sigma^{(2)}}} + \dots\,. \tag{5.19}$$

Il est dorénavant possible de représenter les paramètres reconstruits d'après l'analyse perturbative, et de les comparer aux valeurs numériques obtenues par résolution directe du système non-linéaire Fig. 5.11. Il faut souligner que l'analyse perturbative reproduit correctement les résultats numériques pour un intervalle relativement grand de q. Il est également possible de reconstruire les amplitudes et de les comparer aux résultats numériques Fig. 5.12. À nouveau l'approximation reproduit correctement le comportement numérique. La description semi-analytique pour des solutions portant un faible courant est satisfaisante puisqu'elle donne des résultats similaires à ceux obtenus en résolvant le problème non-linéaire. Cette analyse permet de confirmer les résultats purement numérique dans le régime où les courants sont faibles. On verra par ailleurs qu'elle s'avérera un outils très utile pour décrire la stabilité des solutions dans cette même limite.

Il faut remarquer qu'étant donné l'échelle caractéristique des courants dans la théorie de Weinberg-Salam (4.37), le *milliard* d'Ampères, même cette limite de faible courant est en fait toute relative. En effet, si on considère que l'analyse perturbative est pertinente pour des courants $\mathcal{I} \sim 0 - 0.1$ elle décrit en réalité des courants pouvant atteindre des centaines de millions d'Ampères.

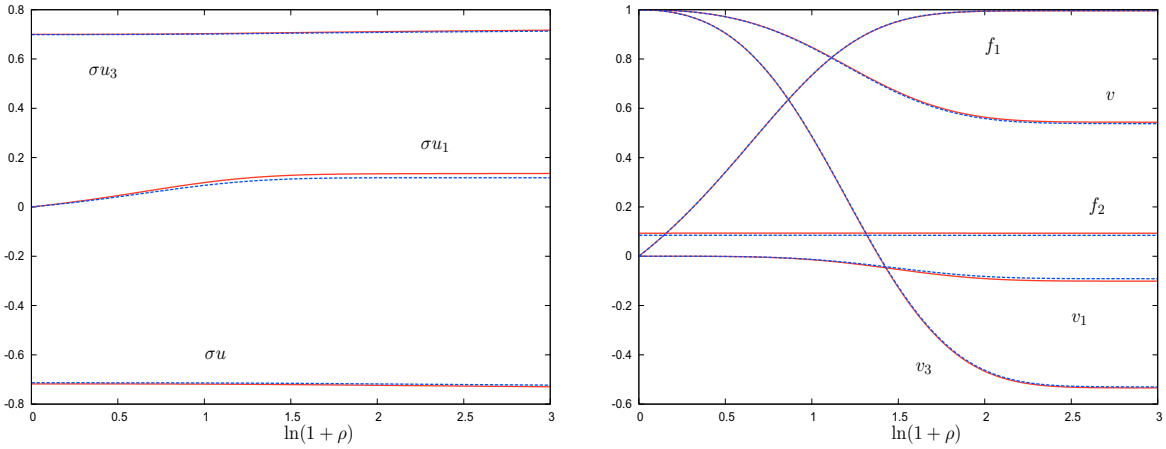


FIG. 5.12: Comparaison des amplitudes obtenues en résolvant le problème non-linéaire (rouge / plein) avec les amplitudes reconstruites après résolution de l'approximation (bleu / pointillé), pour le *twist* $\sigma = 0.7$. À gauche : Amplitudes électriques À droite : Amplitudes magnétiques.

5.3 Description approchée de la limite de grands courants

Au cours de la section précédente, nous avons montré que les vortex supraconducteurs électrofaibles peuvent être décrits, lorsque le courants est faible, par l'analyse des bifurcations avec les solutions sans courant. Nous allons voir à présent qu'il est possible d'avoir également une description approchée des vortex supraconducteurs dans la limite opposée lorsque courant tend vers l'infini (au moins $\mathcal{I} \gg 1$).

L'analyse des paramètres physiques de la théorie, en particulier du courant $\mathcal{I}$, met en avant un phénomène assez intéressant. En effet, d'après les propriétés des solutions dans le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ de Witten (Sec. 2.2), on s'attend à l'existence d'une borne supérieure au courant (Fig. 2.4). Ce phénomène de 'current quenching' ne semble pas avoir lieu pour les vortex électrofaibles $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ (Fig. 5.3). Les grands courants correspondent à de faibles valeurs de σ et il nous a été possible de descendre jusqu'à des valeurs du *twist* de l'ordre de 10^{-3} sans jamais avoir aucune indication de cette extinction du courant. L'analyse des solutions électrofaibles lorsque le courant est grand donne une explication à l'absence de 'current quenching'. Apparemment la raison de cette absence est la *nature* des porteurs de charge. En effet, dans tous les modèles de supraconductivité conventionnels, les porteurs de charge sont des bosons scalaires. En matière condensée (Sec. 1.3) dans la théorie BCS, les porteurs de charges sont les paires de Cooper qui sont des bosons scalaires. De même dans le modèle de Witten le porteur de charge est le condensat scalaire. Par analogie avec les modèles de supraconductivité, lorsque les courants électriques sont importants, l'induction magnétique est également importante, ce qui permet de briser les paires de Cooper et ainsi détruire la supraconductivité. Ce genre de phénomène est à l'origine de l'existence d'une borne supérieure au courant dans le modèle de Witten où le courant est porté par le condensat scalaire. En particulier, on se rappelle que le courant s'annule lorsque ϕ_2 s'annule (voir Sec. 2.2 et Fig. 2.4).

Dans la théorie de Weinberg-Salam, lorsque le courant est important (et par conséquent les champs magnétiques), le champ scalaire est également éteint à l'intérieur du vortex. Cependant l'extinction du condensat ne détruit pas la supraconductivité, ce qui suggère que le champ scalaire n'est pas la grandeur adéquate pour décrire le courant. Les grands courants qui poussent le champ scalaire dans le faux vide restaurent la symétrie au coeur du vortex. Le coeur constitué d'un condensat de bosons chargés est alors décrit par une théorie de Yang-Mills libre. L'invariance d'échelle de la théorie de Yang-Mills libre garantit le fait que le courant puisse être non borné. Nous allons montrer dans ce qui suit comment la

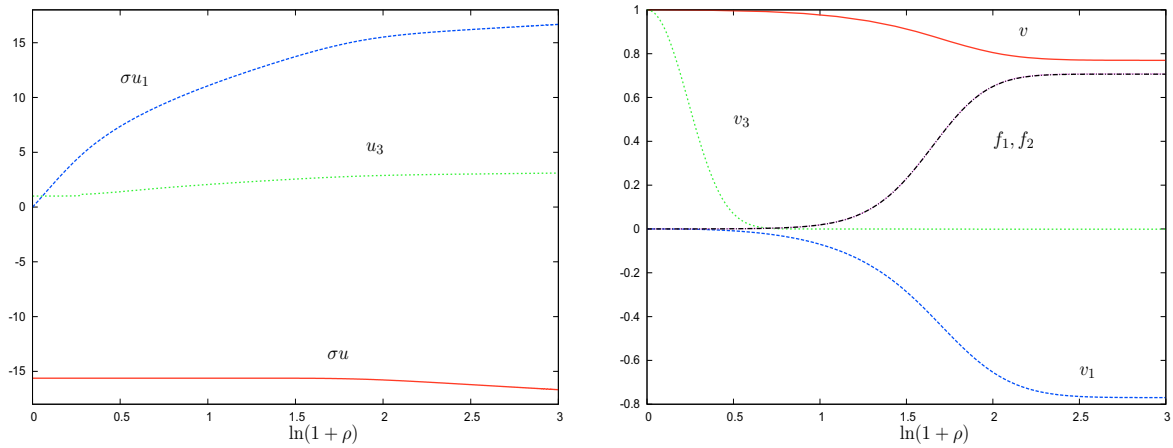


FIG. 5.13: Profil des amplitudes décrivant le vortex fondamental $n = \nu = 1$ lorsque le courant est grand ($\sigma = 0.008$) pour les valeurs physiques des paramètres $\beta = 2$ $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$. À gauche : Amplitudes électriques À droite : Amplitudes magnétiques.

description de la limite de grand courant explique l'absence de borne supérieure au courant. Bien que l'analyse soit présentée pour le vortex élémentaire ($n = \nu = 1$), cette description peut être appliquée pour tous les vortex supraconducteurs électrofaibles. Les amplitudes décrivant le vortex lorsque le courant est grand (Fig. 5.13) montrent que le champ scalaire est *quasiment nul* au coeur du vortex. Par ailleurs, asymptotiquement l'angle du vide γ tends vers $\pi/2$ (Fig. 5.9). Ainsi, le comportement asymptotique du champ scalaire est $f_1\,,\, f_2 \,\to\, 1/\sqrt{2}$. On observe de plus que $f_1 \,\approx\, f_2$ *presque partout*. Il faut cependant remarquer qu'en réalité, à l'origine, les champs satisfont toujours (4.21), mais comme les paramètres a_5 et q sont extrêmement petits, on peut considérer que le scalaire s'annule au centre. Ainsi dans la région centrale, en première approximation, les deux composantes du champ scalaire sont nulles ($f_1 \approx f_2 \approx 0$). Ainsi, la symétrie de jauge $\mathrm{SU}(2)_{\rm I} \times \mathrm{U}(1)_{\rm Y}$ est complètement restaurée lorsque le courant 'pousse' le champ de Higgs vers le faux vide. On remarque de plus que dans cette région, $v \approx 1$, $v_1 \approx 0$ et $\sigma u' \approx 0$, $\sigma u_3 \approx 0$ (voir Fig. 5.13). Alors les conditions aux bords se simplifient

$$\begin{aligned}
&a_1 \leftarrow u \rightarrow c_1 + Q\ln\rho\,, && 0 \leftarrow u_1 \rightarrow -(c_1 + Q\ln\rho)\,, && 1 \leftarrow u_3 \rightarrow 0\,,\\
&1 \leftarrow v \rightarrow c_2\,, && 0 \leftarrow v_1 \rightarrow -c_2\,, && 1 \leftarrow v_3 \rightarrow 0\,,\\
&a_5\rho \leftarrow f_1 \rightarrow 1/\sqrt{2}\,, && q \leftarrow f_2 \rightarrow 1/\sqrt{2}\,. &&
\end{aligned} \tag{5.20}$$

L'observation des profils Fig. 5.13 indique la possibilité de séparer l'espace en deux régions. Dans chacune de ces régions les équations se simplifient beaucoup. Nous présentons ici l'essentiel de l'approximation en grand courant. Pour l'analyse complète, voir [93].

5.3.1 Le coeur du vortex et le condensat chargé – vortex de Yang-Mills

Lorsque le courant est grand, la solution devient très simple dans une région au centre du vortex. On constate en effet, qu'au coeur du vortex, presque toutes les amplitudes sont constantes. Seules les amplitudes u_1 et v_3 varient dans cette région. On note de plus que cette région centrale est de plus en plus petite lorsque le courant augmente. Introduisons alors la longueur caractéristique $\sim 1/\mathcal{I}$. Dans cette région, les modes *supermassifs* dominent puis sont rapidement 'tués'. D'après ces observations, introduisons l'approximation dépendante du courant dans la région $\rho \leq x_0/\mathcal{I}$

$$f_1 = f_2 = \sigma u_3 = v_1 = 0\,, \quad \sigma u = \text{const.}\ , \quad v = 1\,, \quad \sigma u_1(\rho) = \mathcal{I} U_1(\mathcal{I}\rho)\,, \quad v_3 = V_3(\mathcal{I}\rho)\,. \tag{5.21}$$

Les seules équations restantes sont

$$\frac{1}{x}\left(xU_1'\right)' = \frac{V_3^2}{x^2}U_1\,, \qquad\qquad x\left(\frac{V_3'}{x}\right)' = U_1^2 V_3\,, \tag{5.22}$$

où $'$ représente la différentiation par rapport à la variable rééchelonnée $x = \mathcal{I}\rho$. L'analyse locale du comportement des solutions donne pour $0 \leftarrow x \rightarrow \infty$

$$0 \leftarrow U_1(x) \rightarrow a + b\ln(x)\,, \quad 1 \leftarrow V_3(x) \rightarrow 0\,, \tag{5.23}$$

Les valeurs numériques des paramètres sont déterminées après résolution numérique du problème dans cette région. L'approximation (5.21) donne une famille de solution dépendant du courant $\mathcal{I}$. L'invariance d'échelle des équations (5.22) est une conséquence de la nullité du champ scalaire au coeur du vortex. Ainsi le système (5.22) décrit les équations de Yang-Mills pour le système (*libre*) décrit par la densité lagrangienne invariante sous SU(2) et invariante d'échelle

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\,\mu\nu}\,, \tag{5.24}$$

lorsque les champs prennent la forme $\tau^a W^a_\mu \mathrm{d}x^\mu = \tau^1 U_1(\mathcal{I}\rho)\mathcal{I}\mathrm{d}z + \tau^3 V_3(\mathcal{I}\rho)\mathrm{d}\varphi$. Ainsi, les solutions du système (5.22) – (5.23) sont appelées vortex de Yang-Mills. Le profil typique des amplitudes est représenté Fig. 5.14. Ces vortex de Yang-Mills constitués de champs de jauge libres, décrivent un condensat de bosons vecteurs chargés W, piégés dans la région où l'amplitude V_3 est non nulle. Le condensat chargé génère un champ Coulombien à longue portée représenté par l'amplitude U_1. Empiriquement, on peut fixer la valeur $x_0 = 10$ (Fig. 5.14) et ainsi déterminer la distance $\rho_0 = x_0/\mathcal{I}$ au delà de laquelle le coeur chargé disparait et où une nouvelle dynamique entre en jeu.

La nullité du champ scalaire au coeur du vortex a une conséquence physique très importante. En effet puisque cette région est décrite par une théorie de Yang-Mills *libre* qui est invariante d'échelle, le courant électromagnétique peut être arbitrairement grand [93].

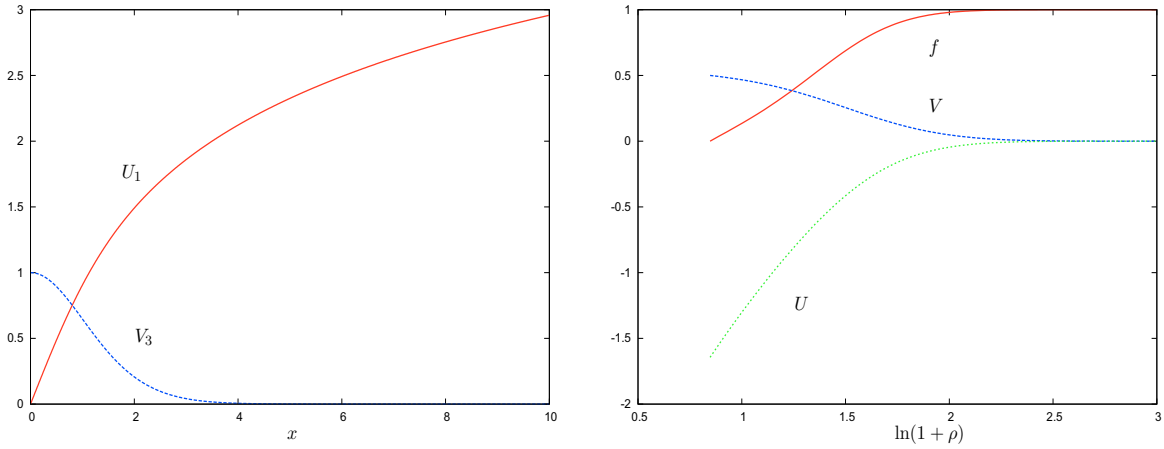


FIG. 5.14: Approximation des amplitudes dans la limite de grand courant pour le vortex élémentaire ($n = \nu = 1$) dans la région physique de l'espace des paramètres $\beta = 2$, $\sin^2\theta_{\rm W}$. À gauche : Amplitudes au coeur du vortex, À droite : Amplitudes dans la région externe.

Il n'y a pas de paradoxe avec l'observation que le courant admet une borne supérieure dans les théories où les porteurs de charge sont des scalaires. En effet lorsque les porteurs de charge ne sont pas des scalaires la situation est en général très différente [117]. En particulier pour nous, la nature non-abélienne de la théorie autorise que le courant soit non borné. Ayant décrit le coeur du vortex lorsque le courant est grand, il faut construire les solutions dans la région externe afin d'avoir une description complète.

5.3.2 La région externe

Hors de la région centrale décrite par le vortex de Yang-Mills, les amplitudes correspondant aux champs *supermassifs* ayant été éteintes, d'autres champs entrent en jeu. Une nouvelle approximation dans la région $\rho > x_0/\mathcal{I}$ est

$$v_3 = \sigma u_3 = 0\,, \qquad\qquad f_1 = f_2 \equiv f/\sqrt{2}\,, \tag{5.25}$$

et les amplitudes résiduelles sont paramétrisées par

$$U = \frac{\sigma}{2}(u+u_1)\,, \quad V = \frac{1}{2}(v+v_1), \quad U_A = \sigma(g^2u - g'^2u_1)\,, \quad V_A = g^2v - g'^2v_1\,. \tag{5.26}$$

Pour de telles amplitudes, il est possible de définir les tenseurs électromagnétique et Z (Sec. 4.2.3.1) et on note également $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Ainsi la théorie originale $\mathrm{SU}(2)_{\rm I} \times \mathrm{U}(1)_{\rm Y}$ devient une théorie possédant la symétrie $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\phi)^*\mathcal{D}^\mu\phi - \frac{\beta}{8}(|\phi|^2-1)^2\,, \tag{5.27}$$

avec la dérivée covariante de jauge $\mathcal{D}_\mu\phi = (\partial_\mu - \frac{i}{2}Z_\mu)\phi$. La théorie (5.27) décrit un modèle Higgs-abélien (2.3) auquel s'ajoute l'électrodynamique. Les potentiels des champs de jauge

sont définis tels que $gg' A_\mu \mathrm{d}x^\mu = U_A \mathrm{d}z + V_A \mathrm{d}\varphi$ et $2Z_\mu \mathrm{d}x^\mu = U\mathrm{d}z + V\mathrm{d}\varphi$. Ainsi la partie électrodynamique donne les équations de Maxwell

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho U_A'\right)' = 0\,, \qquad\qquad \rho\left(\frac{V_A'}{\rho}\right)' = 0\,, \tag{5.28}$$

dont les solutions physiquement acceptables sont

$$U_A = A + B\ln\rho\,, \qquad\qquad V_A = C\,. \tag{5.29}$$

Les équations correspondant à la partie Higgs abélien sont

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\left(\rho f'\right)' &= \left(U^2 + \frac{V^2}{\rho^2} + \frac{\beta}{4}(f^2-1)\right) f\,, \\ \rho\left(\frac{V'}{\rho}\right)' &= \frac{1}{2}\, f^2 V\,, \\ \frac{1}{\rho}\left(\rho U'\right)' &= \frac{1}{2}\, f^2 U\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Dont les équations sont une version *augmentée* des équations d'Abrikosov-Nielsen-Olesen (2.11). En effet, il y a ici une partie électrique (U) qui couple au système ANO. Les amplitudes doivent satisfaire les conditions aux bords lorsque $x_0/\mathcal{I} \leftarrow \rho \rightarrow \infty$

$$U(x_0/\mathcal{I}) \leftarrow U \rightarrow 0\,, \qquad \frac{1}{2} \leftarrow V \rightarrow 0\,, \qquad 0 \leftarrow f \rightarrow 1\,, \tag{5.31}$$

et $U(x_0/\mathcal{I}) = a(b) + b\ln(x_0/\mathcal{I})$. Les solutions typiques du système ANO augmenté sont représentées Fig. 5.14.

Jusqu'à présent, il a été possible de construire les approximations à la fois au coeur et hors du vortex. Cependant jusqu'ici les solutions étant *indépendantes*, il faut ajuster les paramètres libres afin de reconstruire des amplitudes continûment dérivables.

5.3.3 Reconstruction de la solution – Restauration de la symétrie

Afin que les amplitudes (et leurs dérivées) obtenues au coeur du vortex (5.21) (pour $\rho \leq x_0/\mathcal{I}$) et dans la région extérieure (5.25), (5.26) (pour $x_0/\mathcal{I} < \rho < \infty$) (voir Fig. 5.14), soient continues, il faut déterminer une relation entre les paramètres libres de chaque solution. Pour que u, u_1 et leurs dérivées soient continues, il faut déterminer la relation entre les fonctions au coeur du vortex $u(x_0)$, $U_1(x_0)$ et les fonctions de la région externe $U(x_0/\mathcal{I})$, $U_A(x_0/\mathcal{I})$ au point de raccordement x_0. On détermine ainsi la relation entre les paramètres numériques a, b, u_1 au coeur du vortex, A et B [93]. La condition de continuité sur v et v_1 donne quant à elle $C = g^2$. Ainsi toutes les amplitudes sont continues. Ce n'est toutefois pas le cas de toutes leurs dérivées. Par exemple

$$\lim_{\rho \to x_0^< /\mathcal{I}} f' = 0\,, \qquad\qquad \lim_{\rho \to x_0^> /\mathcal{I}} f' \neq 0\,. \tag{5.32}$$

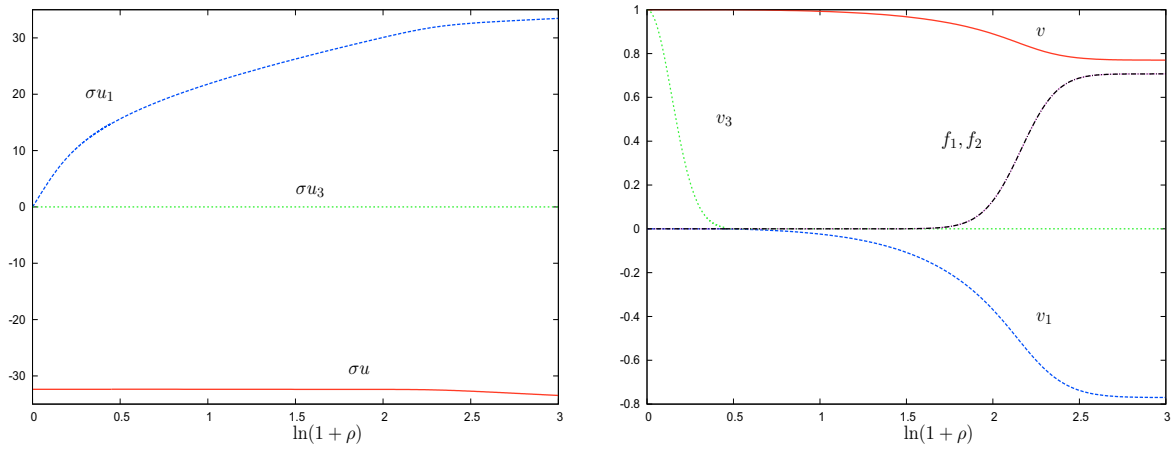


FIG. 5.15: Profil des amplitudes des solutions reconstruites décrivant le vortex fondamental $n = \nu = 1$ pour les valeurs physiques des paramètres $\beta = 2$ $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$. Ici le paramètre d'échelle $\lambda = 7.6$ et donc le courant $\mathcal{I} = 24.43$. À gauche : Amplitudes électriques À droite : Amplitudes magnétiques.

Cependant lorsque $\mathcal{I}$ augmente, la discontinuité au point de raccordement $x_0/\mathcal{I}$ est de plus en plus petite. Ainsi lorsque le courant $\mathcal{I}$ est suffisamment grand, l'approximation devient meilleure de telle sorte que dans la limite $\mathcal{I} \to \infty$ elle est exacte. On représente les amplitudes reconstruites Fig. 5.15. Elles ont très clairement la même structure que les 'vraies amplitudes' Fig. 5.13. D'après les amplitudes lorsque le courant est grand, on voit que la zone pour laquelle le champ scalaire est nul s'accroît avec le courant. Il est possible de schématiser la structure de ces régions (Fig. 5.16). La phase symétrique est une grande région de la taille $\sim \mathcal{I}$ où le champ de Higgs est nul (ou presque). Le centre de cette phase symétrique est le coeur compact de taille $\sim \mathcal{I}^{-1}$. Il s'agit d'un condensat chargé de bosons W. Ce coeur est approximativement décrit par un vortex de Yang-Mills. Bien que le champ scalaire soit dans le faux vide et donc que le mécanisme de Higgs ne puisse donner de masse aux bosons chargés, ceux-ci sont massifs par un phénomène d'écrantage. À l'extérieur du coeur, les champs hypermassifs associés au condensat sont supprimés, et il subsiste une superposition non-linéaire de champs à masse nulle. Il s'agit d'une phase *symétrique*, puisqu'à cause du très fort champ magnétique, le champ scalaire est poussé dans le faux vide et le mécanisme de Higgs ne peut encore donner de masse aux champs. Lorsqu'on s'éloigne du coeur, l'intensité du champ magnétique diminue. Quand elle est suffisamment faible, le champ scalaire transite rapidement vers son vide donnant ainsi une masse au boson neutre Z. On appelle cette zone de transition 'croûte'. Après la transition, tous les champs massifs étant confinés à l'intérieur, il ne subsiste que le champ électromagnétique de Biot et Savart. La 'croûte' dans laquelle le champ scalaire transite rapidement vers le vide, a typiquement une épaisseur $\sim 1/m_{\rm Z}$. Le schéma Fig. 5.16 rappelle le scénario de condensation de bosons chargés W autour d'un vortex supraconducteur d'Ambjorn et Olesen [83, 101, 85] évoqué succinctement Sec. 3.2.3. En effet, un champ magnétique suffisamment intense rend instable le vide de la théorie si

$$m_{\rm W}^2 < eB < m_{\rm H}^2 \,. \tag{5.33}$$

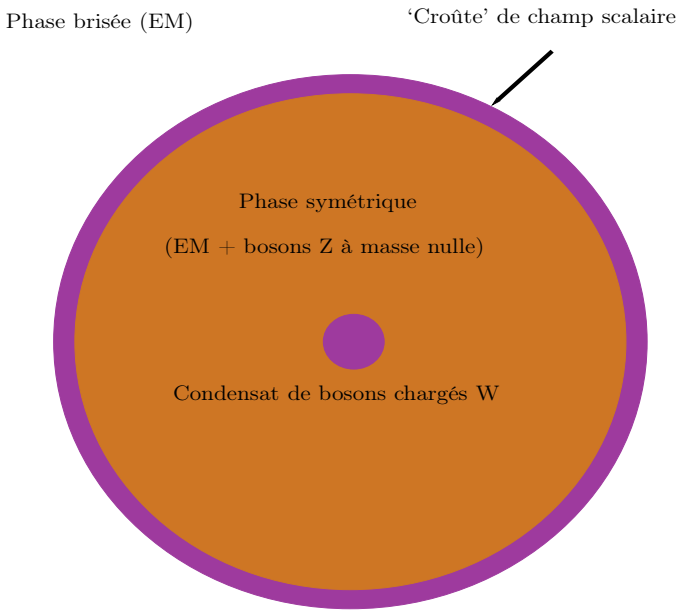


FIG. 5.16: Représentation schématique de la structure du vortex supraconducteur lorsque le courant est grand.

Cette instabilité se manifeste par la condensation de bosons chargés W. Lorsque $eB < m_{\mathrm{W}}^2$ l'état fondamental est le vide du champ de Higgs, alors que si $eB > m_{\mathrm{H}}^2$ le champ scalaire est dans le faux vide et la symétrie est restaurée. Si un vortex supraconducteur de Witten engendre un champ magnétique intense, la structure du vide de la théorie électrofaible change à son voisinage. Il doit donc exister un région entourant le vortex, telle que (5.33) soit satisfaite. Dans cette coque cylindrique le champ scalaire est non-trivial et il interpole entre le faux vide, où le champ magnétique est *sur-critique*, et le vrai vide où B est *sous-critique*. Ce scénario d'Ambjorn et Olesen [83, 101, 85] ressemble beaucoup à la figure Fig. 5.16 où la corde cosmique de Witten est alors remplacée par un vortex de Yang-Mills dont l'origine est de nature électrofaible. Contrairement au scénario d'Ambjorn et Olesen, le vortex n'agit pas comme une source externe mais bien comme une structure cohérente. L'analyse des équations dans la région externe (5.30) permet quelques estimations (ces estimations sont décrites en détail [93]). En particulier le rayon de la phase symétrique peut-être évalué quantitativement par

$$\rho_* = 0.28 \times \frac{g}{g'} \frac{\mathcal{I}}{\sqrt{\beta}} \tag{5.34}$$

où le coefficient est déterminé numériquement. La différence principale avec Ambjorn et Olesen tient dans la 'croûte'. En effet pour eux, le condensat électrofaible situé dans la croûte externe contient les champs W, Z et Higgs. Pour nous le champ W est absent de la croûte à cause de la masse effective m_σ qui accroît leur localisation dans le coeur du vortex grâce à l'interaction avec le champ de Biot et Savart. Finalement, le courant électrique est

engendré par le condensat de bosons chargés W piégés au coeur du vortex. Dans le coeur est également confiné le flux magnétique. Hors du coeur, le champ électromagnétique et Z sont à masse nulle jusqu'à la croûte située à ρ_* . Dans la croûte, le champ scalaire transite rapidement vers le vide, et le boson Z devient massif, ne laissant comme interaction à longue portée que le champ magnétique de Biot et Savart. Le courant électrique peut en général être arbitrairement grand grâce à l'invariance d'échelle de la théorie de Yang-Mills qui décrit le coeur du vortex.

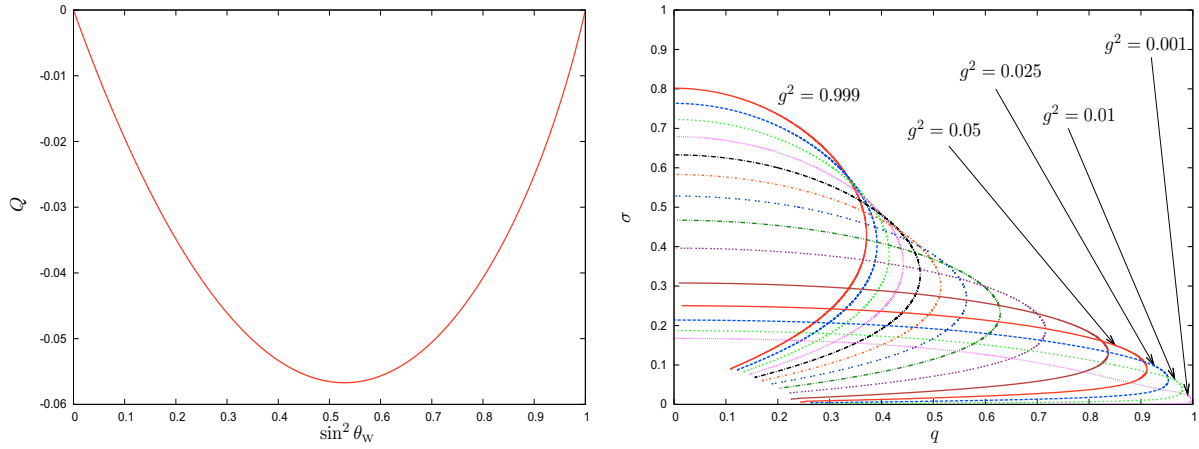


FIG. 5.17: Paramètres numériques des vortex supraconducteurs élémentaires $n = \nu = 1$ lorsque $\beta = 2$. À gauche : Influence de $\theta_{\rm W}$ sur le paramètre de charge Q pour une valeur fixée du condensat $q = 0.2$. On voit que Q disparaît dans les deux limites semilocales $\theta_{\rm W} = 0, \pi/2$ À droite : Le twist σ en fonction de q pour différentes valeurs de $\theta_{\rm W}$. Tant que $\theta_{\rm W} \neq \pi/2$ ($g^2 \neq 0$), il existe toujours une valeur maximale $q_\star$ suivie d'un rebroussement. Si $\theta_{\rm W} = \pi/2$ alors $q_\star = 1$, et il n'y a pas de rebroussement. La convergence dans la limite $\theta_{\rm W} \to \pi/2$ n'est pas uniforme.

Un bon nombre des courbes des paramètres (voir Fig. 5.3–Fig. 5.20), semblent indiquer une transition non triviale entre les deux régimes de faibles et forts courants. En particulier la courbe Fig. 5.3 représentant $\mathcal{I}(q)$ et à plus forte raison, celle représentant l'énergie magnétique en fonction du courant $E_2(\mathcal{I})$ (Fig. 5.5), indiquent que le système passe par une sorte de transition de phase pour un courant critique $\mathcal{I}_\star$. Le fait que deux branches se rejoignent en $\mathcal{I}_\star$ suggère la possibilité d'une modification des propriétés physiques. Par ailleurs, le fait que l'énergie magnétique soit minimum pour la valeur $\mathcal{I}_\star$ conforte la présomption que 'quelque chose se passe' pour cette valeur particulière du courant. Dans les chapitres qui suivront nous verrons encore d'autres arguments confortant l'idée d'une transition de phase. Cependant, il n'a pas été possible de donner des preuves formelles pour étayer une telle conjecture.

5.4 Limites spéciales de la théorie

Jusqu'à présent, les solutions porteuses de courant ayant le plus attiré l'attention sont celles qui apparaissent pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie. L'intérêt pour ce jeu de paramètres est tout naturel, puisque c'est pour ceux là qu'on pourrait espérer des conséquences observationnelles de nos travaux. Cependant le modèle étant extrêmement riche de différents secteurs, il est légitime d'étudier chacun de ce secteurs.

Nous allons donc consacrer quelques temps à l'étude des solutions supraconductrices pour des limites spéciales de la théorie de Weinberg-Salam.

5.4.1 Limite semilocale d'hypercharge ($\theta_{\rm W} = \pi/2$)

La limite semilocale d'hypercharge [3] est connue depuis longtemps pour contenir des solutions de type vortex [118, 37]. Dans cette limite semilocale où $\theta_{\rm W} = \pi/2$, les champs de Yang-Mills proportionnels à g^2 dans la dérivée covariante (3.3) découplent des autres champs et deviennent complètement libres. Cette limite du modèle standard est qualifiée de semilocale puisque la symétrie SU(2) locale de la théorie originale devient une symétrie globale de l'action tandis que U(1) reste locale. Le groupe de symétrie est alors $\mathrm{SU}(2)_{\rm g} \times \mathrm{U}(1)_{\rm l}$. Comme $g^2 = 0$ (et $g'^2 = 1$), les bosons W initialement massifs deviennent des bosons de Golstone. Les solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen peuvent être plongées dans la théorie $\mathrm{SU}(2)_{\rm g} \times \mathrm{U}(1)_{\rm l}$, comme c'est le cas pour le reste de la théorie électrofaible. Ces solutions sont couramment appelées *vortex semilocaux* en référence au groupe de symétrie de la théorie. Tout comme pour les valeurs génériques de $\theta_{\rm W}$, de telles solutions sont instables [119, 120]. Plus récemment, une famille de solutions généralisant le plongement, porteuses de courant ont été construites [121, 122]. Les résultats sur leur stabilité, abordée par nous dans [116], seront évoquée très succinctement dans la troisième partie concernant la stabilité des nouvelles solutions. Dans le système de variables adimensionnées la théorie semilocale d'hypercharge se réduit à

$$\mathcal{L}_{\rm Y} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{\beta}{8} (\Phi^\dagger \Phi - 1)^2 \tag{5.35}$$

où la dérivée covariante est à présent $D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} B_\mu\right) \Phi$. La famille de solutions de genre vortex est alors décrite par les amplitudes $u_1 = v_1 = 0$, $u_3 = 1$, $v_3 = \nu$. Afin d'avoir les conditions aux bords qui soient consistantes, les paramètres prennent les valeurs particulières $Q = \gamma = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -\nu$. Dans la jauge régulière (4.17), les champs sont

$$\mathcal{W} = (u+1)\, \sigma_\alpha \mathrm{d}x^\alpha + (2n - \nu - v)\, \mathrm{d}\varphi\,, \qquad \Phi^{-1} = (f_1 \mathrm{e}^{in\varphi}, f_2 \mathrm{e}^{i(n-\nu)\varphi + i\sigma_\alpha x^\alpha}) \tag{5.36}$$

[3] Cette limite est généralement appelée *limite semilocale*.

et les équations se réduisent ainsi à un système de quatre équations différentielles

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\rho u'\right)' &= \frac{1}{2}\left\{(u+1)\,f_1^2 + (u-1)\,f_2^2\right\}\,,\\
\rho\left(\frac{v'}{\rho}\right)' &= \frac{1}{2}\left\{(v+\nu)\,f_1^2 + (v-\nu)\,f_2^2\right\}\,,\\
\frac{1}{\rho}\left(\rho f_1'\right)' &= \left\{\frac{\sigma^2}{4}\,(u+1)^2 + \frac{1}{4\rho^2}\,(v+\nu)^2 + \frac{\beta}{4}\left(f_1^2+f_2^2-1\right)\right\} f_1\,,\\
\frac{1}{\rho}\left(\rho f_2'\right)' &= \left\{\frac{\sigma^2}{4}\,(u-1)^2 + \frac{1}{4\rho^2}\,(v-\nu)^2 + \frac{\beta}{4}\left(f_1^2+f_2^2-1\right)\right\} f_2
\end{aligned} \tag{5.37}$$

dont les amplitudes satisfont les conditions aux bords

$$\begin{aligned}
a_1 + \cdots \leftarrow u \rightarrow -1 + \frac{c_3 g'^2}{\sqrt{\rho}}\,\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{Z}}\rho} + \dots\,,\\
2n-\nu + a_4\rho^2 + \cdots \leftarrow v \rightarrow -\nu + c_4 g'^2\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{Z}}\rho} + \dots\,,\\
a_3\rho^n + \cdots \leftarrow f_1 \rightarrow 1 + \frac{c_5}{\sqrt{\rho}}\,\mathrm{e}^{-m_{\mathrm{H}}\rho} + \dots\,,\\
q\,\rho^{|n-\nu|} + \cdots \leftarrow f_2 \rightarrow \frac{c_6}{\sqrt{\rho}}\,\mathrm{e}^{-m_{\sigma}\rho} + \dots\,.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Les masses du champ vectoriel m_{Z} et du champ scalaire m_{H} restent inchangées, alors que la masse effective m_σ prend à présent la forme simple $m_\sigma = \sigma$. Ainsi les bosons de Goldstone acquièrent une masse par un mécanisme *d'écrantage* comme pour les valeurs génériques de θ_{W}. Cette famille de solutions contient les solutions sans courant telles que $q = 0$ (impliquant $f_2 = 0\,, u = -1$) qui sont ni plus ni moins les Z-strings pour la valeur spéciale de l'angle faible $\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$. Elles sont communément appelées *vortex semilocaux* [118, 37]. Lorsque $q \neq 0$ les solutions deviennent, comme dans le reste de la théorie, porteuses de courant et sont appelées *vortex semilocaux supraconducteurs* ou *vortex semilocaux twistés* [121, 122]. De telles solutions existent pour $1 \leq \nu \leq n$ et pour $\beta \geq 1$ et le paramètre $q \in [0,1)$. Le domaine d'existence peut être identifié d'après les diagrammes d'existence Fig. 5.1. Un exemple typique des solutions porteuses de courant est représenté Fig. 5.18. Lorsque la symétrie SU(2) devient globale, il faut prendre soin à la définition du courant qui est à présent une quantité globale et plus locale. Le courant global est défini à l'aide des densités de courant J^a_α (3.17). Alors que J^1_α et J^2_α disparaissent, la seule composante du courant qui persiste dans cette limite est

$$\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{SU}(2)} = \int J^3_\alpha \mathrm{d}^2x = \sigma_\alpha \pi \int \{(u+1)f_1^2 + (1-u)f_2^2\}\rho \mathrm{d}\rho\,. \tag{5.39}$$

A présent l'énergie totale (4.42) est finie, puisque tous les champs sont devenus massifs et la divergence logarithmique est absente. Une particularité de cette limite est qu'il est possible d'établir une borne inférieure non triviale à l'énergie [121, 122]

$$E \geq \pi \int_0^\infty \{v - (v+\nu)f_1^2 - (v-\nu)f_2^2\}'\mathrm{d}\rho = 2\pi n\,. \tag{5.40}$$

Ainsi dans cette limite semilocale, non seulement l'énergie est finie mais elle admet également une borne inférieure. L'énergie des vortex semilocaux supraconducteurs décroît

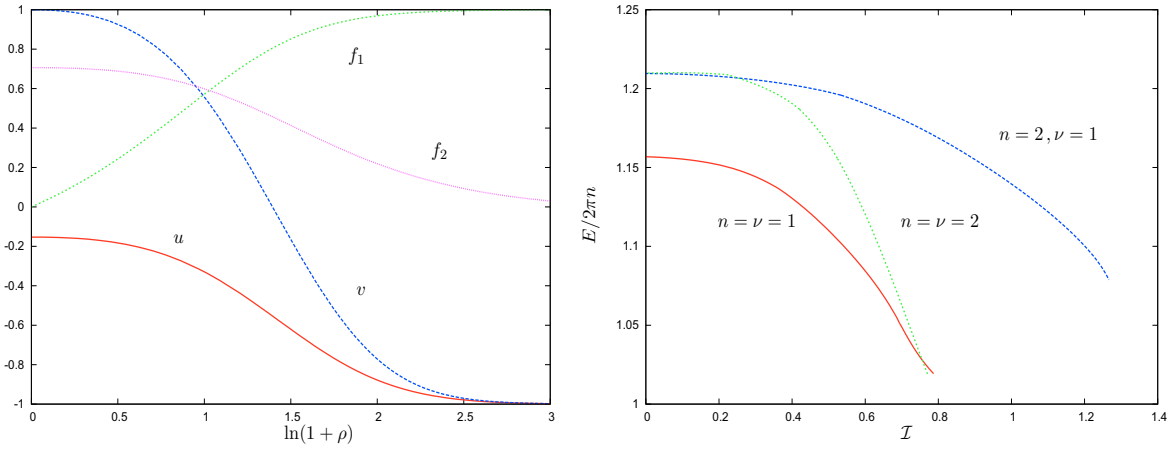


FIG. 5.18: À gauche : Amplitudes des vortex porteurs de courant dans la limite 'semilocale d'hypercharge' ($\theta_{\rm W} = \pi/2$) pour les paramètres $n = \nu = 1$ et $\beta = 2$ pour le paramètre de *twist* $\sigma = 0.1$. À droite : Énergie totale des solutions en fonction du courant du référentiel de repos pour les premières valeurs possibles des nombres d'enroulement n et ν.

lorsque le courant croît. En fait, on peut montrer que le courant décroît de façon monotone lorsque le courant croît et que la borne inférieure est atteinte lorsque $\mathcal{I} \to \infty$ [121, 122]. Comme dans la théorie où $g \neq 0$, le paramètre de twist décroît lorsque le courant croît. Toutefois il faut remarquer une différence notoire avec le modèle *complet*. En effet , si dans le modèle complet le paramètre de twist est une fonction bivaluée du paramètre de condensat q, dans la limite semilocale c'est une fonction décroissante monotone. En effet, pour le modèle complet si on trace $\sigma(q)$ (Fig. 5.17) il y a toujours un point de rebroussement, c'est-à-dire un courant critique $\mathcal{I}_\star$. Ceci amène à deux conclusions : d'une part la *transition de phase* n'a pas lieu pour des valeurs finies du courant dans la limite semilocale ($\mathcal{I}_\star = \infty$, $q_\star = 1$) et d'autre part la convergence du modèle complet vers le modèle semilocal se fait de manière non-uniforme.

Par ailleurs l'allure de l'énergie en fonction du courant Fig. 5.18, montre que lorsque le courant croît, les courbes de $n = \nu = 1$ et $n = \nu = 2$ se croisent. Cela signifie que lorsque le courant est faible, la configuration 'multivortex' ($n = 2$) n'est pas énergétiquement favorable par rapport à deux vortex séparés. Cependant lorsque le courant dépasse un courant critique la configuration multivortex devient énergétiquement favorable, c'est-à-dire que les vortex auront tendance à s'attirer. Cette propriété a d'ailleurs été évoquée pour les valeurs génériques de g. Cependant, il était difficile de donner un sens à cette observation, puisque l'énergie totale y est infinie.

5.4.2 Limite semilocale d'isospin ($\theta_{\rm W} = 0$)

Après avoir étudié la limite où les champs non-abéliens découplent, on s'intéresse au cas où ce sont les champs abéliens qui découplent. Dans cette limite semilocale d'isospin, $\theta_{\rm W} = 0$ et les champs d'hypercharge proportionnels à g'^2 dans la dérivée covariante (3.3)

découplent complètement. Cette limite du modèle standard est également une limite semi-locale puisque la symétrie U(1) locale de la théorie originale devient une symétrie globale de l'action alors que SU(2) reste locale. Le groupe des symétries est alors $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{l}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{g}}$. Historiquement le terme semilocal est plutôt réservé à la limite $\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$. Cependant on qualifiera cette limité de semilocale d'isospin, ou encore *non-abélienne*. Dans le système des variables adimensionnées la théorie se réduit à

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{\beta}{8} (\Phi^\dagger \Phi - 1)^2 \tag{5.41}$$

où la dérivée covariante est à présent $D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} \tau^a W^a_\mu\right) \Phi$. Comme $g^2 = 1$ (et $g'^2 = 0$), le spectre de masse de la théorie contient trois bosons vecteur de masse m_{Z} et un boson scalaire de masse m_{H}. Étant donné que les champs abéliens ont découplé, il faut imposer $u = a_1 = c_1$ et $v = c_2 = 2n - \nu$ et $Q = c_3 = c_4 = 0$. Ainsi les amplitudes doivent satisfaire les conditions aux bords

$$\begin{aligned}
0 \leftarrow u_1 &\rightarrow -u \sin\gamma \,, \\
1 \leftarrow u_3 &\rightarrow -u \cos\gamma \,, \\
0 \leftarrow v_1 &\rightarrow (\nu - 2n) \sin\gamma \,, \\
\nu \leftarrow v_3 &\rightarrow (\nu - 2n) \cos\gamma \,, \\
a_3 \rho^n \leftarrow f_1 &\rightarrow \cos\frac{\gamma}{2} \,, \\
q\, \rho^{|n-\nu|} \leftarrow f_2 &\rightarrow \sin\frac{\gamma}{2} \,.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

À nouveau, les solutions les plus simples sans courant correspondent à Z-string lorsque $\theta_{\mathrm{W}} = 0$. Ces solutions sont obtenues lorsque le paramètre de condensat est nul ($q = 0$). Le profil typique des amplitudes satisfaisant (3.17) soumises à (5.42) est représenté Fig. 5.19. On voit que toutes les amplitudes sont bornées asymptotiquement. Ainsi la densité linéique d'énergie est finie. D'après le diagramme des courbes chirales obtenu dans l'approximation linéaire Fig. 3.6, il est clair que dans cette limite les solutions du problème non-linéaire existent pour les paramètres $\beta > 0$ et $1 \leq \nu < 2n$. Le courant conservé lié à l'invariance globale U(1) du modèle (5.41) est

$$\mathcal{I}^{\mathrm{U}(1)}_\alpha = \int J^0_\alpha \mathrm{d}^2x = \sigma_\alpha \pi \int \{(u_3 + u) f_1^2 + 2u_1 f_1 f_2 (u - u_3) f_2^2\} \rho \mathrm{d}\rho \,. \tag{5.43}$$

Contrairement à la limite d'hypercharge où il a été possible d'établir une borne inférieure à l'énergie, il semble que cette limite de la théorie ait les mêmes propriétés que le reste du modèle. Ainsi, le paramètre de twist est une fonction bivaluée du paramètre de condensat q (Fig. 5.17). On trouve également que la densité linéique d'énergie (qui est finie) croit de façon monotone avec le courant (Fig. 5.19). Il est possible de faire la même remarque que dans la limite d'hypercharge quant aux configurations multivortex. En effet d'après Fig. 5.19, lorsque le courant est faible les configurations 'monovortex' sont énergétiquement favorisées par rapport aux 'multivortex', et donc un multivortex aurait tendance à se séparer (force de répulsion). Cependant, passé un certain courant la tendance s'inverse et les multivortex deviennent moins énergétiques que deux 'monovortex'. Ainsi la force

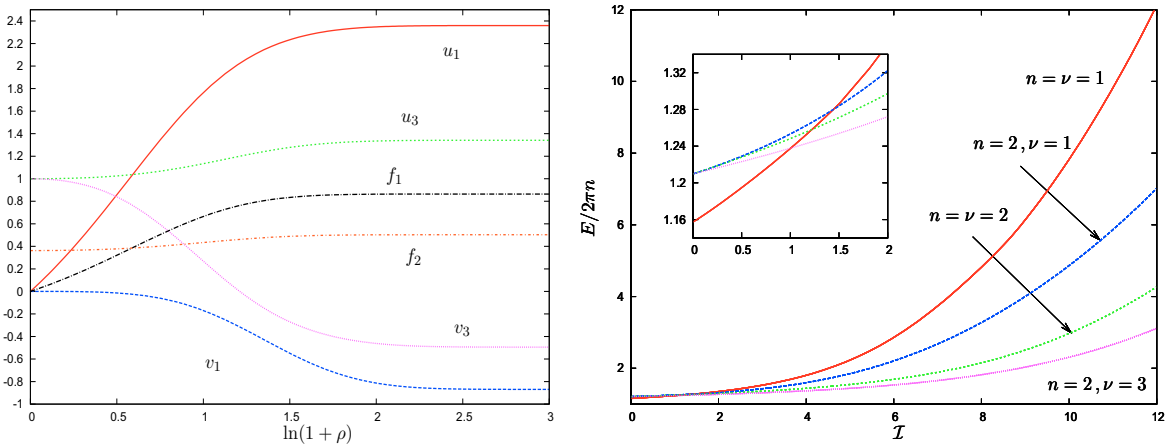


FIG. 5.19: Propriétés des solutions porteuses de courant dans la limite semilocale d'isospin ($g=1$). À gauche : Les amplitudes du vortex fondamental $n=\nu=1$, $\beta=2$ et pour la valeur du paramètre de twist $\sigma=0.5$. À droite : L'énergie totale en fonction du courant dans le système de repos. L'encart montre que l'énergie du vortex fondamental croissant plus vite que celle des 'multivortex', elles se coupent à un endroit, traduisant une force répulsive à faible courant et attractive à grand courant.

d'interaction entre vortex est d'abord répulsive, puis devient attractive lorsque le courant est suffisamment grand.

Dans les deux limites semilocales d'hypercharge ($\theta_W=\pi/2$) et d'isospin ($\theta_W=0$), des vortex porteurs de courant existent. Dans ces deux limites le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam se réduit à une théorie *semilocale* où un des groupes de symétrie devient global. Dans la limite semilocale d'isospin c'est la symétrie U(1) d'hypercharge qui devient globale ($\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}\equiv\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{l}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{g}}$), alors que dans la limite semilocale d'hypercharge c'est la symétrie SU(2) d'isospin qui devient globale ($\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}\equiv\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{g}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{l}}$). Dans les deux cas, les solutions porteuses de courant sont obtenues en restreignant les champs des vortex génériques (4.4). Cependant les solutions génériques convergent vers les solutions *semilocales* de façon non-uniforme. En effet, pour des valeurs génériques de l'angle faible θ_W les champs supportent une interaction à longue portée proportionnelle à $Q\ln\rho$ alors que pour les limites semilocales, le paramètre de charge est identiquement nul ($Q=0$). Le courant électromagnétique disparaissant dans les deux limites (Fig. 5.20), il faut déterminer une procédure permettant d'obtenir les courants *globaux* (5.39) et (5.43) à partir de la définition générale du courant électromagnétique (4.36). Il faut en fait considérer la densité radiale de courant conservé sur une nouvelle échelle : $J_\alpha/(gg')$. On trouve

ainsi les nouvelles relations

$$\frac{1}{gg'} J_\alpha = \frac{1}{gg'}\,\partial^\mu F_{\mu\alpha} \;=\; \frac{1}{g'^2}\,\partial^\mu B_{\mu\alpha} - \frac{1}{g^2}\,\partial^\mu (n^a W^a_{\mu\alpha}) = \tag{5.44a}$$

$$= J^0_\alpha - \frac{1}{g^2}\,\partial^\mu (n^a W^a_{\mu\alpha}) = \tag{5.44b}$$

$$= \frac{1}{g'^2}\,\partial^\mu B_{\mu\alpha} - n^a J^a_\alpha - \frac{1}{g^2}\,(D^\mu n^a) W^a_{\mu\alpha} \tag{5.44c}$$

où il a fallu utiliser la définition de Nambu (3.24) du champ électromagnétique, les équations d'Euler-Lagrange (3.17) ainsi que l'identité $\partial_\nu (n^a W^a_{\mu\alpha}) = (D_\nu n^a) W^a_{\mu\alpha} + n^a D_\nu W^a_{\mu\alpha}$ avec la dérivée covariante de l'isovecteur n^a définie (3.27). L'expression (5.44a) n'est autre que la densité radiale de courant utilisée tout au long de ce manuscrit. Afin de définir le courant total, il faut intégrer la densité radiale de courant sur le plan orthogonal à la feuille d'univers du vortex. Les expressions (5.44b) (5.44c) contiennent des dérivées totales dont la contribution au courant total est nulle. Ainsi (5.44b) donne la densité de courant (5.43) dans la limite $\theta_{\rm W} \to 0$ puisque W^a_μ est un champ massif. Pour la limite semilocale d'hypercharge ($\theta_{\rm W} = \pi/2$), il faut être un peu plus attentif. En effet, le terme de dérivée totale de (5.44c) disparaît puisque B_μ est massif dans cette limite. Afin de trouver exactement la même expression que (5.39) dans la limite semilocale, il est préférable d'utiliser la définition de l'isovecteur $n^a = (0,0,1)$ de la jauge unitaire [4]. La dérivée covariante devient alors $(D_\mu n^a) = \epsilon_{ab3} W^b_\mu$ qui se comportent comme g^2 lorsque g est petit. Le troisième terme ne contribue donc pas au courant et on retrouve l'expression (5.39). Au final il est possible d'exprimer le courant dans les limites semilocales d'hypercharge et d'isospin en fonction du courant électromagnétique défini pour les valeurs génériques de l'angle faible

$$\mathcal{I}^{\rm U(1)}_\alpha \leftarrow \frac{1}{gg'}\mathcal{I}_\alpha \rightarrow \mathcal{I}^{\rm SU(2)}_\alpha\,. \tag{5.45}$$

Deux limites particulières du secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam ont été étudiées. Pour chacune de ces limites la symétrie de la théorie devient *semilocale*. C'est-à-dire qu'une des symétries devient globale alors que l'autre reste locale. Pour chacune de ces deux limites il existe des solutions sans courant qui sont les Z-strings pour les valeurs particulières de l'angle faible $\theta_{\rm W}$. Les solutions porteuses de courant existent également dans ces limites. Le cas des solutions supraconductrices dans la limite semilocale d'hypercharge a déjà été étudié [121, 122], et on sait que ces solutions sont instables [116, 115]. En revanche, à notre connaissance, les solutions sont nouvelles pour la limite semilocale d'isospin.

5.4.3 Limite du Higgs infiniment massif

Dans cette limite où on considère que le champ de Higgs est infiniment massif, il faut contraindre le champ scalaire afin que le potentiel $\frac{\beta}{8}(f_1^2 + f_2^2 - 1)^2$ ne contribue pas à la densité radiale d'énergie (4.12). Ainsi

$$\Phi^\dagger \Phi = f_1^2 + f_2^2 = 1\,, \tag{5.46}$$

[4] Un tel choix est possible car l'expression du courant a la structure d'une dérivée totale (5.44). L'intégrale ne changera pas si le vecteur n^a est remplacé par un vecteur ayant le même comportement asymptotique.

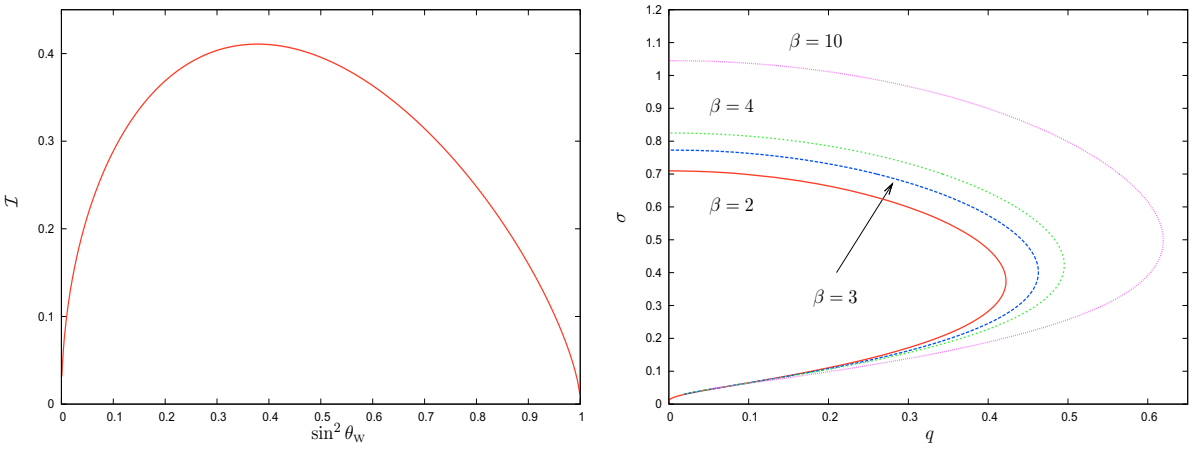


FIG. 5.20: À gauche : Dépendance du courant en fonction de l'angle faible, lorsque le paramètre du condensat est fixé : $q = 0.2$ (et $\beta = 2$). À droite : Influence de la masse du champ scalaire (β) sur la relation $\sigma(q)$ lorsque $\sin^2\theta_W = 0.23$. On voit clairement que la structure à deux branches est préservée.

peut être imposée avec la paramétrisation du champ scalaire

$$f_1 = \cos\Theta(\rho)\,, \qquad\qquad f_2 = \sin\Theta(\rho)\,. \tag{5.47}$$

Avec cette nouvelle paramétrisation, les amplitudes des champs de jauges obéissent aux équations (4.6)–(4.8) et satisfont des conditions aux bords similaires à celles obtenues pour des valeurs finies de β. La contrainte (4.9) devient

$$\sigma^2(u_1u_3' - u_3u_1') + \frac{1}{\rho^2}(v_1v_3' - v_3v_1') = g^2\Theta'\,. \tag{5.48}$$

La fonction Θ satisfait l'équation

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho\Theta'\right)' = \frac{\sigma^2 u}{2}(u_1\cos 2\Theta - u_3\sin 2\Theta) + \frac{v}{2\rho^2}(v_1\cos 2\Theta - v_3\sin 2\Theta)\,, \tag{5.49}$$

et les conditions aux bords

$$\frac{\pi}{2} + a_5\rho^n + \cdots \leftarrow \Theta \rightarrow \frac{\gamma}{2} + \frac{c_2}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\int m_\sigma \mathrm{d}\rho} + \ldots\,. \tag{5.50}$$

La condition à l'origine (5.50) implique que le paramètre de condensat $q = 1$. Les amplitudes des champs de jauge satisfont les conditions aux bords (4.21) (4.30). Cependant, il faut que $n = \nu$. En effet lorsque $n \neq \nu$ la densité d'énergie est divergente sur l'axe de symétrie (à cause du terme $(v - v_3)^2 f_2^2/\rho^2$). Par conséquent, dans le secteur $\beta \to \infty$, les solutions $n \neq \nu$ étant singulières, elles peuvent être considérées comme des excitations des solutions fondamentales $n = \nu$. Les amplitudes qui satisfont les équations du mouvement et les conditions aux bords sont représentées Fig. 5.21. Comme pour le cas générique, les courants sont grands lorsque σ est petit. De grandes valeurs de σ correspondent donc à de faibles valeurs de courant. La limite de grands courants ne peut correspondre à celle

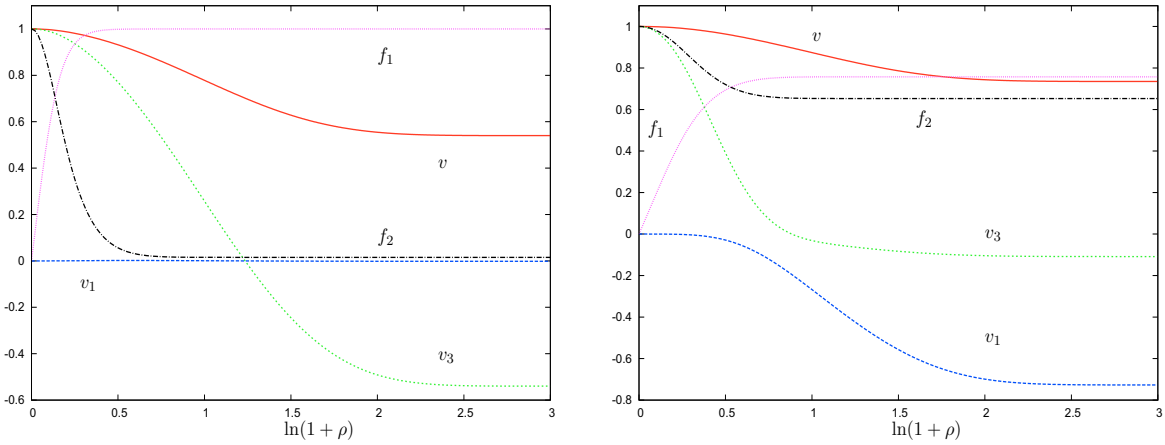


FIG. 5.21: Amplitudes magnétiques lorsque le $\beta = \infty$ du vortex supraconducteur fondamental $n = \nu = 1$ (les amplitudes électriques n'ont pas été représentées). À gauche : $\sigma = 5$ (proche de Z-string), À droite : $\sigma = 0.3$.

du cas générique, puisque la contrainte (5.46) empêche d'avoir une région où le champ de Higgs disparaît. Cependant il n'y a pas de contradiction, puisque la largeur de la région où le Higgs disparaît est donnée par $\rho_* \sim \mathcal{I}/\sqrt{\beta}$ (5.34). Une telle région disparaît si $\beta \to \infty$. Lorsqu'on tente de se rapprocher de la configuration sans courant, l'angle du vide γ tend vers zéro et le terme de masse diverge puisque $\sigma Q \sim \mathcal{I} \to 0$ et $c_1 = -1$ alors

$$m_\sigma^2 = m_{\rm W}^2 + \sigma^2 \approx \sigma^2 \,. \tag{5.51}$$

Comme la masse effective est divergente dans cette limite, la fonction Θ varie rapidement pour approcher sa valeur asymptotique ($\gamma/2 \to 0$). Ainsi, la limite sans courant devrait correspondre à $\Theta = 0$. Une telle limite où $\sigma = \infty$ s'interprète physiquement comme la solution Z-string dans la limite de London.

5.4.4 Solutions chirales

Jusqu'à présent, nous avons présenté une grande variété de nouvelles solutions. Cependant, comme il a déjà été mentionné, un phénomène physique présent pour toutes les autres solutions de type vortex supraconducteur est absent dans la théorie de Weinberg-Salam. Il s'agit du phénomène de *current quenching* évoqué dans le cadre du modèle de Witten Sec. 2.2. Il est légitime de s'interroger sur l'existence d'un tel phénomène, puisqu'il apparaît couramment en matière condensée par exemple Sec. 1.3. Bien qu'une explication sur l'absence de ce phénomène de façon générique ait été présentée Sec. 5.3, cet argument n'exclut pas l'existence *ponctuelle* d'un tel phénomène.

Rappelons que dans le modèle de Witten, les vortex porteurs de courants sont généralement construits en partant des solutions 'habillées' (des solutions chirales) qui sont des vortex ANO stabilisés par un condensat de champ scalaire en leur coeur. De telles solutions sont chirales ($\sigma^2 = 0$) telles que le paramètre de condensat q soit maximum ($q = q_\star$). Afin

de construire des solutions porteuses de courant il faut augmenter la valeur du twist σ^2, ce qui a pour effet de produire un courant. Le courant génère un champ magnétique qui a tendance à détruire le condensat scalaire et donc d'abaisser q (Fig. 2.4). Lorsque le *twist* atteint sa valeur maximale, le paramètre q s'annule et la solution se réduit à la solution d'Abrikosov-Nielsen-Olesen 'nue' plongée dans la théorie $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$.

Dans le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam, cette procédure a jusqu'à présent failli à générer de nouvelles solutions [123]. La procédure que nous avons utilisé pour construire les solutions supraconductrices est exactement l'opposé de celle couramment utilisée. En effet pour construire les vortex porteurs de courant, nous sommes partis des solutions sans courant (Z-string), puis nous avons augmenté le paramètre du condensat scalaire. Il nous a ainsi été possible de reproduire l'analyse de stabilité lorsque $q \ll 1$. Étant donné que q est bivalué pour le courant, il faut choisir un paramètre de contrôle plus adapté, en l'occurrence σ. Ainsi en abaissant le twist, il a été possible de générer les solutions supraconductrices portant un courant arbitraire. On a vu Sec. 5.3 que de façon générique le courant n'est pas borné, rendant ainsi l'existence de solutions chirales *moins probable*. Cependant, au moins au niveau linéaire, les solutions chirales existent (voir Sec. 3.2.2). En effet d'après Fig. 3.6, elles existent pour des valeurs spéciales des paramètres β, θ_{W}, n, ν. Lorsque q n'est plus petit et qu'on quitte le régime linéaire, les solutions chirales existent sous la condition (3.34) $\sigma^2(\beta, \theta_{\mathrm{W}}; n, \nu) = 0$. La condition chirale (3.34) réduit en fait le nombre de paramètres libres. Afin de réussir le 'matching', il faut relâcher la condition sur un des paramètres du modèle. Ainsi, en libérant θ_{W} et en le considérant comme une variable ajustable, on retrouve le bon nombre de paramètres à ajuster. Lorsque q est augmenté, les courbes chirales déterminées par n, ν, q dans le plan $(\beta, \sin^2\theta_{\mathrm{W}})$ ont une allure similaire aux courbes chirales de l'approximation linéaire (Fig. 3.6) mais sont décalées vers le haut. Il est ainsi possible d'obtenir des solutions chirales pour des valeurs physiques des paramètres de la théorie. En pratique il faut considérer une solution au niveau linéaire dont la courbe est sous la région physique, puis augmenter q en laissant varier θ_{W}. q est augmenté jusqu'à atteindre la région physique, ce qui donne au final une solution chirale pour les valeurs physiques des paramètres. Il faut remarquer que les valeurs des paramètres doivent être ajustées très précisément afin de déterminer la solution chirale. Ainsi les solutions chirales ne sont pas des solutions *génériques* comme dans le modèle de Witten, ce sont des solutions *exceptionnelles*. On peut clairement constater que les solutions chirales ne sont pas des transformations des Z-strings, mais sont bien physiquement différentes (voir Fig. 5.22).

Les nouvelles solutions chirales ne sont pas sans rappeler les 'vortex habillés' évoqués il y a presque 20 ans [104, 105]. Dans le modèle de Witten, les vortex sont stabilisés par le condensat et il a été conjecturé qu'il pouvait en être de même dans le modèle standard, où le condensat ne serait pas formé de scalaires, mais plutôt de bosons chargés W. Les recherches numériques de solutions 'habillées' n'ayant rien donné [123], il a été pendant quelques années admis qu'elles n'existaient pas. Au final, c'est très certainement à cause de la rareté de ces solutions qu'elles n'ont jamais été trouvées.

Nos solutions chirales ne sont cependant pas des candidats pour être ces solutions tant recherchées. D'une part les solutions qu'on appelle 'habillées' dans le modèle de Witten existent pour des valeurs génériques des paramètres de la théorie. D'autre part, elles sont moins énergétiques que les solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen plongées dans la théorie

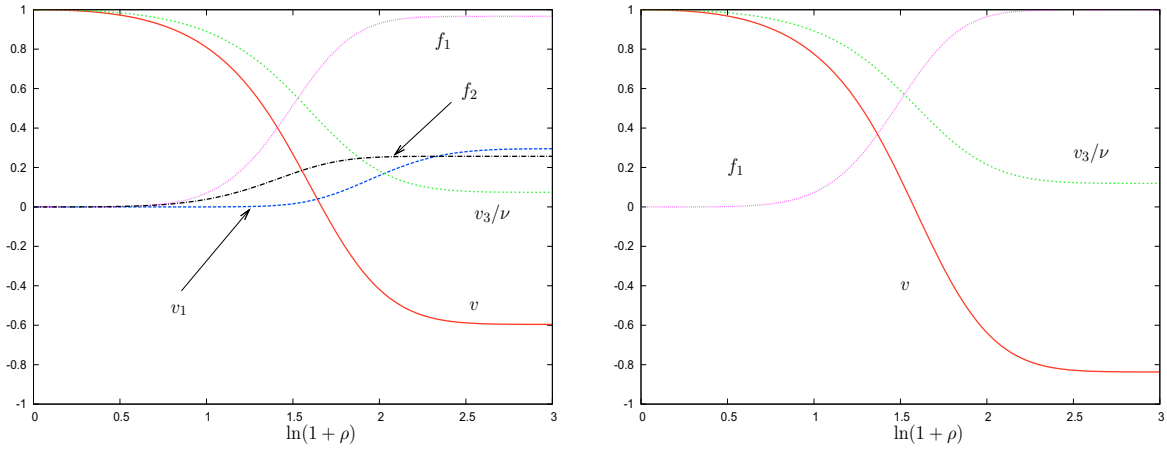


FIG. 5.22: Profils des solutions sans courant pour $n = 4$, $\nu = 7$ pour les valeurs physiques $\beta = 2$ et $\sin^2\theta_W = 0.23$. À gauche : La solution chirale exceptionnelles À droite : Z-string.

de Weinberg-Salam. Ces deux propriétés différencient les solutions 'habillées' des solutions chirales. En effet, les solutions chirales sont *exceptionnelles* (dans le sens qu'on les trouve rarement) et plus énergétiques que les solutions 'nues' (en tout cas c'est le cas pour les solution chirales existant à des valeurs physiques). Il faut à présent remarquer que lorsqu'elles existent, il est possible de relier les solutions chirales aux solutions ANO plongées par une famille de solutions supraconductrices. Ainsi, il est possible d'observer un phénomène 'd'extinction du courant' Fig. 5.23. Ce phénomène est identique à celui observé dans le modèle de Witten Fig. 2.4. À nouveau il faut souligner la différence avec le modèle $\mathrm{U}(1)_{\phi_1} \times \mathrm{U}(1)_{\phi_2}$ que la solution chirale est exceptionnelle d'une part et d'autre part qu'elle est plus énergétique.

5.5 Manifestations physiques

Dans cette partie, nous avons mis en place tout le formalisme nécessaire à la construction de vortex supraconducteurs dans le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam (3.2). La séparation de variables (4.4) décrit une configuration des champs stationnaire, à symétrie axiale, invariante sous les boost de Lorentz dans l'axe du vortex. Les champs satisfaisant les conditions aux bords (4.21) et (4.30) décrivent des vortex *supraconducteurs* dont le flux magnétique est confiné au coeur du vortex et l'énergie est infinie à cause de la divergence du potentiel Coulombien à deux dimensions d'espace. Ces nouvelles solutions généralisent tous les résultats déjà connus sur les vortex dans le secteur bosonique de la théorie électrofaible. On retrouve en particulier les solutions sans courants Z-string et W-string, et reproduit également les propriétés de stabilité déjà connues.

Des approximations et des outils semi-analytiques permettent de reproduire les résultats purement numériques obtenus dans les régimes de faible et grand courants. En particulier, les analyses dans ces limites permettent une interprétation physique de la nature de nos

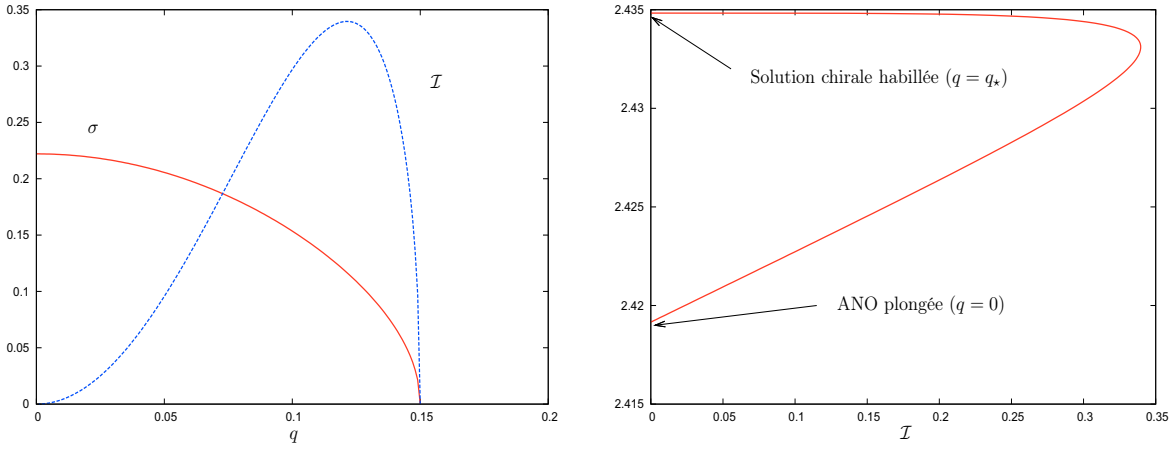


FIG. 5.23: Paramètres physiques de la famille de solutions $n = 2$ $\nu = 3$ interpolant entre une solution chirale ($\sigma = 0\,, q \neq 0$) et une solution ANO ($\sigma \neq 0\,, q = 0$), pour les paramètres $\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$. À gauche : Le courant $\mathcal{I}$ et le paramètre de twist σ. À droite : L'énergie en fonction du courant montre que la famille interpole entre deux types de solutions distinctes.

nouvelles solutions. Ainsi, on sait qu'elles sont constituées d'un coeur de boson chargés W. Le coeur peut être vu comme la superposition de deux fluides constitués de bosons W^+ et W^- voyageant en spirale dans des directions opposées. Le condensat engendre un courant électromagnétique persistant qui atteint typiquement le *milliard d'Ampères*. Si le courant est suffisamment important, il pousse le champ scalaire dans le faux vide et restaure la symétrie sur une région dont la taille est $\sim \mathcal{I}$. Loin du coeur, lorsque le champ magnétique induit par le courant devient moins important, le champ scalaire transite vers le vide et le boson Z acquiert sa masse par le mécanisme de Higgs. Il ne subsiste alors que le champ électromagnétique de Biot et Savart. Ainsi au loin le vortex est vu comme un fil électrique ordinaire dont la structure interne est d'origine électrofaible.

Mentionnons que des solutions porteuses de courant ont été récemment construite dans un théorie différente du modèle standard [124]. Il s'agit de tubes de flux non-abéliens d'un modèle possédant N_f champs scalaires dans la représentation fondamentale de $\mathrm{SU}(N_f) \times \mathrm{U}(1)$. Même lorsque $N_f = 2$, ces solutions sont différentes des nôtres. En effet, bien que les théories aient l'air similaires, le potentiel du champ de Higgs est complètement différent et donc la physique des solutions est également différente.

On peut imaginer plusieurs processus physiques menant à la création de nos nouvelles solutions. Étant donnée l'échelle d'énergie, on peut penser qu'elles puissent être formées dans des collisions à hautes énergies par exemple au LHC. Il est également possible de considérer des vortex supraconducteurs comme des *éclairs électrofaibles*. Supposons des régions de l'espace caractérisées par des polarisations opposées. Ces régions pourraient être jointes par des segments de vortex supraconducteurs afin de 'décharger' de telles régions. Contrairement aux éclairs atmosphériques qui existent pour de grands champs électriques, les vortex supraconducteurs n'ont pas besoin de champ électrique pour exister puisque la résistance est nulle.

De plus, de grands champs magnétiques similaires à ceux de nos solutions peuvent être créés dans les collisions d'ions lourds au LHC. Et mener à la formation de segments de vortex supraconducteurs. Puisqu'il s'agit de solutions non-topologiques, les vortex supraconducteurs peuvent exister en tant que segments finis dont les extrémités seraient comme une paire de monpôle–antimonopôle. On a vu que l'origine du courant est la superposition de bosons $W^{\pm}$ voyageant en spirale au coeur du vortex dans des directions opposées. Ainsi un segment de vortex verrait ses extrémités émettre des jets de bosons $W^{\pm}$. Remarquons par ailleurs que si le courant est suffisamment grand pour que l'approximation de grands courants soit valide, il devrait y avoir des effets observables supplémentaires. En effet, si $\mathcal{I}$ est suffisamment grand, alors il existe une région où le champ de Higgs est nul. À mesure que le vortex émet des jets de bosons W, le courant diminue et avec lui la région où le Higgs est nul. Le rétrécissement de cette région devrait être accompagné par l'émission de bosons de Higgs et de bosons neutres Z. Si d'aventure une collision à haute énergie entraînait la formation d'un vortex supraconducteur l'émission excessive de bosons chargés pourrait être détecté par le LHC, et serait la signature de la création d'un segment de vortex supraconducteurs. Une procédure similaire pour détecter des structure électrofaibles au LHC a été discutée [125].

Il faut tout de même souligner que de tels processus ne sont que des conjectures. En effet, toute l'analyse menée jusqu'ici est purement classique. Il est envisageable que les corrections quantiques puisse être importantes. Si jamais on voulais effectivement prédire la formations de vortex supraconducteur au LHC, il faudrait calculer toutes les corrections quantiques. Un tel calcul est hors de propos ici.

Troisième partie

Étude de stabilité des solutions

Au cours de la partie précédente, nous avons présenté de nouvelles solutions de la théorie de Weinberg-Salam. Il s'agit de vortex supraconducteurs qui généralisent les solutions précédemment connues, à savoir le plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans le secteur bosonique de la théorie électrofaible. Ces nouvelles solutions sont constituées d'un coeur où les champs hypermassifs sont confinés ; il s'agit d'un condensat de bosons chargés W générant un courant électrique qui peut être arbitrairement grand et dont l'échelle typique est le *milliard* d'Ampères. Autour de ce coeur, les champs hypermassifs sont supprimés et 'survit' une superposition non-linéaire des champs électromagnétique, Z et Higgs dans une phase symétrique. Lorsque le champ magnétique devient suffisamment faible (*i.e.* lorsqu'on s'éloigne suffisamment du coeur), la symétrie est brisée et les champs scalaire et Z acquièrent 'rapidement' une masse. Dans la région externe où tous les champs, à l'exception du photon, sont devenus massifs, ne subsiste que l'électrodynamique décrivant un champ à longue portée de Biot et Savart.

Nous avons également montré que cette généralisation supraconductrice permet de retrouver la plupart des résultats obtenus au cours des deux dernières décennies. De plus il a été montré que ces solutions existent pour 'presque toutes' les valeurs des paramètres de la théorie. En particulier, nous avons construit les solutions pour diverses limites de la théorie. En particulier, la limite semilocale d'hypercharge ($\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$) pour laquelle les solutions supraconductrices étaient déjà connues [121, 122]. Après avoir construit de nouvelles solutions, il est légitime de s'interroger sur leur stabilité. En effet puisque nous résolvons les équations du mouvement, nous trouvons un extremum de la fonctionnelle d'énergie. Afin de déterminer si la configuration est stable, il faut en étudier les deuxièmes variations.

Nous avons étudié la stabilité des vortex supraconducteurs dans la limite semilocale d'hypercharge ($\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$) [116]. Dans cette limite particulière, nous avons montré que que les vortex supraconducteurs sont instables, mais que tous les modes négatifs sont inhomogènes avec une longueur d'onde toujours plus grande qu'une certaine valeur minimale dépendant du courant. Ainsi, il est toujours possible de supprimer les modes instables en imposant des conditions aux bords périodiques, si la période est suffisamment petite. Qualitativement cette instabilité est similaire à l'instabilité de Plateau-Rayleigh en hydrodynamique (voir par exemple [126]), ou encore à l'instabilité de Gregory-Laflamme des *black strings* dans les théories de gravitation en dimensions supplémentaires (voir par exemple [127, 128, 129]). Le fait que les solutions sans courant (Z-strings) soient instables [28, 29] et que les solutions supraconductrices dans la limite semilocale d'hypercharge ($\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$) le soient également [116, 115], ne donne cependant pas de garanties quant à l'instabilité lorsque $\theta_{\mathrm{W}} < \pi/2$. Ainsi il était important pour nous de comprendre la stabilité des vortex supraconducteurs de la théorie électrofaible pour des valeurs génériques de θ_{W} [130]. Notre conclusion principale est que les vortex supraconducteurs sont instables pour des modes inhomogènes (comme le cas semilocal et les Z-strings) et peuvent ainsi être stabilisés par des conditions aux bords périodiques. Cependant, il apparaît un mode instable supplémentaire homogène qui ne peut être supprimé, puisqu'il est périodique avec n'importe quelle période.

Nous considérerons le développement systématique des perturbations autour des vortex supraconducteurs électrofaibles ainsi que la fixation de la jauge, et la réduction à un problème de Schrödinger dans le chapitre 6. Une analyse qualitative du spectre de cet opérateur sera également présentée. Dans le chapitre suivant, nous exposerons l'analyse

quantitative de l'opérateur de stabilité, pour terminer par l'interprétation physique de nos résultats. Pour un version détaillée des calculs, voir notre article [130] à l'exception de la section Sec. 7.2 sur le régime des courants faibles, qui n'a pas fait l'objet d'une publication. Il sera également fait référence aux résultats dans la limite semilocale d'hypercharge $\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$. Dont l'analyse détaillée est le sujet de notre première publication [116].

Chapitre 6

Perturbation des vortex

« *Nothing and everthing is Possimpible* »

B. Stinson

Afin de déterminer la stabilité d'un système, il faut étudier la réponse à des perturbations. Ces perturbations doivent être les plus générales possibles. Il faut ici mettre certaines choses au clair. En effet il faudrait en toute rigueur étudier la dynamique non-linéaire du système afin d'en connaître sa réponse. Résoudre le problème non-linéaire est une tache difficile et il n'est pas toujours possible de la mener à bien. Cependant il est possible de travailler dans l'approximation linéaire (où les perturbations considérées sont petites). Ainsi, les résultats que nous présenterons ne peuvent prédire la dynamique du système à long terme, mais seulement nous donner de fortes indications. Afin d'étudier la stabilité linéaire des vortex supraconducteurs du secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam, considérons donc de petites perturbations autour des champs décrivant le vortex (W_μ^a, B_μ, Φ)

$$W_\mu^a \to W_\mu^a + \delta W_\mu^a\,, \qquad B_\mu \to B_\mu + \delta B_\mu\,, \qquad \Phi \to \Phi + \delta\Phi \tag{6.1}$$

où les quantités précédées du symbole δ représentent de petites fluctuations. Les équations des perturbations obtenues en insérant les fluctuations (6.1) dans les équations d'Euler-Lagrange (3.17) puis en linéarisant par rapport aux perturbations δW_μ^a, δB_μ, $\delta\Phi$ sont

$$\begin{aligned}
&D_\mu D^\mu \delta\Phi - i\left(\delta B_\mu + \delta W_\mu^a \tau^a\right) D^\mu\Phi + \frac{\beta}{4}\left(2|\Phi|^2 - 1\right)\delta\Phi + \frac{\beta}{4}\delta\Phi^\dagger\Phi^2 \\
&\qquad = \frac{i}{2}\left(\partial_\mu \delta B^\mu + \tau^a \mathcal{D}_\mu \delta W^{a\mu}\right)\Phi\,, &(6.2a)\\
&\partial_\mu\partial^\mu \delta B^\nu + \frac{g'^2}{2}\left\{\Phi^\dagger\left(\delta B^\nu + \delta W^{a\nu}\tau^a\right)\Phi + 2i\left(\delta\Phi^\dagger D^\nu\Phi - \left(D^\nu\Phi\right)\delta\Phi\right)\right\} \\
&\qquad = \partial^\nu\left(\partial_\mu\delta B^\mu + \frac{ig'^2}{2}\left(\delta\Phi^\dagger\Phi - \Phi^\dagger\delta\Phi\right)\right)\,, &(6.2b)\\
&\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\delta W^{a\nu} + \epsilon_{abc}\delta W_\mu^b W^{c\mu\nu} \\
&\qquad + \frac{g^2}{2}\left\{\Phi^\dagger\tau^a\delta\Phi\left(\delta B^\nu + \delta W^{c\nu}\delta_c^a\right) + 2i\left(\delta\Phi^\dagger\tau^a D^\nu\Phi - \left(D^\nu\Phi\right)\tau^a\delta\Phi\right)\right\} \\
&\qquad = \mathcal{D}^\nu\left(\mathcal{D}_\mu\delta W^{a\mu} + \frac{ig^2}{2}\left(\delta\Phi^\dagger\tau^a\Phi - \Phi^\dagger\tau^a\delta\Phi\right)\right) &(6.2c)
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{D}_\mu X^a \equiv \partial_\mu X^a + \epsilon_{abc} W^b_\mu X^c$. Ces équations sont invariantes sous les transformations de jauge infinitésimales

$$\delta\Phi \to \delta\Phi + \frac{i}{2}\left(\delta\vartheta^0 + \delta\vartheta^a\tau^a\right)\Phi\,, \quad \delta B_\mu \to \delta B_\mu + \partial_\mu \delta\vartheta^0\,, \quad \delta W^a_\mu \to \delta W^a_\mu + \mathcal{D}_\mu\delta\vartheta^a \tag{6.3}$$

qui sont la version linéarisée des transformations de jauge (3.16). Afin de supprimer les modes de jauge pure, il faut imposer une condition de jauge. Il existe plusieurs façons de fixer les degrés de liberté associés à cette invariance de jauge. Il est par exemple possible d'utiliser la *jauge temporelle* en imposant que les amplitudes temporelles δW^a_0 , δB_0 soient nulles. Un tel choix permet de fixer complètement la jauge[1]. Cependant un tel choix mène à des formules très compliquées et à des singularités difficilement surmontables pour l'analyse numérique. C'est pourquoi on choisit d'utiliser la *jauge de fond*

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \delta B^\mu + \frac{ig'^2}{2}\left(\delta\Phi^\dagger\Phi - \Phi^\dagger\delta\Phi\right) = 0\,,\\
\mathcal{D}_\mu \delta W^{a\mu} + \frac{ig^2}{2}\left(\delta\Phi^\dagger\tau^a\Phi - \Phi^\dagger\tau^a\delta\Phi\right) = 0\,,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

qui permet de supprimer le côté droit des équations (6.2b), (6.2c) des fluctuations des champs vectoriels. Un tel choix de jauge ne fixe pas complètement les degrés de liberté superflus. En effet les équations des perturbations sont invariantes sous les transformations de jauge résiduelles générées par les paramètres qui satisfont

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\partial^\mu\delta\vartheta + \frac{g'^2}{2}\,\Phi^\dagger\Phi\,(\delta\vartheta^0 + n^a\delta\vartheta^a) = 0\,,\\
\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\delta\vartheta^a + \frac{g^2}{2}\,\Phi^\dagger\Phi\,(n^a\delta\vartheta^0 + \delta\vartheta^a) = 0\,,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

(n^a étant défini d'après (3.25)). En dépit de cette invariance résiduelle, c'est cette jauge qu'on choisit d'utiliser car elle permet de rendre les équations plus élégantes, et plus faciles à résoudre numériquement.

6.1 Séparation de variables

Étant donné que les champs décrivant la configuration de fond ne dépendent que de la variable radiale ρ (dans la jauge (4.4)), il faut décomposer les fluctuations en séries de Fourier par rapport aux variables x_α et φ. Comme les solutions du fond sont invariantes sous les *boosts* de Lorentz, on choisit de paramétrer la décomposition afin qu'elle reflète également cette invariance. Introduisons alors $\Xi \equiv (\omega\tilde{\Sigma}_\alpha + \kappa\Sigma_\alpha)x^\alpha + m\varphi$, qui dans le référentiel de repos se réduit à une forme plus usuelle $\omega x^0 + \kappa x^3 + m\varphi$. En utilisant la

[1] C'est le choix que nous avons utilisé lors de l'étude de la stabilité des vortex supraconducteurs dans la limite semilocale d'hypercharge [116].

notation $\delta W^0_\mu \equiv \delta B_\mu$, les perturbations génériques sont donc décomposées

$$\begin{aligned}
\delta\Phi_{\rm a} &= \sum_{\omega,\kappa,m} \{[\phi_{\rm a}(\omega,\kappa,m|\rho) + i\,\psi_{\rm a}(\omega,\kappa,m|\rho)]\cos\Xi \\
&\quad +[\pi_{\rm a}(\omega,\kappa,m|\rho) + i\,\chi_{\rm a}(\omega,\kappa,m|\rho)]\sin\Xi\} \ , \\
-\delta W^a_\mu \tilde{\Sigma}^\mu &= \sum_{\omega,\kappa,m} \{X^a_1(\omega,\kappa,m|\rho)\cos\Xi + Y^a_1(\omega,\kappa,m|\rho)\sin\Xi\} \ , \\
-\delta W^a_\mu \Sigma^\mu &= \sum_{\omega,\kappa,m} \{X^a_4(\omega,\kappa,m|\rho)\cos\Xi + Y^a_4(\omega,\kappa,m|\rho)\sin\Xi\} \ , \\
\delta W^a_k &= \sum_{\omega,\kappa,m} \{X^a_k(\omega,\kappa,m,\rho)\cos\Xi + Y^a_k(\omega,\kappa,m,\rho)\sin\Xi\} \ ,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

où les indices $\mathrm{a} = 1,2$ et $k = 1,2$ et l'exposant $a = 0,1,2,3$. Il faut également décomposer les transformations de jauge résiduelles sur la même base

$$\delta\vartheta^a = \sum_{\omega,\kappa,m} \{\alpha^a(\omega,\kappa,m|\rho)\cos\Xi + \gamma^a(\omega,\kappa,m|\rho)\sin\Xi\} \ . \tag{6.7}$$

En insérant les décompositions (6.6), (6.7) dans les équations linéarisées (6.2), les variables x_α , et φ découplent, menant à un système de 40 équations différentielles pour les 40 amplitudes radiales $\phi_{\rm a}, \ldots, Y^a_k$ pour chaque ensemble de valeurs de ω, κ, m . Comme la configuration de fond (4.4) est réelle, les parties réelles et imaginaires des perturbations sont indépendantes. Les 40 équations découplent alors en deux systèmes de 20 équations chacun. Une analyse détaillée permet de montrer que ces deux systèmes sont équivalents sous les remplacements

$$\begin{aligned}
&\pi_{\rm a} \leftrightarrow \phi_{\rm a} \, , && \psi_{\rm a} \leftrightarrow -\chi_{\rm a} \, , \\
&Y^a_k \leftrightarrow X^a_k \, , && Y^2_2 \leftrightarrow X^2_2 \, , \\
&X^a_2 \leftrightarrow -Y^a_2 \, , && X^2_k \leftrightarrow -Y^2_k \, .
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Comme les deux systèmes de 20 équations sont complètement équivalents, il n'est pas nécessaire de les étudier tous les deux. On choisit de se restreindre au système contenant les amplitudes à droite dans les formules de 'remplacement' (6.8), c'est-à-dire la partie réelle . Les 20 équations choisies sont bien trop longues pour être écrites ici. De plus elles ne sont pas d'un grand intérêt et on préfère écrire seulement la version 'finale' qui est utilisée pour l'étude de la stabilité proprement dite. Toutes les équations ne sont pas indépendantes. Il est en effet possible d'établir des identités (quatre) reliant les équations entre elles. Les transformations de jauge résiduelles (6.3) avec la séparation (6.6) (6.7),

laissent les équations invariantes sous les transformations

$$
\begin{aligned}
&X_1^0 \to X_1^0 - \omega\ \gamma^0\,, && X_1^1 \to X_1^1 - \omega\ \gamma^1\,,\\
&Y_2^0 \to Y_2^0 + \ (\gamma^0)'\,, && Y_2^1 \to Y_2^1 + \ (\gamma^1)'\,,\\
&X_3^0 \to X_3^0 + m\ \gamma^0\,, && X_3^1 \to X_3^1 + m\ \gamma^1 + v_3\alpha^2\,,\\
&X_4^0 \to X_4^0 + \kappa\ \gamma^0\,, && X_4^1 \to X_4^1 + \kappa\ \gamma^1 - \sigma u_3\alpha^2\,,\\
&Y_1^2 \to Y_1^2 + \omega\ \alpha^2\,, && X_1^3 \to X_1^3 - \omega\ \gamma^3\,,\\
&X_2^2 \to X_2^2 + \ (\alpha^2)'\,, && Y_2^3 \to Y_2^3 + \ (\gamma^3)'\,,\\
&Y_3^2 \to Y_3^2 - m\ \alpha^2 + (v_1\gamma^3 - v_3\gamma^1)\,, && X_3^3 \to X_3^3 + m\ \gamma^3 - v_1\alpha^2\,,\\
&Y_4^2 \to Y_4^2 - \kappa\ \alpha^2 + \sigma(u_3\gamma^1 - u_1\gamma^3)\,, && X_4^3 \to X_4^3 + \kappa\ \gamma^3 + \sigma u_1\alpha^2\,,\\
&\phi_1 \to \phi_1 + \frac{\alpha^2 f_2}{2}\,, && \chi_1 \to \chi_1 + \frac{(\gamma^0+\gamma^3)f_1 + \gamma^1 f_2}{2}\,,\\
&\phi_2 \to \phi_2 - \frac{\alpha^2 f_1}{2}\,, && \chi_2 \to \chi_2 + \frac{\gamma^1 f_1 + (\gamma^0-\gamma^3)f_2}{2}\,,
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

où à nouveau le symbole $'$ représente la différentiation par rapport à la variable radiale ρ.

6.2 Fixation de la jauge et modes physiques

Les termes à droite dans les équations (6.9) sont des modes de jauge pure. C'est-à-dire que les équations des perturbations sont satisfaites pour toute fonction $\gamma^0 \equiv \gamma^0(\omega,\kappa,m|\rho)$, γ^1 ,α^2 ,γ^3. Afin d'éliminer ces solutions non physiques, il faut imposer une condition de jauge. On utilise la *jauge de fond* qui laisse certains modes non physiques mais qui simplifie l'analyse des équations. Il faut de plus remarquer qu'un tel choix de jauge a été plusieurs fois utilisé pour étudier la stabilité des vortex [58, 28]. Lorsque les variables sont séparées en utilisant (6.6), la condition de jauge (6.4) se réduit à 4 contraintes du premier ordre

$$
\begin{aligned}
&\omega X_1^0 - \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) Y_2^0 + \frac{m}{\rho^2} X_3^0 + \kappa X_4^0 + g'^2\,(f_1\chi_1 + f_2\chi_2) = 0\,,\\
&\omega X_1^1 - \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) Y_2^1 + \frac{m}{\rho^2} X_3^1 + \kappa X_4^1 + g^2\,(f_2\chi_1 + f_1\chi_2) + \sigma u_3 Y_4^2 - \frac{v_3}{\rho^2} Y_3^2 = 0\,,\\
&-\omega Y_1^2 - \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) X_2^2 - \frac{m}{\rho^2} Y_3^2 - \kappa Y_4^2 + g^2\,(f_2\phi_1 - f_1\phi_2)\\
&\quad + \sigma\left(u_1 X_4^3 - u_3 X_4^1\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(v_3 X_3^1 - v_1 X_3^3\right) = 0\,,\\
&\omega X_1^3 - \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) Y_2^3 + \frac{m}{\rho^2} X_3^3 + \kappa X_4^3 + g^2\,(f_1\chi_1 - f_2\chi_2) - \sigma u_1 Y_4^2 + \frac{v_1}{\rho^2} Y_3^2 = 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

En imposant ces contraintes, l'analyse du système de 20 équations révèle qu'elles se séparent en deux sous-systèmes indépendants de $4+16$ équations. Ce sont les 4 amplitudes proportionnelles à ω dans (6.10) qui découplent complètement. On appelle ces amplitudes

'temporelles', puisque dans le référentiel de repos ($b = 0$) elles coïncident avec les amplitudes temporelles. Ces amplitudes satisfont le système des 4 équations 'temporelles'

$$\begin{pmatrix} D_1 & S & 0 & T \\ S & D_2 & U & W \\ 0 & U & D_3 & V \\ T & W & V & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0/g' \\ X_1^1/g \\ Y_1^2/g \\ X_1^3/g \end{pmatrix} = 0\,, \tag{6.11}$$

où les opérateurs différentiels diagonaux sont

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho) + \frac{m^2}{\rho^2} + \kappa^2 - \omega^2 + \frac{g'^2}{2}\left(f_1^2 + f_2^2\right)\,, \\ D_2 &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho) + \frac{m^2 + v_3^2}{\rho^2}\sigma^2 u_3^2 + \kappa^2 - \omega^2 + \frac{g^2}{2}\left(f_1^2 + f_2^2\right)\,, \\ D_3 &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho) + \frac{m^2 + v_1^2 + v_3^2}{\rho^2}\sigma^2(u_1^2 + u_3^2) + \kappa^2 - \omega^2 + \frac{g^2}{2}\left(f_1^2 + f_2^2\right)\,, \\ D_4 &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho) + \frac{m^2 + v_1^2}{\rho^2}\sigma^2 u_1^2 + \kappa^2 - \omega^2 + \frac{g^2}{2}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \end{aligned} \tag{6.12}$$

et les termes hors diagonaux

$$\begin{aligned} &S = gg' f_1 f_2\,, && T = gg'(f_1^2 - f_2^2)\,, \\ &U = -2\left(\frac{mv_3}{\rho^2} + \kappa\sigma u_3\right)\,, && V = -2\left(\frac{mv_1}{\rho^2} - \kappa\sigma u_1\right)\,, \quad W = -\left(\frac{v_1 v_3}{\rho^2} + \sigma^2 u_1 u_3\right)\,. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Les 16 équations restantes seront plus tard réduites à un problème de Schrödinger. Avant cela, il faut vérifier qu'il ne reste pas de modes de jauge pure dans les équations. On peut s'en convaincre facilement, car si les contraintes (6.10) sont satisfaites par les amplitudes temporelles, alors les équations (6.11) sont automatiquement satisfaites tant que le système de 16 équations (6.17) l'est aussi. Alors chaque solution du problème 16×16 engendre une solution des équations temporelles. Notons par ailleurs que le système temporel coïncide exactement avec les modes de jauge pure (on les appelle aussi *ghosts* ou *fantômes*). En effet, la décomposition (6.7) dans les équations (6.5) donne 4 équations radiales coïncidant avec les équations temporelles (6.11), d'après le remplacement

$$X_1^0 \leftrightarrow \gamma^0\,, \qquad X_1^1 \leftrightarrow \gamma^1\,, \qquad Y_1^2 \leftrightarrow -\alpha^2\,, \qquad X_1^3 \leftrightarrow \gamma^3\,. \tag{6.14}$$

Étant donné cette coïncidence des deux systèmes, les amplitudes temporelles sont alors des modes de jauge pure. Ainsi, les composantes temporelles ne peuvent être reconstruites d'après la contrainte (6.10) que si l'opérateur de Schrödinger contient des modes de jauge pure. Alors, la seule solution pour n'avoir que des modes physiques dans l'opérateur de Schrödinger, est que les amplitudes temporelles reconstruites soient triviales. Il est ainsi facile de reconnaître des solutions non-physiques du problème (6.17) : *si une solution satisfait la contrainte* (6.10) *avec des amplitudes temporelles nulles, alors elle est non-triviale, sinon elle est de jauge pure.* À chaque fois que nous avons construit une solution du système (6.17), nous avons vérifié ce critère. Les modes sont tous physiques, puisqu'on trouve $X_1^0 = X_1^1 = Y_1^2 = X_1^3 = 0$. En toute rigueur puisque les amplitudes temporelles sont nulles,

il est possible d'utiliser (6.10) comme contrainte algébrique pour supprimer 4 amplitudes et se restreindre à un système de 12 équations indépendantes. Alors le système coïncide avec la jauge temporelle. Pour les raisons évoquées plus haut, la jauge temporelle est trop compliquée et on considère alors le système de 16 équations.

6.3 Réduction au problème de Schrödinger

Lorsque la condition de jauge (6.10) est imposée, les 4 amplitudes des *ghosts* découplent alors que les 16 équations restantes contenant l'information physique probante peuvent être réécrites sous la forme d'un problème de Schrödinger. Afin que le système *physique* en ait explicitement la structure, il faut introduire de nouvelles amplitudes

$$
\begin{aligned}
Y_2^0 &= \frac{g'}{\sqrt{2}}\left(\frac{g'}{g}\left(\mathcal{Z}_+ + \mathcal{Z}_-\right) + \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-\right) , & Y_2^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g\left(\mathcal{Z}_+ + \mathcal{Z}_-\right) - g'\left(\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-\right)\right) ,\\
X_3^0 &= g'\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{g'}{g}\left(\mathcal{Z}_+ - \mathcal{Z}_-\right) + \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-\right) , & X_3^3 &= \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(g\left(\mathcal{Z}_+ - \mathcal{Z}_-\right) - g'\left(\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-\right)\right) ,\\
X_4^0 &= g'\left(\frac{g'}{g}\mathcal{Z}_0 + \mathcal{A}_0\right) , & X_4^3 &= \left(g\mathcal{Z}_0 - g'\mathcal{A}_0\right) ,\\
Y_2^1 &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{W}_+^+ + \mathcal{W}_-^+ + \mathcal{W}_+^- + \mathcal{W}_-^-\right) , & X_2^2 &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{W}_+^+ + \mathcal{W}_-^+ - \mathcal{W}_+^- - \mathcal{W}_-^-\right) ,\\
X_3^1 &= \frac{\rho}{2}\left(\mathcal{W}_+^+ - \mathcal{W}_-^+ + \mathcal{W}_+^- - \mathcal{W}_-^-\right) , & Y_3^2 &= \frac{\rho}{2}\left(-\mathcal{W}_+^+ + \mathcal{W}_-^+ + \mathcal{W}_+^- - \mathcal{W}_-^-\right) ,\\
X_4^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{W}_0^- + \mathcal{W}_0^+\right) , & Y_4^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{W}_0^- - \mathcal{W}_0^+\right) ,\\
\phi_1 &= \frac{1}{2g}\left(h_1^- - h_1^+\right) , & \chi_1 &= \frac{1}{2g}\left(h_1^- + h_1^+\right) ,\\
\phi_2 &= \frac{1}{2g}\left(h_2^- - h_2^+\right) , & \chi_2 &= \frac{1}{2g}\left(h_2^- + h_2^+\right) .
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

La terminologie utilisée pour les nouvelles amplitudes $\mathcal{A}$, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{W}^\pm$ reflète le fait qu'elles correspondent dans le vide (3.19) respectivement aux excitations du photon et des bosons Z et W. Les indices (0, $+$ et $-$) font référence à la polarisation de ces excitations. En introduisant le vecteur à 16 composantes

$$
\Psi^{-1} = \left(\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_+, \mathcal{Z}_-, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-, \mathcal{W}_0^+, \mathcal{W}_+^+, \mathcal{W}_-^+, \mathcal{W}_0^-, \mathcal{W}_+^-, \mathcal{W}_-^-, h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^-\right) , \tag{6.16}
$$

les équations prennent la forme bien connue

$$
\frac{1}{\rho}\left(\rho\Psi'\right)' - \mathcal{U}(\kappa, m|\rho)\Psi = \Lambda\Psi . \tag{6.17}
$$

Ici le potentiel $\mathcal{U}$ est une matrice symétrique 16×16 dépendant des amplitudes des champs de fond. $\Lambda = -\omega^2$ est la valeur propre du problème de Schrödinger. La forme explicite de cette matrice potentielle est reportée à une discussion ultérieure en appendice App. C.1. Il faut remarquer que le problème de Schrödinger possède une symétrie discrète. Les équations

sont en effet invariantes sous $\omega \to -\omega$, $\kappa \to -\kappa$ et $m \to -m$ tant que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0(\omega,\kappa,m|\rho) &\to -\mathcal{Z}_0(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,, & \mathcal{Z}_\pm(\omega,\kappa,m|\rho) &\to \mathcal{Z}_\mp(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,,\\
\mathcal{A}_0(\omega,\kappa,m|\rho) &\to -\mathcal{A}_0(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,, & \mathcal{A}_\pm(\omega,\kappa,m|\rho) &\to \mathcal{A}_\mp(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,,\\
\mathcal{W}_0^\pm(\omega,\kappa,m|\rho) &\to -\mathcal{W}_0^\mp(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,, & \mathcal{W}_\pm^\pm(\omega,\kappa,m|\rho) &\to \mathcal{W}_\mp^\mp(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,,\\
h_{\rm a}^\pm(\omega,\kappa,m|\rho) &\to h_{\rm a}^\pm(-\omega,-\kappa,-m|\rho)\,. & &
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer le problème pour toutes les valeurs des paramètres, mais seulement

$$\kappa \in \mathbb{R} \quad \text{si } m = 1,2,\ldots \quad \text{et} \quad \kappa \in \mathbb{R}^+ \quad \text{si } m = 0\,. \tag{6.19}$$

6.3.1 Conditions aux bords

Afin de construire numériquement les solutions du système d'équations (6.17), il faut connaître le comportement local de chacune des amplitudes aux points singuliers $\rho = 0$ et $\rho = \infty$. Le comportement local des amplitudes du fond y est déjà connu, d'après (4.21), (4.30). Ainsi les solutions de l'opérateur des perturbations sont construites en séries de puissances de ρ au voisinage de l'axe de symétrie. Pour chacune des 16 amplitudes, il existe deux solutions lorsque $\rho \to 0$. À chaque fois une des solutions locale est divergente. Le comportement dominant des solutions finies est alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_\eta &= c_\eta^Z \rho^{|m-\eta|} + \ldots\,, & \mathcal{A}_\eta &= c_\eta^A \rho^{|m-\eta|} + \ldots\,, & \mathcal{W}_\eta^\pm &= c_\eta^{W^\pm} \rho^{|\nu\pm(m-\eta)|} + \ldots\,,\\
h_1^\pm &= c_\eta^{h_1^\pm} \rho^{|n\mp m|} + \ldots\,, & h_2^\pm &= c_\eta^{h_2^\pm} \rho^{|n-\nu\mp m|} + \ldots\,, & &
\end{aligned} \tag{6.20}$$

où c_η^Z, c_η^A, $c_\eta^{W^\pm}$, $c_\eta^{h_a^\pm}$ sont 16 constantes d'intégration. $\eta = 0, \pm$ donne les différents degrés de polarisation. La condition à l'origine (6.20) décrit des solutions régulières sur l'axe de symétrie. De plus, nous sommes concernés par des solutions de type *état lié*. C'est-à-dire qu'on exige que $\Psi \to 0$ lorsque $\rho \to \infty$. Afin de déterminer l'allure des amplitudes pour de grandes valeurs de ρ, il est possible de se placer temporairement dans la jauge où $f_2(\infty) = 0$ en utilisant la propriété de symétrie sous les rotations globales (4.5) avec $\Gamma = -\gamma$ correspondant aux transformations de jauge (3.16) générées par $\mathrm{U} = \exp\{\frac{i}{2}\gamma\}$. Dans cette jauge, les amplitudes adoptent le comportement asymptotique

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_\eta &= \frac{b_\eta^Z}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\mu_Z \rho} + \ldots\,, & \mathcal{A}_\eta &= \frac{b_\eta^A}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\mu_A \rho} + \ldots\,, & h_1^+ + h_1^- &= \frac{b_+^{h_1}}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\mu_Z \rho} + \ldots\,,\\
\mathcal{W}_\eta^\pm &= \frac{b_\eta^{W^\pm}}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\int \mu_{W_\pm} \mathrm{d}\rho} + \ldots\,, & h_2^\pm &= \frac{b_\pm^{h_2}}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\int \mu_{W_\pm} \mathrm{d}\rho} + \ldots\,, & h_1^+ - h_1^- &= \frac{b_-^{h_1}}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\mu_H \rho} + \ldots\,,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

où les 'masses effectives' (réelles) sont

$$\mu_A^2 = \kappa^2 - \omega^2\,, \quad \mu_Z^2 = \mu_A^2 + m_{\rm Z}^2\,, \quad \mu_H^2 = \mu_A^2 + m_{\rm H}^2\,, \quad \mu_{W_\pm}^2(\rho) = (\sigma u(\rho) \pm \kappa)^2 - \omega^2 + m_{\rm W}^2\,. \tag{6.22}$$

A nouveau b_η^Z , b_η^A , $b_\eta^{W^\pm}$, $b_\eta^{h_a}$ sont 16 constantes d'intégration, et les points de suspension désignent les termes sous-dominants. Il faut ensuite 'revenir' dans la bonne jauge en appliquant la rotation globale inverse $\mathrm{U} = \exp\{-\frac{i}{2}\gamma\}$. Ainsi les amplitudes du fond sont dans la jauge où $f_2(\infty) = \sin\frac{\gamma}{2}$ et les perturbations (6.21) se transforment alors comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_\eta &\to \left(g'^2 + g^2\cos\gamma\right)\mathcal{Z}_\eta + 2gg'\sin^2\frac{\gamma}{2}\mathcal{A}_\eta - \frac{g}{\sqrt{2}}\mathcal{W}_\eta^+\sin\gamma - \frac{g}{\sqrt{2}}\mathcal{W}_\eta^-\sin\gamma\,,\\
\mathcal{A}_\eta &\to \left(g^2 + g'^2\cos\gamma\right)\mathcal{A}_\eta + 2gg'\sin^2\frac{\gamma}{2}\mathcal{Z}_\eta + \frac{g'}{\sqrt{2}}\mathcal{W}_\eta^+\sin\gamma + \frac{g'}{\sqrt{2}}\mathcal{W}_\eta^-\sin\gamma\,,\\
\mathcal{W}_\eta^+ &\to \mathcal{W}_\eta^+\cos^2\frac{\gamma}{2} - \mathcal{W}_\eta^-\sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{g}{\sqrt{2}}\mathcal{Z}_\eta\sin\gamma - \frac{g'}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_\eta\sin\gamma\,,\\
\mathcal{W}_\eta^- &\to \mathcal{W}_\eta^-\cos^2\frac{\gamma}{2} - \mathcal{W}_\eta^+\sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{g}{\sqrt{2}}\mathcal{Z}_\eta\sin\gamma - \frac{g'}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_\eta\sin\gamma\,,\\
h_1^\pm &\to h_1^\pm\cos\frac{\gamma}{2} - h_2^\pm\sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{et} \quad h_2^\pm \to h_2^\pm\cos\frac{\gamma}{2} + h_1^\pm\sin\frac{\gamma}{2}\,.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

La connaissance des comportements au voisinage des points singuliers est essentielle pour construire numériquement les solutions globales des équations (6.17).

En résumé, toute l'information physiquement probante, sur la stabilité des vortex supraconducteurs de la théorie de Weinberg-Salam, est encodée dans le problème de Schrödinger à 16 canaux (6.17) dont les amplitudes respectent les conditions aux bords (6.20), (6.21), (6.23). Grâce à la décomposition des amplitudes, le problème est manifestement invariant sous les boosts de Lorentz.

6.4 Analyse qualitative de l'opérateur des perturbations – Critère de Jacobi

L'étude des petites fluctuations autour des vortex supraconducteurs du secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam, se ramène donc à l'étude du spectre d'un opérateur de Schrödinger (6.17). Si la valeur propre $\Lambda = -\omega^2$ est négative (ω réelle), les perturbations sont *stables*. Dans le cas contraire, alors $\omega^2 < 0$ et le vortex est instable.

Les perturbations existent à priori pour n'importe quelles valeurs des paramètres de la théorie. Ainsi en toute rigueur, il faudrait non seulement étudier l'influence des paramètres du fond (n , ν , β , θ_{W} , σ), mais également les paramètres propres des perturbations (m , κ) pour chacun des différents fonds possibles. L'étude approfondie de l'opérateur des perturbations pour tous ces paramètres est une tache difficile dans des limites de temps raisonnables. Heureusement des méthodes mathématiques peuvent être mises en oeuvre afin de nous simplifier la tache. En effet, il est possible de décrire *qualitativement* la nature du spectre d'un opérateur de type Schrödinger grâce au critère de Jacobi [131, 132]. Ce critère de Jacobi a déjà été appliqué pour l'étude de la stabilité de solitons en théorie des champs (les monopôles magnétiques) [133, 134] et par nous dans la limite semilocale [116]. Pour décrire simplement cette méthode, on peut dire qu'elle se base sur le fait que contrairement aux états excités, la fonction d'onde de l'état fondamental n'oscille pas. Ainsi, si la

solution d'énergie nulle (en réalité de valeur propre nulle) oscille, alors l'état fondamental possède une énergie (valeur propre) négative.

Lorsque ce raisonnement est appliqué au type de problème considéré ici, le critère de Jacobi permet de connaître qualitativement la nature du spectre. Dans notre cas, il est possible d'appliquer la recette suivante. Soient $\Psi_s(\rho)$ où $s = 1, \ldots, 16$ les solutions, régulières à l'origine, linéairement indépendantes du problème (6.17). Chacune de ces solutions est un vecteur à 16 composantes $\Psi_s(\rho) \equiv \Psi_s^I(\rho)$, $I = 1, \ldots, 16$. Si le déterminant $\Delta(\rho)$ de la matrice (16×16) des $\Psi_s^I(\rho)$ s'annule en un point de la demi-droite infinie $\rho = [0, \infty)$, alors le spectre n'est pas défini positif. De plus d'après [132], le nombre de zéros de $\Delta(\rho)$ est égal au nombre d'instabilités (et donc au nombre de valeurs propres négatives du problème de Schrödinger).

Le critère de Jacobi convertit le fastidieux problème avec conditions aux bords en un problème aux valeurs initiales et diminue ainsi le temps de calcul. Puisque le critère de Jacobi est nettement moins chronophage, que la résolution directe du problème, il est possible d'explorer plus largement l'espace des paramètres. Ainsi la démarche que nous adoptons consiste à utiliser d'abord le critère de Jacobi pour identifier les secteurs où des instabilités se manifestent. Si de tels secteurs existent, on construit explicitement les solutions en résolvant le problème avec les conditions aux bords. Malgré l'avantage du critère de Jacobi quant au temps de calcul, l'analyse est tout de même très longue. C'est pourquoi on ne considère pas toutes les solutions étudiées dans la partie précédente, préférant se focaliser principalement sur les valeurs expérimentales des paramètres de la théorie électrofaible ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$).

6.4.1 Z-strings

Avant de considérer le cas des solutions supraconductrices, nous allons appliquer notre recette dans le cas des Z-strings. Bien que le résultat soit déjà connu (Sec. 3.2.2), nous verrons ici d'une part comment s'interprète le critère de Jacobi pour un cas simple, et d'autre part on présentera des premiers résultats utiles pour l'analyse du régime des faibles courants. Lorsque les champs de fond décrivent une solution sans courant, l'opérateur se simplifie considérablement. Lorsqu'on applique le critère de Jacobi pour la solution élémentaire ($n = \nu = 1$), on voit qu'il n'existe *qu'un seul* secteur pour lequel les solutions sont instables (Fig. 6.1). Le secteur en question est celui où les perturbations ont la symétrie axiale ($m = 0$). C'est dans ce secteur que réside l'instabilité du plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans le modèle standard. Il faut remarquer que lorsque le courant est nul, l'opérateur (6.17) devient diagonal par bloc. Il est facile de montrer qu'une grande partie de ces blocs n'admet pas de solution de type état lié. Au final, il y a deux opérateurs identiques donnant l'instabilité du plongement [28, 29] auxquels s'ajoute un deuxième opérateur décrivant la stabilité des solutions ANO du modèle Higgs abélien[58]. L'espace des solutions est donc sous tendu par le produit direct des solutions de chaque opérateur. On voit Fig. 6.1 que l'instabilité ne se manifeste que pour un intervalle fini de valeurs de $0 < |\kappa| \leq \kappa_{\rm max}(\mathcal{I} = 0) = 2\sigma(\mathcal{I} = 0)$. Il est connu que l'opérateur des perturbations des solutions ANO dans U(1) est stable lorsque $n = 1$ (Sec. 2.1.3). L'instabilité intervient dans les secteurs $m \geq 2$ des solutions multivortex (si $\beta > 1$). Il faut donc s'attendre à pouvoir retrouver ce type d'instabilités, pour les vortex supraconducteurs.

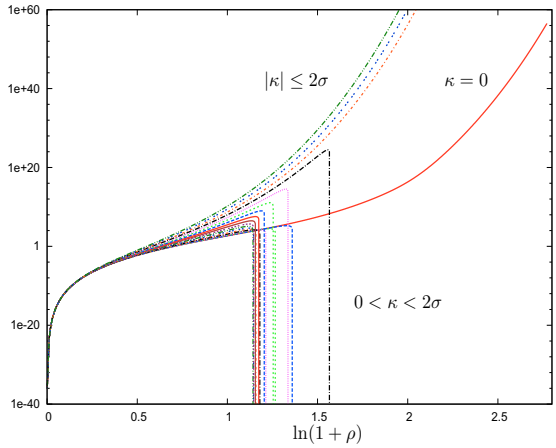


FIG. 6.1: Déterminant de Jacobi de la perturbation axisymétrique ($m = 0$) de la solution fondamentale ($n = 1$, $\nu = 1$) sans courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$).

6.4.2 Vortex supraconducteur élémentaire ($n = 1$)

Ayant succinctement rappelé le cas des Z-strings, nous appliquons à présent le critère de Jacobi pour les solutions supraconductrices. On commence donc par considérer les solutions qui ont le plus bas nombre d'enroulement n et ν puisque, dans le cas sans courant, ce sont elles qui ont le moins d'instabilité.

6.4.2.1 Le secteur axisymétrique ($m = 0$)

On considère en premier lieu le secteur axisymétrique, puisque c'est lui qui est le plus 'dangereux' dans le cas de Z-string. La figure Fig. 6.2 montre clairement que le secteur axisymétrique est instable pour les solutions porteuses de courant tout comme il l'était pour les solutions sans courant. L'observation principale est que pour toutes les valeurs du nombre d'onde κ telles que

$$|\kappa| < \kappa_{\rm max}(\mathcal{I})\,, \tag{6.24}$$

le déterminant de Jacobi s'annule exactement une fois. Lorsque $|\kappa| \geq \kappa_{\rm max}(\mathcal{I})$ le déterminant ne s'annule plus. On en conclue alors que pour toutes les valeurs du nombre d'ondes telles que (6.24), il existe un unique mode instable (du moins dans le secteur axisymétrique). Lorsque la solution du fond n'a pas de courant (Z-string), $\kappa_{\rm max}(\mathcal{I} = 0) = 2\sigma(\mathcal{I} = 0)$. On voit qu'ici, ce n'est plus le cas. En effet, on trouve que

$$\kappa_{\rm max}(\mathcal{I} \neq 0) > 2\sigma(\mathcal{I} \neq 0)\,. \tag{6.25}$$

Par ailleurs pour la solution sans courant, lorsque $\kappa(\mathcal{I} = 0) = 0$, la solution n'est pas instable. Pour les Z-strings, le mode *homogène* n'est pas instable. Remarquons que c'est également le cas dans la limite semilocale pour toutes les valeurs du courant. Lorsque le courant est non-nul pour des valeurs génériques de $\theta_{\rm W}$, le mode *homogène* tel que $\kappa(\mathcal{I} \neq 0) = 0$

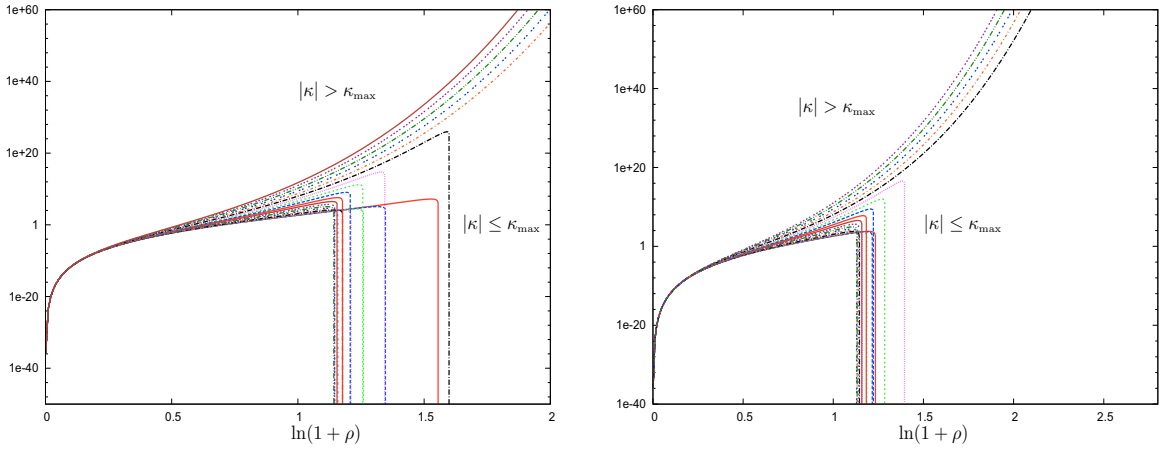


FIG. 6.2: Déterminant de Jacobi de la perturbation axisymétrique ($m = 0$) de la solution fondamentale ($n = 1$, $\nu = 1$) avec courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$. À gauche : $\sigma = 0.7$ À droite : $\sigma = 0.6$.

est instable. Il faudra donc construire explicitement les solutions de (6.17) dans le secteur $m = 0$. Mais avant cela nous allons étudier succinctement les autres secteurs.

6.4.2.2 Les secteurs non-axisymétriques ($m > 0$)

Il apparaît clairement Fig. 6.3 que pour les solutions fondamentales $n = \nu = 1$ tous les secteurs ne respectant pas la symétrie axiale ne possèdent pas d'instabilité. Bien qu'en toute rigueur il faille considérer toutes les valeurs possibles de m, on se convainc facilement qu'il est suffisant de considérer les valeurs les plus basses. En effet, augmenter m revient en quelque sorte à augmenter la barrière centrifuge, rendant ainsi l'existence d'un état lié moins probable. Ainsi il est raisonnable de penser que pour le vortex fondamental ($n = 1$), le seul secteur instable soit celui possédant la symétrie axiale $m = 0$.

6.4.3 Multivortex ($n > 1$)

Lorsque $n > 1$ l'instabilité dans le secteur $m = 0$ est toujours présente (Fig. 6.4). On a pu vérifier pour des valeurs jusqu'à $n = 3$ que les résultats sont similaires à Fig. 6.2. L'inspection des secteurs $m \neq 0$ révèle cependant de nouvelles instabilités. On constate en effet Fig. 6.4 que certains nouveaux secteurs sont instables. En l'occurrence il y a un secteur supplémentaire $m = 2$ lorsque $n = 2$. Ce secteur correspond en fait à l'instabilité de *séparation* déjà présente dans la théorie abélienne. Les solutions pour $n = 2$ sont en réalité la superposition de deux vortex élémentaires $n = 1$ (puisque $\beta > 1$). Ainsi une configuration multivortex $n = 2$ est instable dans le secteur quadrupôlaire de l'opérateur des perturbations. Il nous été donné de vérifier dans la limite semilocale d'hypercharge [116] que les solutions $n = 3$ possèdent également l'instabilité de séparation pour $m = 2$ et $m = 3$ c'est à dire respectivement la séparation en deux (de $n = 1$ et $n = 2$) ou trois

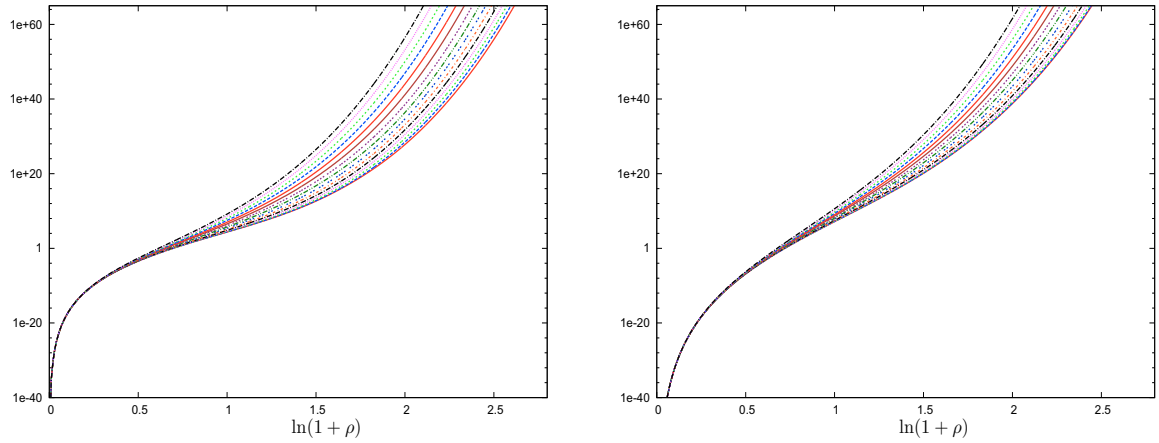


FIG. 6.3: Déterminant de Jacobi des perturbations non-axisymétriques ($m > 0$) de la solution fondamentale ($n = 1$, $\nu = 1$) avec courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.23$ et $\beta = 2$. Pour la valeur du twist $\sigma = 0.5$ À gauche : $m = 1$ À droite : $m = 2$.

vortex (de $n = 1$). On peut conjecturer que les secteurs instables seront $m = 0\ \forall n$ et $m = 2, \ldots, n$ lorsque $n > 1$ puisque c'est le cas des solutions ANO [58].

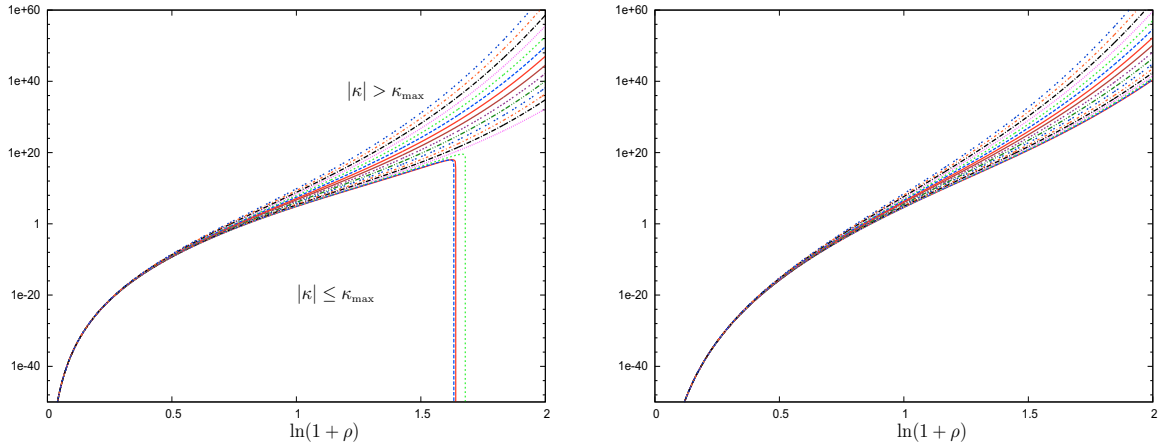


FIG. 6.4: Déterminant de Jacobi des perturbations de la solution multivortex ($n = 2$, $\nu = 2$) avec courant, pour différentes valeurs du *nombre d'onde* κ. Les valeurs physiques des paramètres de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$. Pour la valeur du twist $\sigma = 0.6$ À gauche : Instabilité de séparation $m = 2$. À droite : Le secteur $m = 3$ est manifestement stable.

Chapitre 7

Analyse quantitative de l'instabilité

Ayant décrit qualitativement les secteurs pour lesquels des instabilités ont lieu, nous allons nous concentrer à présent sur le secteur axisymétrique, puisque c'est celui qui contient l'instabilité principale des nouvelles solutions supraconductrices. On rappelle que les autres secteurs instables décrivent la séparation des multivortex ($n > 1$) en vortex élémentaires ($n = 1$).

7.1 Résultats généraux

Il faut à présent résoudre le problème de Schrödinger (6.17) dont la fonction d'onde régulière à l'origine (6.20), décrit asymptotiquement un état lié (6.21), dans le secteur axisymétrique $m = 0$. Rappelons qu'on dispose de 16 paramètres libre à l'origine, 16 paramètres libres à l'infini plus la valeur propre Λ à déterminer. Puisque le système est linéaire, il faut fixer un des paramètres (on choisit $c_+^{W^+} = 1$). Il reste ainsi 32 paramètres libres pour 32 conditions de continuités [1]. Résoudre un tel problème numériquement est une tache très longue. Cependant, en utilisant la méthode de *multishooting* [112] décrite en appendice (Sec. A), il a été possible de construire les solutions et d'explorer une partie raisonnable de l'espace des paramètres afin de construire la relation de dispersion Fig. 7.1. Il faut tout d'abord remarquer que cette relation de dispersion confirme les prédictions de l'analyse qualitative. En effet, on voit qu'il existe toujours une valeur maximale du nombre d'onde $\kappa_{\max}(\mathcal{I})$ au-delà de laquelle les perturbations deviennent stables. On trouve donc la valeur propre imaginaire pure $\omega^2 < 0$ lorsque $|\kappa| < \kappa_{\max}$.

On est ici à nouveau témoin de fortes indications sur une transition de phase. En effet, lorsque le courant est faible $\mathcal{I} < \mathcal{I}_\star$, la relation de dispersion a l'allure d'un double puits. Ces doubles puits comptent deux minima absolus lorsque $\kappa = \pm\kappa_{\min}(\mathcal{I})$ et un maximum local pour $\kappa = 0$. Lorsque le courant augmente, les minima se rapprochent ($|\kappa_{\min}|$ diminue) et la valeur du maximum local $\omega^2(0)$ se rapproche de celle des minimas absolus $\omega^2(\pm\kappa_{\min})$. Ainsi le double puits *s'aplatit* jusqu'à la valeur critique du courant $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\star$ pour laquelle les trois extrema fusionnent en un *unique* minimum global pour $\kappa = 0$. Certains paramètres numériques de la relation de dispersion sont présentés Table. 7.1. En particulier, il est

[1] 16 pour les amplitudes et 16 pour leurs dérivées.

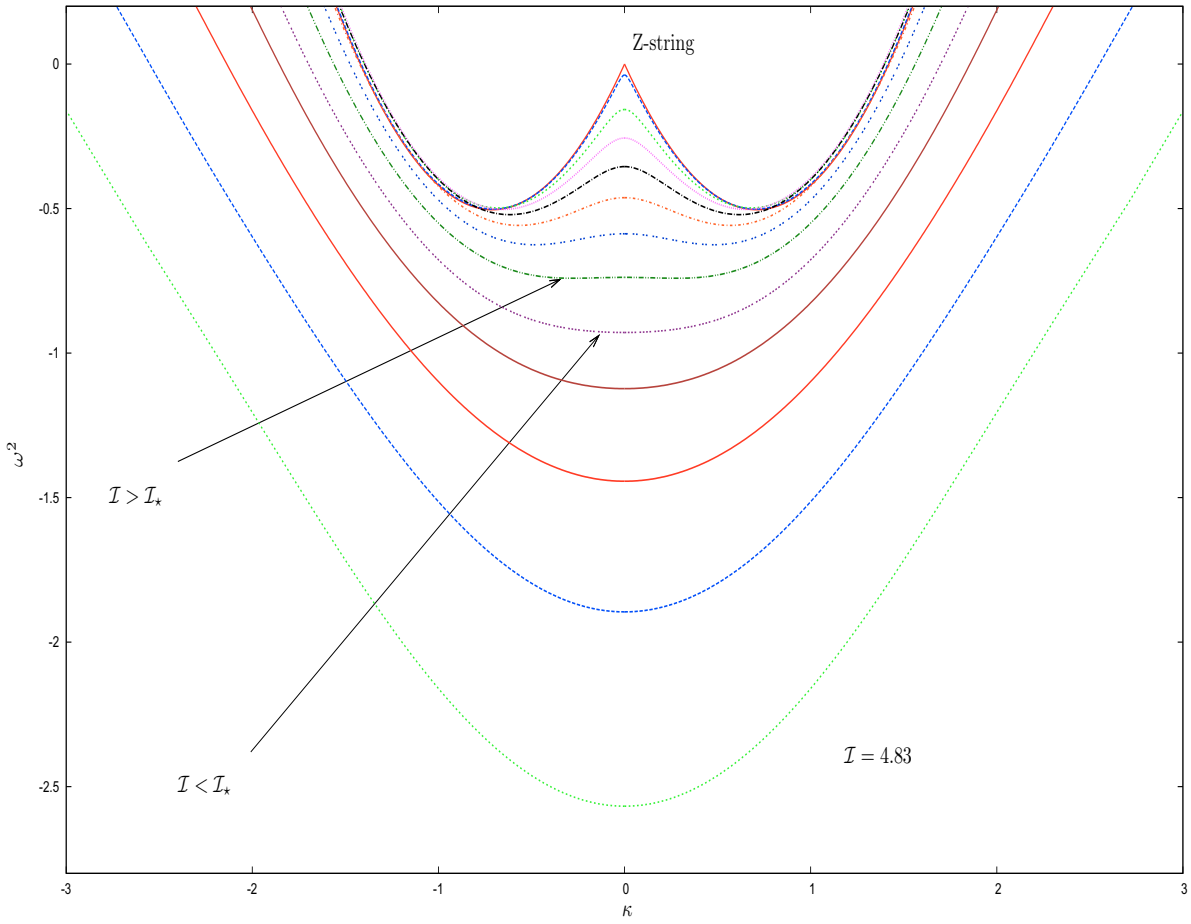


FIG. 7.1: Relation de dispersion des modes instables axisymétriques ($m = 0$) du vortex fondamental ($n = 1$, $\nu = 1$). Seules les valeurs physiques des paramètres de la théorie sont considérées ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$).

possible de représenter $\kappa_{\rm min}(\mathcal{I})$ Fig. 7.2. Le passage de la forme double puits avec trois extrema à celle d'un puits simple possédant un unique minimum global, va dans le sens d'une sorte de transition de phase pour le courant critique $\mathcal{I}_\star$. En particulier, la courbe $\sigma(q)$ (Fig. 7.2 et Fig. 5.3) pour laquelle deux branches se rejoignent pour la valeur critique du courant lorsque le paramètre du condensat est maximum. En effet la solution s'éloigne d'abord de Z-string en 'condensant' des champs de Higgs, puis le condensat scalaire est détruit par les forts champs magnétiques lorsque $\mathcal{I} \to \infty$. Pour de grands courants, le vortex est constitué d'une phase centrale où la symétrie est restaurée, entourée d'une région où le champ scalaire est éteint par les forts champs magnétiques engendrés par le courant. Il est possible d'interpréter le point critique $\mathcal{I}_\star$ comme la transition où la phase non-brisée (Fig. 5.16) apparaît au coeur du système. Cette interprétation est soutenue par la structure à deux branches Fig. 7.2. qui suggère une modification des propriétés physiques (y compris la stabilité) d'un système. On sait à présent que le nombre d'instabilité n'est pas affecté par cette transition. C'est plutôt de l'allure générale de la relation de dispersion

$\mathcal{I}$	σ	$\omega^2(0)$	$\kappa_{\min}$	$\omega^2(\kappa_{\min})$	$\kappa_{\max}$
0	0.709697	0.0	0.709697	-0.503670	1.419394
0.0804	0.700	-0.0370976	0.705	-0.519740	1.415
0.4851	0.650	-0.157024	0.680	-0.497821	1.395
0.8739	0.600	-0.255942	0.655	-0.502902	1.390
1.2430	0.550	-0.354806	0.615	-0.520995	1.400
1.6002	0.500	-0.462475	0.570	-0.558202	1.425
1.9494	0.450	-0.587058	0.475	-0.625174	1.475
2.3004	0.400	-0.738065	0.280	-0.741152	1.560
2.6740	0.350	-0.928761	0.0	-0.928761	1.695
3.0831	0.300	-1.12311	0.0	-1.12311.	1.855
3.5594	0.250	-1.44332	0.0	-1.44332.	2.135
4.1327	0.200	-1.89531	0.0	-1.89531.	2.550
4.8335	0.150	-2.56766	0.0	-2.56766.	3.150

TAB. 7.1: Paramètres de la relation de dispersion $\omega^2(\kappa)$ pour le vortex élémentaire $n = \nu = 1$ et $\beta = 2.0$, $\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$.

qui change.

Il faut remarquer que le mode le plus dramatique est le mode homogène. En effet, tous les modes tels que $0 < |\kappa| < \kappa_{\max}(\mathcal{I})$ peuvent être supprimés en imposant des conditions aux bords périodiques selon l'axe x^3 du vortex. Si on considère un vortex de longueur $L < 2\pi/\kappa_{\max}(\mathcal{I})$ avec des conditions aux bords périodiques, alors tous les modes tels que $\kappa \neq 0$ n'on pas suffisamment de place pour se développer. Une telle périodisation ne peut cependant pas supprimer le mode homogène $\kappa = 0$ puisqu'il est périodique avec n'importe quelle période. C'est pourquoi le mode homogène est le plus dangereux. Ainsi on s'intéresse au mode homogène pour le reste de la théorie Fig. 7.5. On trouve en particulier que le mode homogène disparaît dans la limite semilocale d'hypercharge comme on s'y attend d'après nos résultats [116], mais qu'il est présent pour tout le reste de la théorie.

Afin d'avoir une meilleure compréhension des instabilités et pour comprendre la transition de phase, nous allons analyser cette relation de dispersion dans les limites de faible et grand courants. On a en effet pu décrire semi analytiquement les solutions du fond dans ces deux limites. Grâce à ces approximations on pourra reproduire les résultats purement numériques.

7.2 Étude semi-analytique dans la limite de faibles courants

On a vu précédemment (Sec. 5.2) qu'il est possible d'appliquer les outils d'analyse perturbative de mécanique classique pour décrire la bifurcation des solutions supraconductrices avec les Z-strings. Dans la limite semilocale d'hypercharge [115], un tel raisonnement a permis de rendre compte de la bifurcation des solutions de fond comme on l'a fait Sec. 5.2. Il a de plus été mis en avant qu'il pouvait en être de même pour l'opérateur des perturbations lorsque le courant est faible.

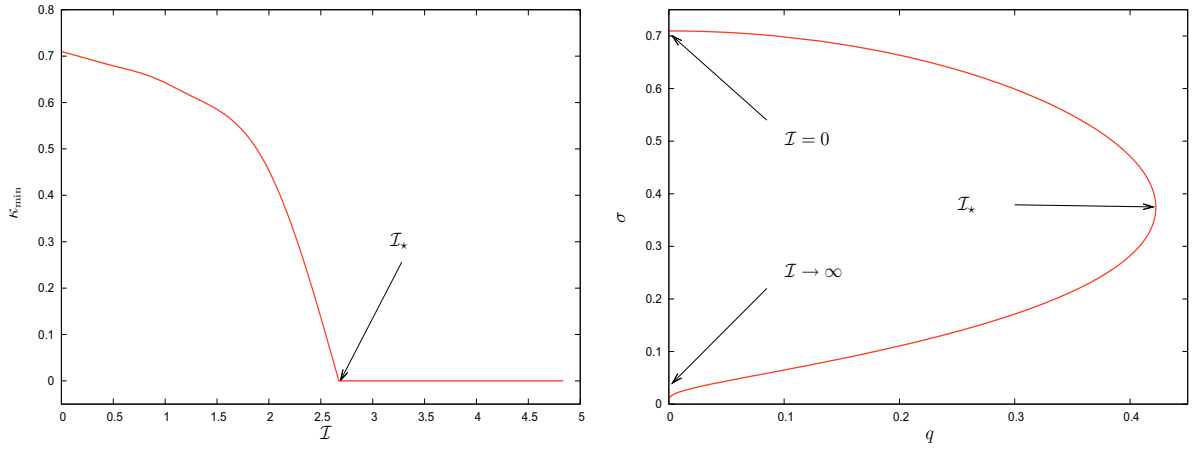


FIG. 7.2: À gauche : Paramètre $\kappa_{\min}$ de la relation de dispersion. Ce paramètre suggère une transition de phase. À droite : Structure à deux branches suggérant une transition de phases.

En effet, comme le développement en séries des champs de fond au voisinage de la solution sans courant est connu, il est possible de reconstruire la matrice potentielle du problème de Schrödinger aux différents ordres. On peut alors utiliser les outils de la théorie des perturbations de la mécanique quantique (on pourra se référer à des ouvrages classiques tels que [135] ou [136]). L'idée principale est d'utiliser les propriétés de l'opérateur de Schrödinger qui est réel et symétrique, pour lequel on définit un produit scalaire. Connaissant les champs du fond aux premiers ordres de la théorie des perturbations (Sec. 5.2), on a tous les ingrédients pour suivre la démarche usuelle de théorie des perturbations en mécanique quantique. La fonction d'onde Ψ, la matrice potentielle $\mathcal{U}$ et la valeur propre Λ sont développées en série de puissances

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \epsilon\Psi^{(1)} + \epsilon^2\Psi^{(2)} + \dots\,, \qquad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{(0)} + \epsilon\mathcal{U}^{(1)} + \epsilon^2\mathcal{U}^{(2)} + \dots\,,$$
$$\Lambda = \Lambda^{(0)} + \epsilon\Lambda^{(1)} + \epsilon^2\Lambda^{(2)} + \dots\,. \tag{7.1}$$

Le paramètre ϵ est le même que celui du développement (5.7) des champs de fond. Les coefficients de la matrice potentielle sont calculés à partir de ce même développement. Les coefficients devant les puissances croissantes de ϵ donnent respectivement les équations

$$(\mathcal{H}^{(0)} - \Lambda^{(0)})\Psi^{(0)} = 0\,, \tag{7.2a}$$
$$(\mathcal{H}^{(0)} - \Lambda^{(0)})\Psi^{(1)} = (\mathcal{U}^{(1)} + \Lambda^{(1)})\Psi^{(0)}\,, \tag{7.2b}$$
$$(\mathcal{H}^{(0)} - \Lambda^{(0)})\Psi^{(2)} = (\mathcal{U}^{(1)} + \Lambda^{(1)})\Psi^{(1)} + (\mathcal{U}^{(2)} + \Lambda^{(2)})\Psi^{(0)} \tag{7.2c}$$

où $\mathcal{H}^{(0)} := \frac{1}{\rho}\partial_\rho\,(\rho\partial_\rho) - \mathcal{U}^{(0)}$. Par définition le produit scalaire est symétrique pour $\mathcal{H}^{(0)}$, d'où la propriété

$$< \Psi^{(0)}, (\mathcal{H}^{(0)} - \Lambda^{(0)})\Psi^{(\alpha)} > = < \Psi^{(\alpha)}, (\mathcal{H}^{(0)} - \Lambda^{(0)})\Psi^{(0)} > \,. \tag{7.3}$$

Avant d'aller plus loin dans cette analyse, il faut considérer l'équation à l'ordre zéro des perturbations. En effet, à cet ordre, il faut pouvoir retrouver les résultats de stabilité de Z-string. Les résultats à cet ordre permettent de plus de construire la base des états propres de l'opérateur des perturbations (6.17).

7.2.1 Construction de la base d'états propres – Solutions à l'ordre zéro

Avant de s'intéresser aux résultats de la théorie des perturbations aux ordres élevés d'ϵ, il faut considérer l'ordre zéro. Cet ordre correspond à l'opérateur des perturbations autour des solutions sans courant (Z-strings). Lorsque le fond considéré est celui des Z-strings, l'opérateur (6.17) se simplifie considérablement et devient diagonal par blocs. Les solutions de chacun de ces secteurs permettent de construire la base des états propres de l'opérateur de Schrödinger. Bien qu'indispensable nous n'allons pas considérer ici, chacun des différents secteur. Le détail de l'opérateur décrivant l'état fondamental est présenté ici, alors que les détails concernant tous les autres secteurs sont laissés en appendice App. C.2.

L'état fondamental qui fait intervenir les amplitudes des champs scalaires et W est le plus important puisqu'il donne l'instabilité de Z-string [28, 29]. En fait, ce secteur contient deux parties indépendantes

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \mathcal{U}_\pm^{\mathrm{W}}\right]\Psi_\pm = \Lambda_\pm^{\mathrm{W}}\Psi_\pm\,, \quad \text{où} \quad \Lambda_\pm^{\mathrm{W}} = \Lambda^{(0)} + \left(\sigma^{(0)} \mp \kappa\right)^2\,, \tag{7.4}$$

où le vecteur propre $\Psi_\pm$ contient 3 amplitudes et $\mathcal{U}_\pm^{\mathrm{W}}$ est la matrice potentielle symétrique 3×3 définie comme

$$\Psi_\pm = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_+^\pm \\ \mathcal{W}_-^\pm \\ h_2^\pm \end{pmatrix}\,, \qquad \mathcal{U}_\pm^{\mathrm{W}} = \begin{pmatrix} \Delta_{+1}^{\mathcal{W}^\pm} & 0 & V^\pm \\ 0 & \Delta_{-1}^{\mathcal{W}^\pm} & V^\mp \\ V^\pm & V^\mp & \Delta_\pm^{h_2} \end{pmatrix}\,, \tag{7.5}$$

avec les éléments de matrice

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta^{\mathcal{W}^\pm} &= \frac{\left(2g^2(v_{\mathrm{ANO}}-n)+\nu\pm(m-\nu)\right)^2}{\rho^2} \pm 4\eta g^2\frac{v'_{\mathrm{ANO}}}{\rho} + \frac{g^2}{2}f_{\mathrm{ANO}}\,,\\
\Delta_\pm^{h_2} &= \frac{(v_{\mathrm{ANO}}\mp m)^2}{\rho^2} + \frac{\beta}{4}\left(f_{\mathrm{ANO}}^2-1\right) + \frac{g^2}{2}f_{\mathrm{ANO}}\,, \qquad V^\pm = g\left(f'_{\mathrm{ANO}} \pm \frac{v_{\mathrm{ANO}}f_{\mathrm{ANO}}}{\rho}\right)\,.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Les amplitudes décrivant des états liés satisfont les conditions

$$\rho^{|n-\nu\pm m|} \leftarrow h_2^\pm \to \frac{\mathrm{e}^{-m_\pm^{\mathrm{W}}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \qquad \rho^{|\nu\pm(m-\eta)|} \leftarrow \mathcal{W}_\eta^\pm \to \frac{\mathrm{e}^{-m_\pm^{\mathrm{W}}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \tag{7.7}$$

lorsque $0 \leftarrow \rho \to \infty$ et $m_\pm^{\mathrm{W}} = \sqrt{\Lambda_\pm^{\mathrm{W}} + \frac{g^2}{2}}$. D'après les symétries du système , il est clair que $\Lambda_+^{\mathrm{W}} = \Lambda_-^{\mathrm{W}} = \sigma^{(0)\,2}$. C'est-à-dire que

$$\kappa\left(\kappa - 2\sigma^{(0)}\right) - \omega_+^2 = \kappa\left(\kappa - 2\sigma^{(0)}\right) - \omega_-^2 = 0\,. \tag{7.8}$$

Par conséquent les valeurs propres de l'état fondamental et son 'orthogonal' sont différentes à moins que $\kappa = 0$. Plus précisément si $0 < \kappa < 2\sigma^{(0)}$ (*resp.* $-2\sigma^{(0)} < \kappa < 0$), alors Ψ_+ (*resp.* Ψ_-) est un état lié dont la valeur propre, ω_+^2 (*resp.* ω_-^2) est négative et Ψ_- (*resp.* Ψ_+) un état lié dont la valeur propre ω_-^2 (*resp.* ω_+^2) est positive. Les propriétés de l'état fondamental sont discutées plus en détail en appendice App. C.2.1. L'état lié dont la valeur propre est négative est *l'état fondamental* alors que celui dont la valeur propre

est positive sera appelé *état fondamental orthogonal*. Le cas particulier $\kappa = 0$ doit être considéré séparément. En effet lorsque $\kappa = 0$ la valeur propre est dégénérée. C'est un fait bien connu en mécanique quantique, les cas de valeurs propres dégénérées sont délicats à traiter.

Afin de construire la base des états propres des perturbations au voisinage de Z-string, il faut également déterminer les états orthogonaux. Le détail de l'analyse de chacun des sous-espaces orthogonaux est présenté App. C.2.

7.2.2 Analyse des perturbations

Lorsque chaque secteur de l'opérateur des perturbations pour le fond de Z-string a été étudié, les états propres qui sous-tendent chaque sous-espace orthogonal sont connus. L'espace des états 'physiques' est ainsi sous-tendu par 7 vecteurs orthogonaux contenant les 13 amplitudes qui décrivent des excitations finies des Z-strings

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{G}}_{\mathrm{ANO}} &= (\mathcal{Z}_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}\,, \\
\varphi^{\mathrm{G}}_{+} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, \mathcal{W}^{+}_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}\,, \\
\varphi^{\mathrm{G}}_{-} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \mathcal{W}^{-}_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}\,, \\
\varphi^{\mathrm{S}}_{\mathrm{ANO}} &= (0, \mathcal{Z}^{\mathrm{S}}, -\mathcal{Z}^{\mathrm{S}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, h^{\mathrm{S}}, -h^{\mathrm{S}}, 0, 0)^{\mathrm{T}}\,, \\
\varphi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{ANO}} &= (0, \mathcal{Z}^{\mathrm{A}}, -\mathcal{Z}^{\mathrm{A}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, h^{\mathrm{A}}, -h^{\mathrm{A}}, 0, 0)^{\mathrm{T}}\,, \\
\varphi^{\mathrm{W}}_{+} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \mathcal{W}^{+}_{+}, \mathcal{W}^{+}_{-}, 0, 0, 0, 0, 0, h^{+}_2, 0)^{\mathrm{T}}\,, \\
\varphi^{\mathrm{W}}_{-} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \mathcal{W}^{-}_{+}, \mathcal{W}^{-}_{-}, 0, 0, 0, h^{-}_2)^{\mathrm{T}}\,.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

L'état fondamental de l'opérateur des perturbations est par définition φ^{W}_{+} (*resp.* φ^{W}_{-}) si $\kappa > 0$ (*resp.* $\kappa < 0$). Soit $\varphi_n = \varphi^{\mathrm{W}}_{\pm}$ l'état fondamental et $\Lambda_n = \Lambda^{\mathrm{W}}_{\pm}$ la valeur propre qui lui est associé. φ_p désigne les états liés orthogonaux $\varphi_p = \{\varphi^{\mathrm{G}}_{\mathrm{ANO}}, \varphi^{\mathrm{G}}_{+}, \varphi^{\mathrm{G}}_{-}, \varphi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{ANO}}, \varphi^{\mathrm{W}}_{\mp}\}$ et Λ_p est leur valeur propre associée. Finalement les états dont le spectre est continu ou encore états de diffusion sont $\varphi_\nu = \varphi^{\mathrm{S}}_{\mathrm{ANO}}$ dont Λ_ν est la valeur propre.

Pour trouver les corrections à la valeur propre, il faut projeter les équations (7.2) sur l'état fondamental φ_n. Le produit scalaire est défini comme pour le fond (5.12).On trouve ainsi les corrections jusqu'au deuxième ordre à $\Lambda^{(0)}$

$$\begin{aligned}
-\Lambda^{(0)} &= \kappa\left(\kappa \mp 2\sigma^{(0)}\right) \quad \text{pour}\, \kappa \lessgtr 0\,, \\
-\Lambda^{(1)} &= \frac{\langle \varphi_n, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle}{||\varphi_n||^2}\,, \\
-\Lambda^{(2)} &= \frac{\langle \varphi_n, \mathcal{U}^{(2)}\varphi_n\rangle}{||\varphi_n||^2} + \frac{1}{||\varphi_n||^2}\sum_p \frac{|\langle \varphi_p, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle|^2}{(\Lambda_p - \Lambda_n)\,||\varphi_p||^2} \\
&\quad + \frac{1}{||\varphi_n||^2}\int \frac{|\langle \varphi_\nu, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle|^2}{(\Lambda_\nu - \Lambda_n)\,||\varphi_\nu||^2}\mathrm{d}\nu\,.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

On trouve également les corrections à la fonction propre en projetant l'équation (7.2) à

l'ordre 1 sur les états orthogonaux à φ_n

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(0)} = \varphi_{\pm} \quad \text{pour } \kappa \lessgtr 0\,, \\
&\Psi^{(1)} = \sum_p \frac{\langle \varphi_p, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle}{(\Lambda_p - \Lambda_n)\,||\varphi_p||^2}\varphi_p + \int \frac{\langle \varphi_\nu, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle}{(\Lambda_\nu - \Lambda_n)\,||\varphi_\nu||^2}\varphi_\nu \mathrm{d}\nu\,.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Ces formules compactes masquent bien le fait que ce calcul est assez considérable. En effet, il faut d'une part construire toutes amplitudes[2] entrant dans la base des états propres (7.9). Ensuite il faut construire tous les éléments des matrices $\mathcal{U}^{(0)}$, $\mathcal{U}^{(1)}$, et $\mathcal{U}^{(2)}$, à partir des résultats obtenus pour les corrections du fond Sec. 5.2. Puis il faut calculer tous les produits scalaires $\langle \varphi_i, \mathcal{U}^{(a)}\varphi_j\rangle$. Ensuite la formule (7.10) détermine les corrections à la valeur propre. Enfin avec (7.1), on reconstruit l'approximation de la valeur propre en fonction du paramètre ϵ dont on a donné l'interprétation physique (5.19). Heureusement, l'inspection détaillée des éléments de matrice $\mathcal{U}^{(1)}$ montre qu'il est possible d'éviter certains calculs. En effet,

$$\langle \varphi_n, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle = 0\,, \qquad \langle \varphi_n, \mathcal{U}^{(1)}\varphi^{\mathrm{G}}_{\pm}\rangle = 0\,, \qquad \langle \varphi_n, \mathcal{U}^{(1)}\varphi^{\mathrm{W}}_{\mp}\rangle = 0\,. \tag{7.12}$$

Ainsi les corrections à la valeur propres sont

$$\begin{aligned}
-\Lambda^{(0)} &= \kappa\left(\kappa \mp 2\sigma^{(0)}\right) \quad (\text{for } \kappa \lessgtr 0)\,, \\
-\Lambda^{(1)} &= 0\,, \\
-\Lambda^{(2)} &= \frac{\langle \varphi_n, \mathcal{U}^{(2)}\varphi_n\rangle}{||\varphi_n||^2} + \frac{1}{||\varphi_n||^2}\sum_p \frac{|\langle \varphi_p, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle|^2}{(\Lambda_p - \Lambda_n)\,||\varphi_p||^2} \\
&\quad + \frac{1}{||\varphi_n||^2}\int \frac{|\langle \varphi_\nu, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_n\rangle|^2}{(\Lambda_\nu - \Lambda_n)\,||\varphi_\nu||^2}\mathrm{d}\nu\,.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Les calculs sont néanmoins extrêmement fastidieux. Le cas dégénéré est laissé en appendice App. C. Au final on trouve l'approximation de la relation de dispersion $\omega^2(\kappa)$. Le résultat approché et le résultat purement numérique sont représentés Fig. 7.3. On voit clairement que l'approximation reproduit correctement la relation de dispersion obtenue numériquement. En particulier, on a confirmation que le mode homogène $\kappa = 0$ est instable. Pour les petites valeurs de κ, l'approximation perd un peu de sa précision, mais qualitativement elle confirme que le mode homogène est négatif :

$$\omega^2(0) = -2q^2g^2\Lambda^{(2)} < 0\,. \tag{7.14}$$

L'analyse perturbative [115] dans la limite de faible courant permet d'une part de mettre en place une méthodologie semi-analytique pour décrire les solutions. D'autre part elle constitue un moyen de vérifier les prédictions obtenues par le 'tout numérique'. On peut à présent s'interroger sur la possibilité d'avoir des prédictions pour la limite de grand courant. On a en effet déjà construit une description semi analytique des champs de fond qui nous a permis de dégager un interprétation physique pour les solutions.

[2] il y en a un nombre fini pour les amplitudes dont le spectre est discret et un continuum pour les amplitudes dont le spectre est continu

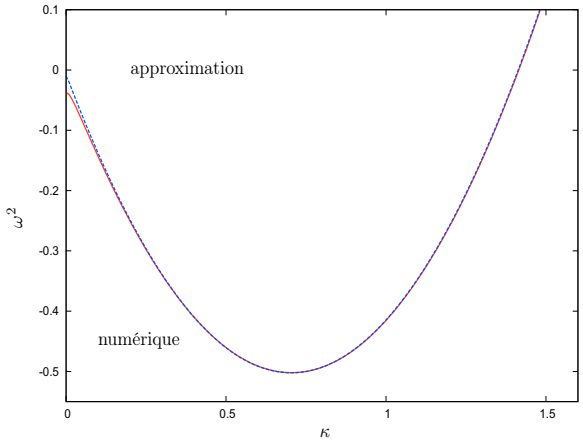


FIG. 7.3: Approximation à la relation de dispersion en faible courant. L'approximation reproduit le résultat numérique de façon assez satisfaisante.

7.3 Étude dans la limite de grands courants

On a envisagé Sec. 5.3 la possibilité de décrire approximativement les champs de fond lorsque le courant est grand. Dans la limite où $\mathcal{I}$ est grand, on introduit deux échelles de longueur qui caractérisent le vortex supraconducteur. Le vortex est alors constitué d'une région centrale de taille $\sim \mathcal{I}$, où le champ magnétique est tellement intense qu'il annule le champ scalaire. Cette région est principalement remplie de champs à masse nulle. En effet, puisque la symétrie est restaurée, le mécanisme de Higgs n'a pas encore donné de masse au champ Z. Le courant qui engendre la restauration de symétrie est confiné au centre de cette région, dans un coeur compact, formé d'un condensat de bosons chargés W, dont la taille est de l'ordre $\sim 1/\mathcal{I}$. Hors de la phase symétrique lorsque le champ magnétique n'est plus suffisamment intense, le champ scalaire transite rapidement vers le vide. Comme tous les champs massifs sont confinés, il ne subsiste alors que le champ électromagnétique de Biot et Savart.

Dans cette limite de grand courant, les champs sont décrits séparément en partageant l'espace en deux régions. La région du coeur pour laquelle $\rho < x_0/\mathcal{I}$ et la région extérieure telle que $\rho > x_0/\mathcal{I}$. Pour le cas des Z-strings, on a vu que l'instabilité s'interprétait comme la condensation de bosons W afin de générer un courant. On s'intéresse donc uniquement à la stabilité dans la région centrale $\rho < x_0/\mathcal{I}$. Si on découvre un mode négatif localisé dans cette région, il sera un mode négatif de tout le vortex. En effet, un tel mode s'annule hors du coeur et satisfait les équations du mouvement à l'extérieur. En principe il pourrait y avoir des modes supplémentaires dans la région extérieure, mais l'analyse du coeur permet de reproduire l'instabilité du cas des courants quelconques. On déduit donc que l'instabilité est localisée dans le coeur du vortex.

Ainsi dans la région centrale les champs de fond sont décrits par l'approximation (5.21). Les amplitudes doivent satisfaire les conditions aux bords (5.23) lorsque $0 \leftarrow x = \mathcal{I}\rho \rightarrow \infty$. La solution de fond est indépendante du courant, ce qui est lié à l'invariance conforme du condensat. On se concentre ici sur le secteur axisymétrique $m = 0$. Ainsi l'approximation

du fond (5.21) permet de simplifier la matrice potentielle de l'opérateur des perturbations (6.17). Il est intéressant d'utiliser une paramétrisation des champs sensiblement différente de celle adoptée dans le cas général. On introduit donc

$$\begin{aligned}
Y_4^2(\rho) &= X_1(x)\,, & Y_2^3(\rho) &= X_2(x)\,, & X_4^3(\rho) &= X_5(x)\,,\\
\sqrt{2}X_3^1(\rho) &= x\left(X_3(x) - X_4(x)\right)\,, & \sqrt{2}X_2^2(\rho) &= \left(X_3(x) + X_4(x)\right)\,,\\
\sqrt{2}Y_2^1(\rho) &= \left(Z_1(x) + Z_2(x)\right)\,, & \sqrt{2}Y_3^2(\rho) &= x\left(Z_1(x) - Z_2(x)\right)\,,\\
\sqrt{2}X_4^1(\rho) &= \left(Z_3(x) + Z_4(x)\right)\,, & \sqrt{2}X_3^3(\rho) &= x\left(Z_3(x) - Z_4(x)\right)\,,\\
\phi_1(\rho) &= \chi_1(\rho) = \sqrt{2}h_1(x)\,, & \phi_2(\rho) &= \chi_2(\rho) = \sqrt{2}h_2(x)\,.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

On définit également la pulsation et le nombre d'onde

$$\tilde{\omega} = \omega/\mathcal{I}\,, \qquad \tilde{\kappa} = \kappa/\mathcal{I}\,, \tag{7.16}$$

de sorte que $\mathcal{I}$ disparaisse complètement des équations du mouvement. L'opérateur de Schrödinger (6.17) se sépare alors en 3 secteurs indépendants plus des équations du type onde libre qui n'admettent pas de solutions bornées. En se concentrant uniquement sur les secteurs non-triviaux, on procède exactement comme pour le cas générique. C'est-à-dire qu'on recherche d'abord l'existence de modes instables grâce au critère de Jacobi, puis si une instabilité se manifeste, on construit alors les solutions du problème aux valeurs propres correspondant. Il s'avère d'après le critère de Jacobi, qu'un seul secteur contient des modes négatifs. On se concentre donc sur ce secteur en particulier

$$\Psi = \begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\\ X_5 \end{pmatrix}\,, \qquad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} M_1 & Q & 0 & 0 & R\\ Q & M_2 & S & S & 0\\ 0 & S & M_+ & T & U_+\\ 0 & S & T & M_- & U_-\\ R & 0 & U_+ & U_- & M_0 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

où les éléments de matrice sont

$$\begin{aligned}
&M_1 = \frac{V_3^2}{x^2} + U_1^2, \quad M_2 = \frac{1}{x^2} + U_1^2, \quad M_\pm = \frac{(V_3 \mp 1)^2}{x^2} \pm \frac{2\partial_x V_3}{x} + U_1^2, \quad M_0 = U_1^2\,,\\
&Q = -\sqrt{2}\partial_x U_1, \quad R = -\sqrt{2}S = -2U_1\tilde{\kappa}, \quad U_\pm = \sqrt{2}\left(\partial_x U_1 \pm \frac{U_1 V_3}{x}\right), \quad T = \frac{U_1^2}{2}.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Le secteur instable est décrit par

$$\frac{1}{x}\left(x\Psi'_x\right)'_x - \mathcal{U}\Psi = \tilde{\Lambda}\Psi \tag{7.19}$$

où $\tilde{\Lambda} = \tilde{\kappa} - \tilde{\omega}^2$. Le critère de Jacobi montre que le spectre (7.19) n'est pas défini positif (voir Fig. 7.4). On constate ainsi que le déterminant $\Delta(x)$ semble s'annuler pour toutes les valeurs de $\tilde{\kappa}$. En tout cas, on n'a jamais pu détecter de valeur $\tilde{\kappa}_{\max}$ au delà de laquelle $\Delta(x)$ arrêterait de s'annuler contrairement au cas lorsqu'on considère de faibles courants. Ainsi, il faut construire la relation de dispersion décrivant les perturbations des solutions

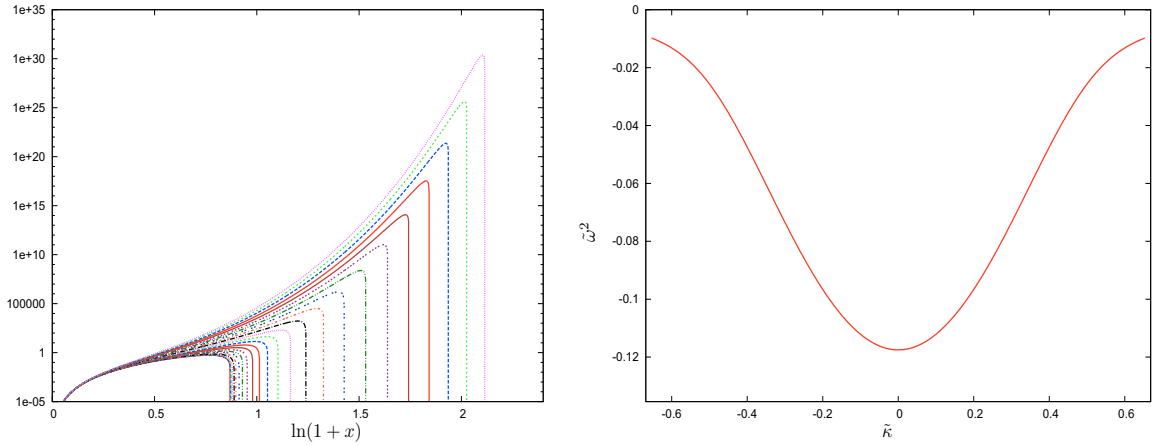


FIG. 7.4: Analyse de stabilité dans le coeur du vortex supraconducteur dans la limite de grands courants, pour les valeurs physiques de la théorie ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = 0,23$). À gauche : Test de Jacobi À droite : Construction explicite de la relation de dispersion.

portant un courant infini. Les amplitudes (7.17) doivent satisfaire les conditions aux bords $X_3 \sim X_5 = O(1)$, $X_1 \sim X_2 = O(x)$, $X_4 = O(x^2)$ pour des x petits, alors que lorsque x est grand,

$$X_1 \pm X_5 \sim X_3 + X_4 \mp \sqrt{2}X_2 \sim \mathrm{e}^{-\int^x \sqrt{(U_1 \mp \tilde{\kappa})^2 - \Omega^2}\, dx}\,, \quad X_3 - X_4 \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{\tilde{\kappa}^2 - \Omega^2}\, x}\,. \tag{7.20}$$

La relation de dispersion est alors $\tilde{\omega}^2(\tilde{\kappa})$ dans Fig. 7.4 où

$$\omega^2(\kappa) = \mathcal{I}^2 \tilde{\omega}^2(\tilde{\kappa}/\mathcal{I}). \tag{7.21}$$

On constate ainsi que le mode négatif pour de grand courants se comporte comme $\omega \sim \mathcal{I}$. Ceci est lié au fait que le mode est localisé dans un intervalle très petit, de la taille $\sim 1/\mathcal{I}$ dans le coeur. Il faut souligner que la relation de dispersion possède un unique minimum global (voir Fig. 7.4) ce qui est qualitativement similaire à la relation de dispersion lorsque $\mathcal{I} > \mathcal{I}_\star$ suggérant ainsi la justesse de l'approximation utilisée.

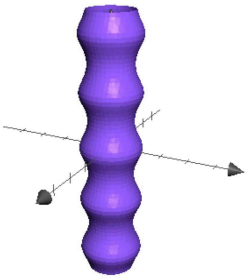
7.4 Manifestation de l'instabilité

Jusqu'à présent, nous avons construit explicitement les solutions du problème spectral (6.17) lorsque le vortex est purement magnétique ($\mathcal{I}_0 = 0$). La relation de dispersion Fig. 7.1 construite pour des valeurs génériques du courant ($\mathcal{I} \neq 0$), indique que le système passe par une transition de phase (voir Fig. 7.2 et Table. 7.1). Afin de mieux comprendre cette transition de phase, nous avons étudié les limites de faible (Sec. 7.2) et grand courant (Sec. 7.3) à l'aide d'approximations et d'outils analytiques. Dans ces deux limites, les approximations permettent de confirmer les résultats purement numériques. Lorsque le

vortex n'est pas chargé (*i.e.* lorsqu'on travail dans le référentiel de repos), le mode instable est une superposition des parties réelles et imaginaires de

$$\mathrm{e}^{|\omega|t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa z}\Psi_\kappa(\rho) \tag{7.22}$$

où $\Psi_\kappa(\rho)$ est un état lié tel que $\omega^2 < 0$ (dans le secteur axisymétrique $m = 0$). Un tel mode est périodique selon z et croît dans le temps. Nous l'appelons *mode propre*. Chaque mode périodique qui déforme le vortex a tendance séparer le vortex en segments



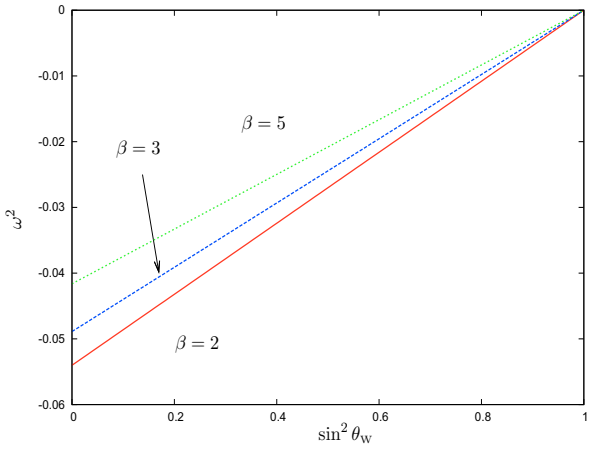


FIG. 7.5: À gauche : Représentation d'un mode propre négatif agissant sur le vortex. Le mode *inhomogène*, périodique selon l'axe z du vortex et de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/\kappa$ induit une séquence de densités de charges positives et négatives. À droite : Effet des paramètres de la théorie sur le mode homogène $\kappa = 0$. On voit que le mode homogène disparaît dans la limite semilocale d'hypercharge lorsque $\theta_{\mathrm{W}} = \pi/2$ ($q = 0.1$).

de longueur $\lambda = 2\pi/\kappa$, comme on peut le voir Fig. 7.5. Il est bien sûr peu probable que le vortex se *brise* effectivement en segments à cause de la conservation du courant. De plus cette tendance à la segmentation n'est qu'une interprétation au niveau linéaire. Elle perd donc son sens lorsque les perturbations ne sont plus petites. Comme le mode instable produit des inhomogénéités dans le courant, il produit également localement des inhomogénéités périodiques de la charge électrique, formant ainsi une séquence de parties chargées positivement et négativement, le long du vortex.

En règle générale, les perturbations sont décomposées sur la somme des modes propres (6.6). Lorsque le temps augmente, chacun des modes croît, mais on attend que la somme soit dominée par le mode ayant le taux de croissance le plus important. On a vu (Fig. 7.1) que le taux de croissance $\omega(\kappa)$ est maximal pour $|\kappa| = \kappa_{\min}$ si $\mathcal{I} < \mathcal{I}_\star$ ou pour $\kappa = 0$ si $\mathcal{I} > \mathcal{I}_\star$. Ainsi, pour de faibles courants, le vortex aura tendance à s'épaissir de façon inhomogène. Les inhomogénéités seront périodiques de longueur $\lambda = 2\pi/\kappa_{\min}$. Si le courant est grand, le mode dominant causera une expansion homogène. Puisque les modes instables existent pour $|\kappa| < \kappa_{\max}$, il est possible de supprimer la quasi-totalité des modes négatifs en imposant des conditions aux bords périodiques le long de l'axe du vortex. En effet la longueur d'onde des modes instables est toujours plus grande que $\lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$. Ainsi

en imposant les conditions aux bords périodiques sur une longueur $L < \lambda_{\min}$, les modes inhomogènes n'ont plus suffisamment de place pour se développer. Il ne subsiste alors que le mode homogène $\kappa = 0$, puisqu'il est périodique avec n'importe quelle période. Ce mode n'existe pas lorsque $\theta_{\rm W} = \pi/2$ $(\forall\ \mathcal{I})$ [116] et si $\mathcal{I} = 0$ $(\forall\ \theta_{\rm W})$ (Sec. 7.2). La périodisation permet alors de stabiliser (au niveau perturbatif) les Z-strings et les vortex supraconducteurs semilocaux. Pour des valeurs génériques de $\theta_{\rm W}$ et $\mathcal{I}$ le mode homogène $\kappa = 0$ est négatif. La périodisation laisse alors comme unique mode instable le mode homogène. Contrairement aux Z-strings ou aux vortex semilocaux, les solutions génériques ne peuvent donc pas être stabilisées par des conditions aux bords périodiques.

Bien qu'on ait pu montrer pour le cas générique, que le mode homogène est négatif, nous n'avons pas d'argument définitif pour expliquer ce phénomène. En particulier, il n'est pas clair pourquoi ce mode disparaît lorsque le courant est nul, ou lorsque $\theta_{\rm W} = \pi/2$. On peut penser que l'existence du mode homogène est liée à la *nature non-abélienne* des solutions. En effet dans la limite semilocale d'hypercharge $(\theta_{\rm W} = \pi/2)$ les champs non-abéliens découplent. De plus lorsque le courant est nul (Z-string) les solutions sont le plongement de solutions abéliennes. Ces deux situations sont exactement le cas où le mode homogène disparaît. Remarquons enfin que le mode homgène $\omega^2(\kappa = 0)$ est générique puisque hormis les limites abéliennes, on a pu vérifier que $\omega^2 \simeq -0.12\,\mathcal{I}^2$ lorsque le courant est grand (Sec. 7.3). L'analyse en faible courant (Sec. 7.2) donne

$$\omega^2 = -2q^2g^2\Lambda^{(2)} \quad \text{et donc} \quad \omega^2 \sim (\sin^2\theta_{\rm W} - 1) \tag{7.23}$$

qui permet de reproduire qualitativement la figure Fig. 7.5 (à droite). L'explication de l'existence du mode homogène négatif semble donc résider dans la nature non-abélienne des solutions, bien que la raison ne soit pas évidente.

Hormis quelques points de détail encore sombres, notre description de l'instabilité est relativement complète. Remarquons que tout à été fait dans le référentiel propre où la charge électrique est nulle. En vue de compléter notre analyse, il faut donc considérer le cas d'un vortex chargé.

7.5 Vortex supraconducteurs chargés

Connaissant les propriétés des modes instables lorsque $\mathcal{I}_0 = 0$ on s'intéresse ici aux vortex supraconducteurs chargés $(\mathcal{I}_0 \neq 0)$. Puisque les vortex chargés sont obtenus en appliquant un *boost* de Lorentz aux solutions non chargées, il est possible d'en faire de même pour les perturbations. Les modes négatifs sont la superposition des parties réelles et imaginaires de

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Xi(t,z)}\Psi_\kappa(\rho) \tag{7.24}$$

où la phase définie lors de la séparation de variables (6.6) peut s'écrire $\Xi(t,z) = \omega_b t + \kappa_b z$. ω_b et κ_b sont par définition

$$\begin{aligned} \omega_b &= \omega\tilde{\Sigma}_t + \kappa\Sigma_t\,, & \kappa_b &= \omega\tilde{\Sigma}_z + \kappa\Sigma_z\,, \\ &= \omega\cosh(b) + \kappa\sinh(b)\,, & &= \kappa\cosh(b) + \omega\sinh(b)\,. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Le paramètre de boost b est relié à la charge électrique d'après (4.36). Pour des valeurs arbitraires du boost, la phase est alors

$$\Xi(t,z) = \mathrm{i}|\omega|(\cosh(bt)+\sinh(bz)) + \kappa(\sinh(bt)+\cosh(bz))\,. \tag{7.26}$$

Si les modes négatifs d'un vortex non chargé (7.22) sont *boostés*, on trouve alors le mode

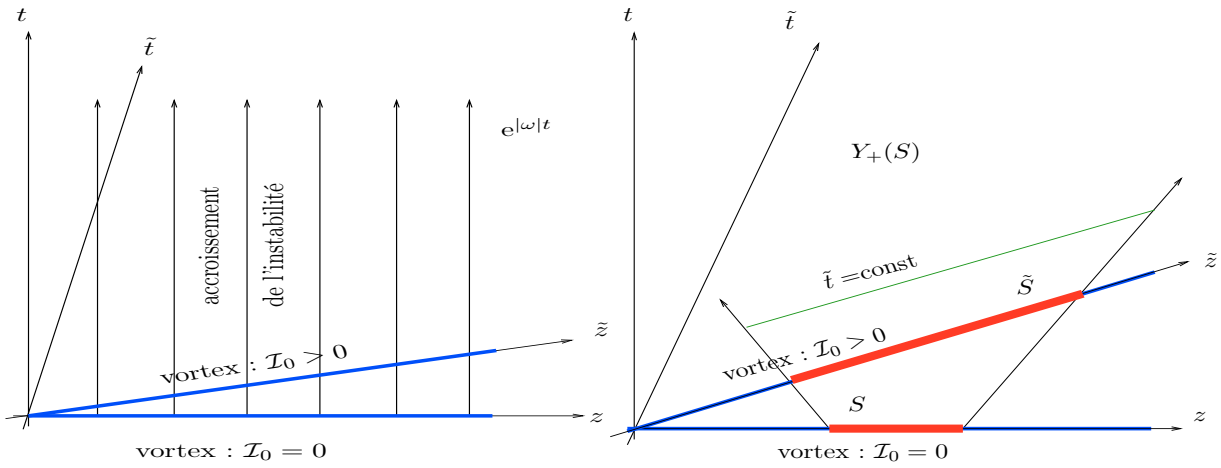


FIG. 7.6: À gauche : Les modes propres négatifs grandissent le long des lines d'histoire de l'espace-temps. Le temps dans le référentiel de repos du vortex non chargé s'écoule dans la même direction, alors que pour le vortex boosté la direction du temps est différente. Ainsi, l'instabilité ne croit pas uniquement avec $\tilde{t}$ mais également avec $\tilde{z}$. À droite : l'évolution spatiotemporelle de données initialement sur un support compact S.

négatif dont la phase est (7.26). Pour bien les différencier des *modes propres*, on appellera ces modes : *modes boostés*. Contrairement aux *modes propres* qui ne croissent que dans le temps, les *modes boostés* croissent également le long de l'axe du vortex. Il s'agit là d'une conséquence du fait que les directions d'espace-temps changent avec les boosts (voir Fig. 7.6). Les *modes propres* du vortex non chargé évoluent parallèlement au temps t, mais un observateur comobile avec le vortex chargé verra de tels modes croître à la fois en espace et en temps. Ainsi un boost de Lorentz à pour effet de complexifier le nombre d'onde κ_b puisque pour un mode négatif, on a $\omega^2 < 0$. Si les modes négatifs ne sont plus bornés selon z, il faut former un paquet d'onde pour que l'approximation linéaire soit toujours valide. Soit le paquet d'onde des modes propres du vortex non chargé

$$\delta f(t,z,\rho) = \int \mathrm{d}\kappa C(\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\kappa)t+\mathrm{i}\kappa z}\Psi_\kappa(\rho) + \ldots \tag{7.27}$$

où les points de suspension désignent des états de diffusion. Si une perturbation initiale $\delta f(0,z,\rho)$ a un support compact S le long de l'axe z, son évolution temporelle est contenue dans le domaine d'espace-temps $Y_+(S)$ qui lui est causalement connecté (voir Fig. 7.6). Un changement de coordonnées permet d'exprimer le même paquet d'onde comme une somme sur les modes boostés

$$\delta f(\tilde{t},\tilde{z},\rho) = \int \mathrm{d}\kappa C(\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Xi(\tilde{t},\tilde{z})}\Psi_\kappa(\rho) + \ldots\,. \tag{7.28}$$

Le changement de coordonnées utilisé ici est $x_\alpha = \tilde{\Sigma}_\alpha \tilde{x}_\alpha$. Si le paquet d'onde du vortex non chargé (7.27) contient des modes négatifs, alors le paquet d'onde *boosté* (7.28) contient des modes non bornés en $\tilde{z}$. Cependant puisque la variable $\tilde{z}$ est bornée dans $Y_+(S)$ pour un $\tilde{t}$ fixé la somme est bornée. Le paquet d'onde est alors vu comme la perturbation d'un vortex chargé dont la distribution initiale est $\delta f(0, \tilde{z}, \rho)$. Par conséquent si $\delta f(t, z, \rho)$ est un mode croissant avec t, alors $\delta f(\tilde{t}, \tilde{z}, \rho)$ est un mode croissant avec $\tilde{t}$.C'est-à-dire que si le vortex non chargé est instable, alors le vortex chargé l'est également.

On trouve donc comment il est possible de déterminer les *modes boostés* d'un vortex chargé à partir des *modes propres* d'un vortex non chargé. Afin d'avoir une description complète, il faut déterminer les *modes propres* des vortex chargés et les *modes boostés* des vortex non-chargés, puisque qu'on peut passer de l'un à l'autre par boost. En effet les *modes propres* qui sont périodiques en z, deviennent non-périodiques après un boost. Ainsi des conditions aux bords périodiques permettent de se débarrasser de tous les modes boostés. Il faut par ailleurs penser à des modes négatifs qui ne soient pas périodiques dans le référentiel de repos, mais qui le deviennent après un boost. C'est à dire que les *modes propres* d'un vortex chargé doivent avoir κ_b qui soit réel pour le vortex chargé. Il faut ainsi considérer des états liés du problème de Schrödinger (6.17) pour des paramètres complexes

$$\omega = \gamma - \mathrm{i}\Omega\,, \quad \text{et} \quad \kappa = K + \mathrm{i}\Omega \tanh b\,, \tag{7.29}$$

où γ et Ω dépendent de K et b. Afin d'étudier les solutions *boostées*, il faut donc considérer une version complexifiée du problème (6.17). Notons qu'une telle procédure a été utilisée dans l'étude de stabilité pour des 'black strings' boostées [137]. Lorsque le paramètre de boost est nul, on trouve simplement que $\omega^2 = -\Omega^2$, $\gamma = 0$ et $\kappa = K$. Pour des valeurs quelconques du boost, comme ω^2 et κ sont des grandeurs complexes, il faut alors complexifier tout le problème de Schrödinger (6.17). Ainsi le problème à 16 équations réelles devient un problème à 32 équations réelles. C'est à dire qu'on connecte les deux sous-systèmes de 16 équations qui étaient normalement identiques d'après (6.8). Il n'y a pas de degrés supplémentaires introduit lors de la complexification, mais la relation d'équivalence (6.8) n'est plus vérifiée. L'information physique est contenue dans un système de 32 équations, et les modes de jauge pure dans un système de 8 équations. On trouve bien les $32+8 = 40$ amplitudes du modèle standard.

Il faut à présent résoudre ce système de 32 équations différentielles ordinaires, du second ordre, réelles. Il s'agit là d'un problème numérique extrêmement difficile. Fort heureusement, la flexibilité du langage C++ permettant l'usage intuitif de nombres complexes a rendu l'implémentation du programme relativement facile. Ainsi, il faut complexifier toutes les amplitudes (6.16), les constantes d'intégrations des conditions aux bords (6.20), (6.21) et (6.23) ainsi que les masses effectives (6.22). Pour décrire des états liés, il faut exiger que la partie réelle de ces dernières soit positive. La résolution d'un problème numérique de cette taille est très difficile. En effet, d'une part il faut 'accrocher' une solution ce qui n'est pas évident vu le nombre de variables. D'autre part, à ce niveau, le temps de calcul devient une réelle contrainte [3]. En effet, non seulement la taille du système est augmentée,

[3]Le caractère chronophage du problème tient dans la résolution du système linéaire plus que dans l'intégration des équations elles mêmes. En effet si le système linéaire, contenant les informations encodées par les conditions aux bords, est doublé alors le temps de résolution est multiplié par 8.

mais aussi comme il faut introduire explicitement le paramètre de *boost* dans les équations. L'espace des paramètres à explorer est alors augmenté d'une dimension. Il n'est donc pas concevable de résoudre ce problème exhaustivement dans des limites de temps raisonnables, c'est pourquoi nous n'avons exploré que quelques cas représentatifs. Nous

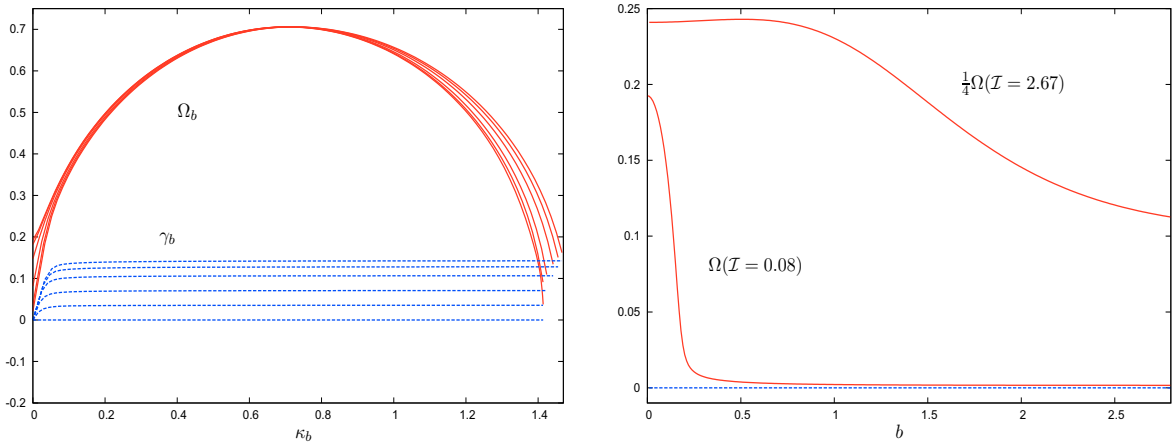


FIG. 7.7: Résultats du problème complexifié pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie ($\beta = 2$ et $\sin^2\theta_{\rm W} = 0,23$). À gauche : Relation de dispersion pour différentes valeurs du paramètre de *boost* sur le fond $\sigma = 0,7$. À droite : Effet du *boost* sur le mode homogène.

avons pu construire explicitement des solutions pour des valeurs de b fixées et étudié l'influence sur la relation de dispersion. Il s'avère que la relation $\Omega_b(\kappa_b)$ reste qualitativement similaire lorsque $b \neq 0$ que pour $b = 0$ (voir Fig. 7.7). Pour des valeurs non-nulles du courant, $\Omega_b(\kappa_b)$ commence par une valeur positive lorsque $\kappa_b = 0$, atteint un maximum puis s'éteint lorsque $\kappa_b = \kappa_{\max}(b)$. On voit également que lorsque $\mathcal{I}$ devient plus important, $\Omega_b(\kappa_b = 0)$ décroît jusqu'à atteindre zéro. On rappelle que le mode homogène $\kappa_b = 0$ est le plus dangereux puisqu'il est le seul à ne pas être supprimé par périodisation. Pour des solutions purement magnétiques ($\mathcal{I}_0 = 0$), on sait que ce mode est instable. La situation peut cependant être différente si le vortex est chargé. En effet, parfois le boost de Lorentz permet de stabiliser des solutions [137]. D'après Fig. 7.7, le taux d'accroissement du mode homogène ($\Omega_b(\kappa_b = 0)$) est plus faible pour des solutions chargées. Cependant comme il ne s'annule pas *franchement*, le mode reste instable. Par ailleurs si $\kappa_b = 0$ alors $\gamma = K = 0$. Donc une solution telle que $\Omega = 0$ signifierait $\omega = \kappa = 0$. Une telle configuration serait réelle, et donc si elle existait, on aurait dû la voir auparavant. On peut ainsi seulement dire que le vortex chargé se déstabilise plus lentement que la solution purement magnétique. Le boost augmente donc en quelque sorte la durée de vie de la solution.

On a ainsi montré d'une part que les modes négatifs sont présents quelque soit la valeur de la charge électrique $\mathcal{I}_0$, et pas seulement pour le cas purement magnétique. Les *modes propres* négatifs existant pour n'importe quelle valeur du boost b peuvent être boostés vers une solution possédant une charge différente $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\sinh B$. Le mode résultant sera un *mode boosté* proportionnel à

$$\exp\{\Omega_b \cosh(B-b)t + \Omega_b \sinh(B-b)z\} \exp\{\mathrm{i}(\gamma_B t + \kappa_B z)\}\,, \tag{7.30}$$

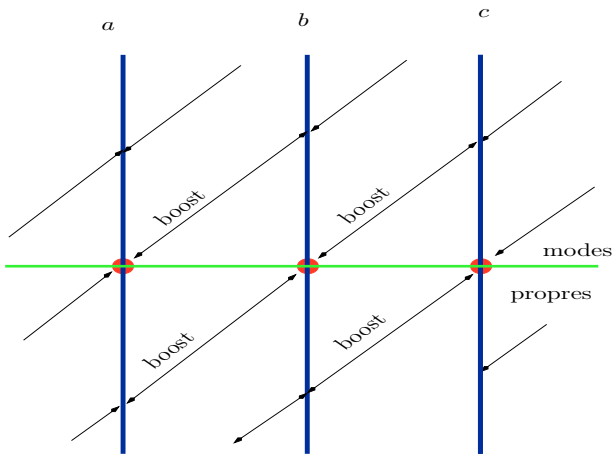


FIG. 7.8: L'ensemble des modes négatifs pour chaque vortex chargé, par exemple $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\cosh(b)$, est représenté par les lignes verticales. Les modes propres sont les points rouges. Il existe une correspondance un à un entre les modes différents de charge différentes à l'aide de boost.

où $\gamma_B = \gamma\cosh B + K\sinh B$ et $\kappa_B = K\cosh B + \gamma\sinh B$. Ainsi à chaque solution chargée $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\sinh B$ il y a des *modes propres* négatifs et une infinité de *modes boostés* négatifs pour chaque $b \neq B$. Il y a ainsi une correspondance entre les modes de différentes solutions (voir Fig. 7.8).

Puisque les *modes boostés* ne sont pas périodiques, ils ne contribuent qu'à l'instabilité de vortex supraconducteurs infiniment longs. Ils sont donc supprimés par n'importe quelle périodisation. Parmi les *modes propres* on trouve un mode *homogène* et un continuum de modes périodiques de longueur d'onde plus grande que $\lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$. Ainsi la périodisation d'une portion de vortex supraconducteur de longueur $L < \lambda_{\min}$ supprime tous les *modes propres* périodiques puisque ces modes n'ont plus suffisamment de place pour se développer. Par conséquent un segment périodique de longueur $L < \lambda_{\min}$ ne possède plus qu'un unique mode instable : le *mode propre homogène* qui tend à épaissir le vortex supraconducteur. La périodisation est une opération purement mathématique. Si on souhaite *réellement* périodiser, on doit créer un boucle de vortex supraconducteur. Contrairement à la périodisation mathématique, une vraie boucle aura une courbure. Si on est optimiste, on peut espérer que la courbure de la boucle puisse supprimer d'une façon quelconque ce mode homogène. En effet si l'instabilité amène le vortex à s'épaissir, elle ne peut pas faire grossir une boucle plus que son rayon. Bien sûr, créer une vraie boucle peut d'un autre coté faire apparaître de nouvelles instabilités. Pour donner une réponse définitive à cette question, il faudrait d'une part construire explicitement la solution toroïdale supraconductrice et d'autre part en étudier la stabilité. Une telle construction demande beaucoup de travail et sort du cadre de cette thèse. Cependant, si d'aventure ils existaient, des vortons de nature électrofaible auraient de nombreuses conséquences observationelles. Il pourraient par exemple être des candidats de matière noire ou être observables au LHC.

Conclusion

Nous avons présenté dans cette thèse, une analyse détaillée des propriétés des *vortex supraconducteurs dans le secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam*. Il s'agit de solutions stationnaires, axisymétriques des équations des champs. Elles décrivent des configurations non-abéliennes régulières, dont la densité radiale d'énergie dans le plan orthogonal à la feuille d'univers du vortex est finie. L'invariance sous les transformations de Lorentz le long de l'axe du vortex génère une famille de solutions qui sont non seulement porteuses de courant, mais également chargées électriquement. Nos nouvelles solutions généralisent tous les résultats déjà connus sur les vortex de la théorie électrofaible. On retrouve en particulier les solutions précédemment connues (Z-strings et W-strings) qui constituent un cas particulier de vortex supraconducteur lorsque le courant est nul ($\mathcal{I} = 0$). L'analyse dans la limite où le courant est grand nous a permis de comprendre comment s'organisent physiquement nos solutions. Les vortex supraconducteurs sont constitués d'un coeur compact de bosons chargés W dont la taille typique est $\sim 1/\mathcal{I}$. Le fort champ magnétique induit par le courant pousse le champ scalaire vers le *faux vide*. Contrairement à la théorie de Witten, la restauration de la symétrie n'a pas ici pour effet de détruire la supraconductivité puisque le champ scalaire n'est pas le paramètre d'ordre approprié. En effet, il s'agit plutôt du condensat de bosons chargés W, qui sont les porteurs de charge du secteur bosonique de la théorie de Weinberg-Salam. Lorsque le courant est grand, le coeur de la solution est décrit par une théorie de Yang-Mills pure dont l'invariance d'échelle est responsable de l'absence de borne supérieure au courant. Le condensat de bosons chargés qui génère le courant dont l'échelle typique est le *milliard d'Ampères*, peut être vu comme la superposition de deux fluides de bosons W^+ et W^- voyageant en spirale dans des directions opposées. Le coeur compact de bosons 'hypermassifs' est entouré d'une région ($\sim \mathcal{I}$) où la symétrie est $U(1)_{\phi_1} \times U(1)_{\phi_2}$. Au loin du coeur lorsque l'induction magnétique est suffisamment faible, la symétrie est spontanément brisée de sorte que tous les champs, à part le photon, deviennent massifs. Il ne subsiste alors que la configuration purement électromagnétique de Biot et Savart, de sorte qu'au loin on voit la configuration comme un fil électrique. Les solutions supraconductrices sont génériques de la théorie électrofaible puisqu'elle existent pour *presque toutes* les valeurs des paramètres physiques θ_W et β. En particulier, on a pu construire les solutions pour les valeurs expérimentales $\sin^2\theta_W \simeq 0,23$ et le rapport des masses du boson de Higgs et du boson neutre Z : $1,5 \leq \beta \leq 3,5$. Étant donnée l'échelle d'énergie à laquelle on travaille, il est concevable de penser que de telles solutions puissent être crées lors de collisions d'ions lourds dans des accélérateurs comme le LHC. On a vu qu'une production excessive de bosons chargé W pourraient être la signature de la désintégration d'une de nos solutions.

L'analyse de la stabilité linéaire révèle malheureusement que les solutions sont instables. Pour cette analyse, la séparation de variables appropriée mène à un problème de Schrödinger à 16 canaux dont le spectre est négatif lorsque les longueurs d'onde des perturbations dépassent un seuil critique. En effet, on a pu voir la relation de dispersion qui montre l'instabilité pour $\lambda > \lambda_{\min} = \frac{\pi}{\kappa_{\max}}$. Il est possible d'améliorer les propriétés de stabilité des solutions en imposant des conditions aux bords périodiques sur un segment suffisamment court de vortex. En effet si le vortex est assez court, l'instabilité n'a pas suffisamment de place pour ce développer. Ainsi, tous les modes *propres* dépendant de z déformeront le vortex sans pour autant le détruire menant au final à une solution *saucissonnée*. Cependant la périodisation n'est pas suffisante pour stabiliser totalement le vortex. En effet il subsiste un mode *homogène* (indépendant de z) compatible avec n'importe quelle période qui ne peut être éliminé par la périodisation. L'imposition des conditions aux bord périodiques est une 'astuce' mathématique pour supprimer les modes instables qui décrit *qualitativement* un vorton. Néanmoins les conditions périodiques ne décrivent pas réellement une telle configuration. En effet, une vraie boucle faite d'un vortex supraconducteur devrait avoir une courbure. Si le rayon de la boucle est grand, les effets de courbure sont minimes et donc on peut localement décrire la boucle comme un vortex supraconducteur 'droit'. Cependant si le rayon est petit les effets de courbure ne peuvent plus être négligés. Puisqu'il faut considérer une petite boucle pour supprimer les modes inhomogènes, les effets de courbure seront importants et peut-être que les propriétés de stabilités seront modifiées. Les résultats négatifs quant à l'instabilité des vortex supraconducteurs n'excluent donc pas totalement l'existence possible de vortons dans la théorie électrofaible.

On peut émettre une conjecture qui sort du cadre présent de la thèse et s'adresse à de futurs travaux. Comme il faut faire de petites boucles pour se débarrasser des modes instables inhomogènes, il est possible que les effets de courbure et les effets non-linéaires puissent supprimer l'instabilité et donner lieu à des configurations *stables*. La possible existence de configurations telles que les vortons dans la théorie électrofaible est très stimulante, puisque si elles existent, elles doivent pouvoir être observées expérimentalement. De telles configurations pourraient par exemple être des candidats de matière noire. Bien évidemment il ne s'agit là que de conjectures. De plus la construction de solutions toroïdales est un défi numérique. En effet à ce jour les seules solutions de ce type ont été construites dans le cadre du modèle de Witten lorsque les champs de jauge découplent [68, 138, 69] (voir [68] pour une revue détaillée sur les vortons).

Annexes

Annexe A

Méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles avec conditions aux bords

« Ordinateur, ... si tu n'ouvres pas immédiatement cette écoutille, je fonce à tes banques de données principales et je te reprogramme avec une très grosse hache, compris ? »
DOUGLAS ADAMS Le guide du routard galactique

Nous aurons vu, tout au long de ce manuscrit de thèse, de nombreux systèmes d'équations différentielles décrivant les équations des champs de diverses théories. En général, les équations des champs sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles (non-linéaires). Cependant un choix judicieux de séparation de variables permet souvent, tout en rendant compte des symétries du problème, de se restreindre à l'étudie de systèmes d'équations différentielles ordinaires (non-linéaires). Ces systèmes d'équations sont soumis à des contraintes d'ordre physique (finitude de l'énergie, régularité *etc* ...) qui sont généralement imposées sur les bords du domaine d'intégration. Pour les problèmes qui nous concernent le domaine d'intégration est généralement la demi-droite infinie $[0, \infty)$ qui décrit le la variable radiale des coordonnées polaires.

Hormis certains cas très spécifiques, des solutions analytiques n'existent pas. Il faut donc recourir aux méthodes d'analyse numérique pour résoudre de tels systèmes. La résolution numérique d'un problème de conditions aux bords se fait typiquement en deux étapes

a. l'intégration de l'équation différentielle.

b. la prise en compte des contraintes.

L'intégration de l'équation différentielle est relativement simple. C'est la prise en compte des contraintes sur les bords qui est moins triviale.

A.1 Résolution numérique des équations différentielles

La théorie des équations différentielles ordinaires et l'analyse numérique sont deux vastes domaines des mathématiques. C'est pourquoi nous n'abordons ici que quelques

concepts clés utilisés pour la résolution des problèmes que nous avons eu à traiter. Il existe de nombreux excellents ouvrages sur lesquels il sera possible de s'appuyer. Au sujet des équations différentielles ordinaires on peut par exemple se référer à [109, 110]. Des ouvrages d'analyse numérique seront également utiles [111, 112, 139].

A.1.1 Problème aux valeurs initiales

En général un système d'équation différentielles ordinaires sur un intervalle quelconque $[a, b]$ s'écrit sous la forme

$$y'(x) = f(x, y) \qquad \text{et la condition initiale} \qquad y(x = a) = y_0 \tag{A.1}$$

avec y, y_0 et f qui sont en général des vecteurs. f une fonction arbitraire (qui peut être non-linéaire) dépendant des différentes composantes de la fonction inconnue à déterminer y. Il existe de nombreuses méthodes pour intégrer des équations différentielles avec différentes précisions pour une discrétisation donnée de l'intervalle d'intégration. On présente ici la méthode d'intégration la plus simple : *la méthode d'Euler*. Cette méthode est peu précise puisque pour un pas h de la discrétisation, elle donne la valeur de y au point suivant avec une précision de l'ordre de h^2 :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + o(h^2)\,. \tag{A.2}$$

Ainsi, avec les données initiales y_0, la solution est construite au point x_1 après une itération. La solution est propagée de proche en proche. Dans les faits, nous n'utilisons pas une telle méthode, puisqu'elle est imprécise et converge lentement. Parmi les méthodes plus précises, il faut citer les méthodes de Runge-Kutta. Cependant ces méthodes restent assez lentes. C'est pourquoi dans notre programme de *multishooting*, nous avons utilisé un intégrateur à pas variable. Cet intégrateur fait des grands pas quand la solution varie peu, et de petits pas lorsqu'elle varie beaucoup. Pour plus de détails voir par exemple [139].

A.1.2 Problème avec conditions aux bords – Principe du Multishooting

On doit traiter des problèmes avec conditions aux bords et non des problèmes aux valeurs initiales. Il faut donc adapter la méthode d'intégration pour qu'elle tienne compte des différentes conditions sur les bords. Supposons par exemple que la solution au début de l'intervalle est inconnue, mais que la solution est connue en b [1]. Il faut par exemple procéder par la méthode de tir (*shooting*). C'est-à-dire qu'on intègre à partir d'une donnée initiale $y_0^{(i=0)}$ puis après l'intégration on compare $y^{(i=0)}(b)$ avec la valeur attendue $y(b)$. On détermine ensuite une nouvelle donnée initiale $y_0^{(i=1)}$ qui donne $y^{(i=1)}(b)$ et qui est à nouveau comparée à la valeur attendue *etc* ... L'ajustement de la donnée initiale à la i^{e} itération est par exemple donné par la méthode de bissection ou par la méthode bien Newton. Ces méthodes ne sont ni très rapides, ni très précises on leur préfère donc en

[1] Une façon intelligente serait alors d'intégrer de b vers a. Notons qu'en général on considère des systèmes d'équation et les conditions ne sont pas toujours connues sur le même bord. C'est pourquoi en général on choisit de définir un sens quelque soit le problème considéré.

pratique la méthode hybride de Powell. Elle permet de trouver les zéros d'une fonction dans un espace multidimensionnel rapidement et avec précision. La méthode de tir consiste donc à modifier les valeurs initiales afin de satisfaire les conditions aux bords, selon un algorithme prédéfini. La méthode de tir a de fortes limitations. En effet, pour peu que le choix initial $y_0^{(i=0)}$ soit trop éloigné de la vraie valeur, il y a de grandes chances que les itérations (sur i) ne convergent pas. Afin de s'affranchir de cette limitation on généralise la méthode de *shooting* à la méthode de *multishooting* [112]. La méthode de *multishooting* suit globalement le même principe que la méthode de *shooting* simple [112].Elle est plus coûteuse en temps de calcul mais présente l'avantage certain d'être moins sensible aux instabilités numériques et au choix initial $y_0^{(i=0)}$. L'idée principale est de segmenter le domaine d'intégration $[a, b]$ en pluieurs sous-intervalles. Pour chaque sous-intervalle, il faut résoudre le problème aux valeurs initiales et imposer que les fonctions soient continues sur les noeuds. On augmente ainsi artificiellement la taille du système à résoudre et c'est ce qui accroît le temps de calcul. En revanche cette procédure augmente le nombre de degrés de liberté et rend le problème moins sensible au choix initial de $y_0^{(i=0)}$. De plus chaque sous-intervalle étant plus court, on réduit l'erreur due à l'intégration et minimise les chances de tomber sur une singularité numérique. On peut décrire formellement le problème à résoudre :

Soit le système d'équations différentielles défini sur un intervalle $[a, b]$

$$y'(x) = f(x, y) \qquad \text{et la condition sur les bords} \qquad r(y(a), y(b)) = 0\,. \tag{A.3}$$

Le domaine $[a, b]$ est segmenté en $m-1$ sous-intervalles. L'intégration est faite sous chacun des sous intervalles $[x_k, x_{k+1})$ $(k = 1, \ldots, m-1)$. La solution sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1})$ du problème avec la condition initiale $y(x_k) = s_k$ est notée $y(x; x_k, s_k)$. Le problème (A.3) est représenté schématiquement sur la figure Fig. A.1. Avec une telle segmentation, il faut non seulement résoudre la contrainte sur les bords $r(y(a), y(b)) = 0$, mais aussi imposer que toutes les fonctions soient continues sur les noeuds entre chaque sous-intervalle. Le problème consiste alors à déterminer le vecteur des paramètres indépendants s_k $(k = 1, \ldots, m)$ tel que les fonctions

$$\mathbf{y} := y(x; x_k, s_k)\,, \quad x \in [x_k, x_{k+1}) \quad k = 1, \ldots, m-1 \tag{A.4}$$

soient continues partout, et que la contrainte $r(y(a), y(b)) = 0$ soit satisfaite. Ces conditions s'écrivent

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s_1, s_2) := y(x_2; x_1, s_1) - s_2 \\ F_2(s_2, s_3) := y(x_3; x_2, s_2) - s_3 \\ \vdots \\ F_{m-1}(s_{m-1}, s_m) := y(x_m; x_{m-1}, s_{m-1}) - s_m \\ r(s_1, s_m) \end{bmatrix} = 0\,. \tag{A.5}$$

Il faut donc résoudre le système linéaire $\mathbf{F}(s) = 0$ de dimension m en ajustant les m paramètres s_k. En simple, on a $m-1$ problèmes aux valeurs initiales et on demande à ce qu'à la fin la solution soit continue et qu'elle satisfasse la contrainte globale. Pour la résolution numérique des problèmes, on a écrit l'algorithme précédemment exposé sous la forme d'une classe abstraite en C++, `ode_bv_multishoot` . L'intégration numérique se fait par défaut à l'aide d'un intégrateur à pas adaptatif (encodé dans Gnu Scientific

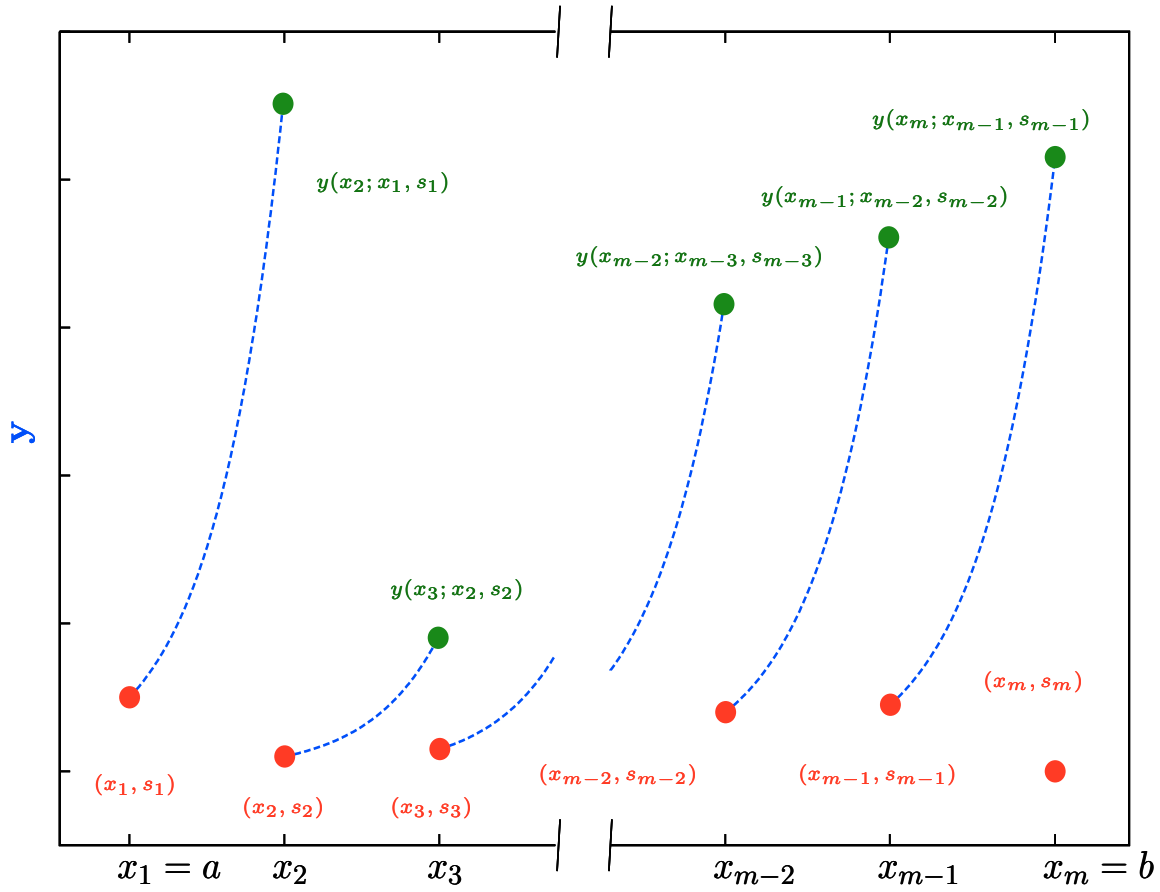


FIG. A.1: Représentation schématique d'un problème aux conditions aux bords résolu par *multishooting*.

Library). Une fois l'itération finie, on peut définir la fonction $\mathbf{F}(s)$,. Le système linéaire multidimensionnel $\mathbf{F}(s) = 0$ est alors résolu par la méthode hybride de Powell. La classe abstraite `ode_bv_multishoot` qui permet de résoudre les problèmes avec des conditions aux bords avec un grande efficacité est inclue dans la bibliothèque de calcul scientifique $O2scl$[2].

Exemple On souhaite par exemple calculer la solution de l'équation différentielle

$$y' = y \quad \text{avec} \quad y(0) = 1 \tag{A.6}$$

dont on connaît la solution analytique. En donnant un ensemble de paramètres initiaux $s(k)$ sur les noeuds, il est possible de construire la première solution Fig. A.2 qui est discontinue. Au final lorsque l'algorithme a convergé, la solution est continue et correspond à la solution analytique connue (la fonction exponentielle). Il faut remarquer que cet exemple est un

[2]http ://o2scl.sourceforge.net/o2scl/html/classode__bv__multishoot.html. L'exemple simple du calcul des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène est fourni avec.

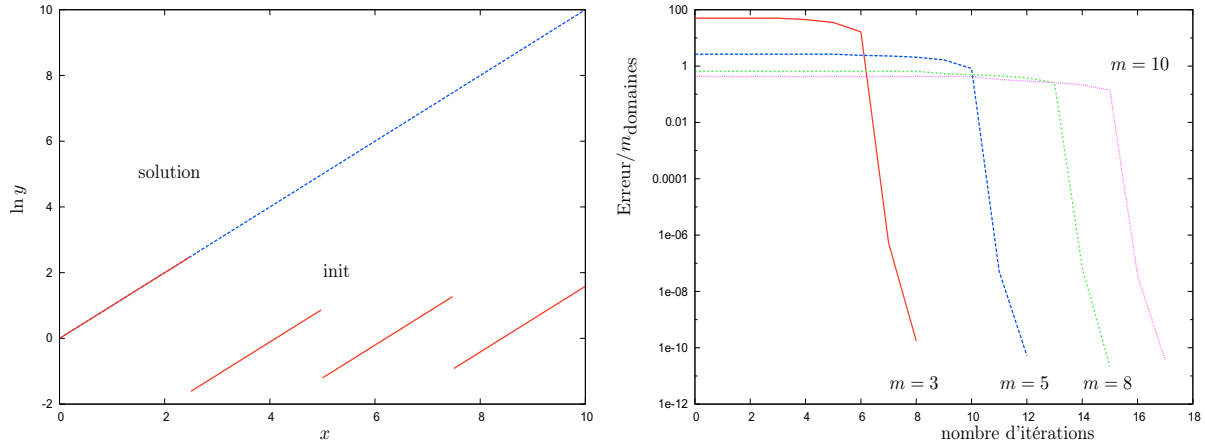


FIG. A.2: À gauche : Problème avec conditions aux bords traité par multishooting. On a représenté un choix initial discontinu, et la solution qui est continue. À droite : Convergence de la méthode.

problème aux conditions initiales. D'un point de vue pratique, le problème aux valeurs initiales est le problème dont la condition en a est connue et le bord b est libre. Quoiqu'il en soit le problème est résolu exactement de la même façon qu'un problème aux conditions aux bords. On voit d'après Fig. A.2, que plus le nombre de domaines est grand, plus il faut d'itérations pour converger. Cependant beaucoup de domaines rendent le système très peu sensible au choix initial $y_0^{i=0}$. De manière générale, le choix du nombre et de la taille des domaines est assez empirique. L'étape la plus difficile étant d'*accrocher* une solution, il est possible d'avoir recours à des *astuces* pour construire la solution. On peut par exemple se restreindre à un domaine d'intégration *petit* (typiquement de l'ordre de l'unité) avec beaucoup de domaines. (avoir un grand nombre de domaines équivaut à une quasi-linéarisation du système). Ainsi le système est peu sensible aux aléas du numérique et permet d'*accrocher* une solution plus facilement. Ensuite la taille du domaine est augmentée itérativement (et le nombre de domaines réduit). Au final la *vraie* solution numérique existe sur un intervalle suffisamment grand pour que plus aucune des quantités globales ne varie, indiquant ainsi que la solution numérique est atteinte.

La convergence des itérations la solution numérique vers ne constitue en aucun cas une preuve mathématique de l'existence d'une solution. Cependant, nous avons à notre disposition plusieurs *tests* qui permettent d'accroître la confiance dans nos résultats. Par exemple, les solutions ne doivent dépendre ni du nombre de domaines, ni de la taille du domaine d'intégration, ni de la position des noeuds x_k. Ainsi en faisant varier ces paramètres, les grandeurs globales (numériques et physiques) doivent rester inchangées, ce qui permet de contrôler la justesse du résultat.

A.2 Exemple concret – ANO

Un bon exercice est de résoudre un cas concret physique, relativement simple. On choisit de présenter la résolution des équations du vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen. La simplicité

de cette solution est toute relative puisqu'il s'agit tout de même d'un problème non-linéaire couplé. Cependant, on peut mettre en place sans trop de difficulté la méthodologie de résolution qui a été utilisé pour les problèmes beaucoup plus complexes (on a poussé jusqu'à des systèmes de 32 équations du second ordre, c'est-à-dire un problème de taille $64 \times m$). Soit le problème d'Abrikosov-Nielsen-Olesen

$$\rho \left(\frac{v'_{\text{ANO}}}{\rho} \right)' = \frac{v_{\text{ANO}}}{2} f_{\text{ANO}}^2 \,, \qquad \frac{1}{\rho} \left(\rho f'_{\text{ANO}} \right)' = \left[\frac{v_{\text{ANO}}^2}{\rho^2} + \frac{\beta}{4} (f_{\text{ANO}}^2 - 1) \right] f_{\text{ANO}} \,. \tag{A.7}$$

Dont les amplitudes satisfont les conditions aux bords $n \leftarrow v_{\text{ANO}} \rightarrow 0$ et $0 \leftarrow f_{\text{ANO}} \rightarrow 1$. En réalité, les termes dominants ne sont pas suffisants pour caractériser la solution. En effet, il faut avoir le bon nombre de paramètres ajustables afin de déterminer uniquement la solution numérique. Il faut satisfaire $4 \times (m-1)$ conditions de continuité sur les fonctions et leurs dérivées plus la contrainte. Il faut alors 4 paramètres libres sur les bords. Il faut donc d'une part considérer la série de Taylor régulière à l'origine et le développement linéaire autour du vide à l'infini. On trouve à la fois des solutions bornées et non bornées. Pour le problème physique, on ne conserve que les solutions bornées. On trouve ainsi

$$n + a_1 \rho^2 + \cdots \leftarrow v_{\text{ANO}} \rightarrow b_1 \sqrt{\rho} \mathrm{e}^{-\rho/\sqrt{2}} \,, \quad a_2 \rho^n \leftarrow f_{\text{ANO}} \rightarrow 1 + \frac{b_2}{\sqrt{\rho}} \mathrm{e}^{-\beta\rho/\sqrt{2}} \,. \tag{A.8}$$

On voit que le problème est singulier (numériquement) en $\rho = 0$. Il faut donc utiliser une astuce, *la désingularisation*, pour garder numériquement le point singulier $\rho = 0$. Afin de résoudre le système numériquement, il faut tout d'abord le mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre. Pour pouvoir intégrer à partir du point $\rho = 0$ exactement, on procède au changement de variables

$$\begin{aligned}
n \leftarrow y_1 = v_{\text{ANO}} &\rightarrow \dots \,, \\
2a_1 \leftarrow y_2 = \frac{v'_{\text{ANO}}}{\rho} &\rightarrow \dots \,, \\
a_2 \leftarrow y_3 = \frac{f_{\text{ANO}}}{\rho^n} &\rightarrow \dots \,, \\
n a_2 \leftarrow y_4 = \frac{f'_{\text{ANO}}}{\rho^{n-1}} &\rightarrow \dots \,.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Une telle façon d'encoder les conditions aux bords rend triviale la contrainte supplémentaire, il ne faut alors satisfaire que les conditions de continuité. Le système différentiel du premier ordre à résoudre est alors

$$\begin{aligned}
y'_1 &= \rho y_2 \,, \\
y'_2 &= \frac{\mathrm{Rhs}(v_{\text{ANO}})}{\rho} \,, \\
y'_3 &= \frac{y_4 - n y_3}{\rho} \,, \\
y'_4 &= \frac{\mathrm{Rhs}(f_{\text{ANO}})}{\rho^{n-1}} + n \frac{y_4}{\rho} \dots \,,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$\forall\ \rho > 0$ et $y_1' = y_2' = y_3' = y_4' = 0$ si $\rho = 0$ avec les conditions sur le bord gauche (A.9) et celles de (A.8), adaptées au changement de variable, à droite. Ainsi il est possible de tenir compte du point singulier $\rho = 0$ bien que le calcul ne soit à priori pas possible numériquement. On appelle cette opération une *désingularisation*. On a appliqué cette technique à chacune des équations différentielles qu'on a eu à résoudre. Ayant posé le système *équivalent* désingularisé, il faut déterminer les quatre constantes d'intégration a_1 , a_2 , b_1 et b_2 de sorte que la solution finale, $(y_1, y_2, y_3, y_4)(\rho)$, soit continue. Il faut ensuite passer le problème correctement posé au programme de résolution de la c lasse abstraite `ode_bv_multishoot`. Pour un choix initial des constantes d'intégrations et des valeurs des fonctions sur les noeuds, relativement trivial, le programme converge très rapidement (typiquement $10^{-2} \sim 10^{-4}$ secondes) et renvoie des résultats dont la précision est de l'ordre de $10^{-6} \sim 10^{-7}$. Bien évidemment lorsque le système devient très grand, le temps de calcul n'est pas si faible et il devient une réelle contrainte.

Une fois la solution numérique obtenue il faut s'assurer de la validité de celle-ci. En effet, si on intègre sur un intervalle fini $[0, x_{max}]$, il faut par exemple s'assurer que la solution ne dépend pas du choix de x_{max} , ni des sous-intervalles. Pour cela il faut vérifier qu'aucune grandeur globale, comme l'énergie, ne varie si on déplace les noeuds des sous-intervalles ou bien les bornes du domaine d'intégration. On a pu se convaincre que c'était bien le cas à chacune de nos investigations numériques. Bien que ces tests ne fasse pas office de preuve, ils confortent dans l'idée que la solution 'doit être correcte'.

Annexe B

Compléments sur l'analyse dans le régime des faibles courants du vortex supraconducteur

Nous présentons dans cet appendice, le détail de l'analyse perturbative dans le régime de faible courant. Les détails calculatoires de cette analyse ne sont en effet pas indispensables pour comprendre la démarche. Cependant ils sont nécessaires pour démontrer rigoureusement les résultats exposés dans la section Sec. 5.2.

Pour l'analyse perturbative dans le régime de faible courant, on introduit le développement en série de puissance d'un paramètre ϵ petit (5.7), dans les équations du mouvement (4.6)–(4.9). L'ordre zéro donne les équations de la solution ANO, tandis qu'au premier ordre on trouve la déviation par rapport à la solution sans courant (Z-string). C'est-à-dire la stabilité du plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans la théorie électrofaible. On a vu qu'au second ordre de ce développement, il faut imposer les conditions (5.15) afin d'éliminer les termes séculaires. Il reste encore à cet ordre plusieurs équations qui ne possèdent pas de termes séculaires, mais qui doivent être résolues afin de reconstruire le twist (5.18).

B.0.1 Corrections au second ordre du développement en séries

Au second ordre du développement en séries du paramètre ϵ, les équations du mouvement découplent partiellement. Un des système d'équations (5.14) contient un terme séculaire proportionnel à $\sigma^{(1)}$ qui doit être éliminé

$$\mathcal{D}^{\mathrm{z}}\mathcal{Y}^{(2)} = -2\sigma^{(1)}\mathcal{M}\mathcal{Y}^{(1)}\,, \qquad\qquad \mathrm{Wr}\,\mathcal{Y}^{(2)} = -2\sigma^{(1)}u_1^{(1)}\,. \tag{B.1}$$

La matrice $\mathcal{M}$ qui apparaît dans le terme séculaire (B.1) est définie comme

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\sigma^{(0)}}\begin{pmatrix} \sigma^{(0)\,2} & 0 & U_2 \\ 0 & \sigma^{(0)\,2} & U_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Pour satisfaire identiquement les conditions d'absence du terme séculaire (5.15), il faut à la fois que $\sigma^{(1)}=0$ et $\mathcal{Y}^{(2)}=0$. Une fois ces conditions remplies, il ne reste plus de termes séculaires à éliminer à cet ordre. Cependant, il reste quatre sous-systèmes d'équations indépendantes contenant des termes de source incluant les amplitudes des ordres inférieurs. Ainsi, les amplitudes $f_1^{(2)}$, $u_{\rm A}^{(2)}$, $v_{\rm A}^{(2)}$, $u_{\rm Z}^{(2)}$, $v_{\rm Z}^{(2)}$, doivent satisfaire les équations

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right)+\frac{v_{\rm ANO}^2}{\rho^2}+\frac{\beta}{4}(3f_{\rm ANO}^2-1)\right]f_1^{(2)}+\frac{\sqrt{2}v_{\rm ANO}f_{\rm ANO}}{\rho}v_{\rm Z}^{(2)}=\mathcal{S}_f\,,\\
&\left[-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right)+\frac{1}{\rho^2}+\frac{f_{\rm ANO}^2}{2}\right]v_{\rm Z}^{(2)}+\frac{\sqrt{2}v_{\rm ANO}f_{\rm ANO}}{\rho}f_1^{(2)}=\mathcal{S}_{vz}\,,\\
&\left[-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right)+\frac{f_{\rm ANO}^2}{2}\right]u_{\rm Z}^{(2)}=\mathcal{S}_{uz}\,,\left[-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right)\right]u_{\rm A}^{(2)}=\mathcal{S}_{ua}\,,\left[-\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right)+\frac{1}{\rho^2}\right]v_{\rm A}^{(2)}=\mathcal{S}_{va}
\end{aligned}\tag{B.3}$$

où les termes de source s'exprime en fonction des amplitudes des ordres dominants. Les termes de source s'écrivent

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f&=\frac{gf_{\rm ANO}}{2}\left(v_1^{(1)\,2}+u_1^{(1)\,2}+\frac{\beta}{2g^2}f_2^{(1)\,2}\right)+f_2^{(1)}\left(\frac{2g'^{\,2}v_{\rm ANO}+N}{\sqrt{2}\rho}v_1^{(1)}-\frac{\sigma^{(0)}}{\sqrt{2}}u_1^{(1)}\right),\\
\mathcal{S}_{vz}&=\sqrt{2}g\frac{2g^2v_{\rm ANO}-N}{\rho}u_1^{(1)\,2}+\frac{g'^{\,2}-g^2}{\rho g\sqrt{2}}\left((g'^{\,2}-g^2)v_{\rm ANO}+N\right)f_2^{(1)\,2}\\
&\quad+\left(g'^{\,2}f_{\rm ANO}f_2^{(1)}-g\sigma^{(0)}\sqrt{2}u_1^{(1)}\right)v_1^{(1)}\,,\\
\mathcal{S}_{uz}&=\sigma^{(0)}\left(\frac{g'^{\,2}-g^2}{2g}f_2^{(1)\,2}-gv_1^{(1)\,2}\right)+\left(\frac{g'^{\,2}f_{\rm ANO}}{\sqrt{2}}f_2^{(1)}-\frac{2g^2v_{\rm ANO}-N}{\rho}gv_1^{(1)}\right)u_1^{(1)}\,,\\
\mathcal{S}_{ua}&=g'\left(-\sigma^{(0)}(f_2^{(1)\,2}+v_1^{(1)\,2})+\left(\frac{2g^2v_{\rm ANO}-N}{\rho}v_1^{(1)}+\frac{gf_{\rm ANO}}{\sqrt{2}}f_2^{(1)}\right)u_1^{(1)}\right),\\
\mathcal{S}_{va}&=g'\sqrt{2}\left(\frac{(g'^{\,2}-g^2)v_{\rm ANO}+N}{\rho}f_2^{(1)\,2}-\frac{2g'^{\,2}v_{\rm ANO}+N}{\rho}u_1^{(1)\,2}\right.\\
&\quad\left.+\left(\sigma^{(0)}u_1^{(1)}+\frac{gf_{\rm ANO}}{\sqrt{2}}f_2^{(1)}\right)v_1^{(1)}\right).
\end{aligned}\tag{B.4}$$

Remarquons que les deux premières équations de (B.3) décrivent des déviations dans la famille des solution d'Abrikosov-Nielsen-Olesen ayant comme source les déviations au premier ordre. Afin que les solutions soient bornées, elles doivent satisfaire les conditions aux points réguliers singuliers $0\leftarrow\rho\rightarrow\infty$

$$\begin{aligned}
&a_1\rho^n\leftarrow f_1^{(2)}\rightarrow\frac{-\mathcal{S}_f(\infty)}{m_{\rm H}^2}+\frac{b_1{\rm e}^{-m_{\rm H}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,,\quad -\frac{g}{g'}a_3\leftarrow u_{\rm A}^{(2)}\rightarrow b_4+b_5\ln\rho\,,\quad a_4\rho\leftarrow v_{\rm A}^{(2)}\rightarrow\frac{b_6}{\rho}\,,\\
&a_2\rho\leftarrow v_{\rm Z}^{(2)}\rightarrow\frac{-\mathcal{S}_{vz}(\infty)}{m_{\rm Z}^2}+\frac{b_2{\rm e}^{-m_{\rm Z}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,,\qquad a_3\leftarrow u_{\rm Z}^{(2)}\rightarrow\frac{-\mathcal{S}_{uz}(\infty)}{m_{\rm Z}^2}+\frac{b_3{\rm e}^{-m_{\rm Z}\rho}}{\sqrt{\rho}}
\end{aligned}\tag{B.5}$$

où les a et b sont des constantes d'intégrations. Ainsi, les équations (B.3) sont résolues en imposant les bonnes conditions (B.5). Toutes les amplitudes entrant dans la décomposition (5.7) ont été reconstruites jusqu'au deuxième ordre en ϵ. On a présenté Fig. B.1 les amplitudes solutions de chacune des équations pour les ordres allant de zéro à deux. Il reste alors à trouver l'expression de la correction au second ordre du twist.

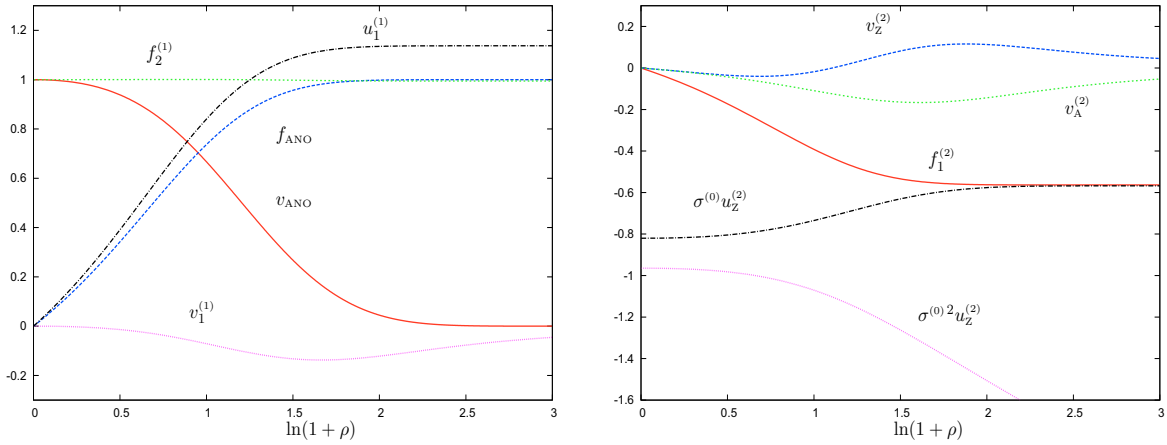


FIG. B.1: Les amplitudes solutions des équations des différents ordres pour les valeurs physiques des paramètres de la théorie ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$). À gauche : Les solutions des ordres zéro pour $n = 1$ et un pour $n = \nu = 1$. À droite : Les amplitudes solutions des équations du deuxième ordre pour $n = \nu = 1$.

B.0.2 Corrections au troisième ordre du développement en séries

Afin de déterminer la correction du twist, il faut considérer les solutions au troisième ordre en ϵ. Pour supprimer les termes séculaires à cet ordre, on trouve la condition (5.18)

$$\sigma^{(2)} = \frac{\langle \mathcal{Y}^{(1)}, \mathcal{S}^{(3)} \rangle}{2\langle \mathcal{Y}^{(1)}, \mathcal{M}\mathcal{Y}^{(1)} \rangle} \,. \tag{B.6}$$

La matrice $\mathcal{M}$ est donnée (B.2) et le vecteur source s'écrit

$$\mathcal{S}^{(3)} = \begin{pmatrix} f_2^{(1)} \left(\frac{v_1^{(1)2}+u_1^{(1)2}}{4} + \frac{\beta f_2^{(1)2}}{8g^2} + \frac{(g'^{\,2}-g^2)v_{\rm ANO}+N}{\rho^2} \left(v^{(2)} - v_3^{(2)}\right) + \dots \right. \\ \left. \cdots + \sigma^{(0)2} \left(u_3^{(2)} - u^{(2)}\right) + \frac{\beta f_{\rm ANO} f_1^{(2)}}{4g} \right) + S_{fv} v_1^{(1)} + S_{fu} u_1^{(1)} \\ S_{fv} f_2^{(1)} + v_1^{(1)} \left(\frac{f_2^{(1)2}}{4} + 2\sigma^{(0)2} u_3^{(2)} + \frac{g f_{\rm ANO} f_1^{(2)}}{2} \right) + S_{vu} u_1^{(1)} \\ S_{fu} f_2^{(1)} + + S_{vu} v_1^{(1)} + u_1^{(1)} \left(\frac{f_2^{(1)2}}{4} + 2v_3^{(2)} \frac{2g^2 v_{\rm ANO} - N}{\rho} + \frac{g f_{\rm ANO} f_1^{(2)}}{2} \right) \end{pmatrix} , \tag{B.7}$$

avec les notations

$$S_{fv} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \left(\frac{2g'^{\,2} v_{\rm ANO} + N}{2} f_1^{(2)} + g f_{\rm ANO} v^{(2)} \right) , \qquad S_{fu} = \frac{\sigma^{(0)}}{\sqrt{2}} \left(g f_{\rm ANO} u^{(2)} - \frac{f_1^{(2)}}{2} \right) ,$$
$$S_{vu} = -\frac{\sigma^{(0)}}{\rho} \left((2g^2 v_{\rm ANO} - N) u_3^{(2)} + v_3^{(2)} \right) . \tag{B.8}$$

Comme tous les éléments entrant dans le produit scalaire (B.6) qui défini la correction au twist sont définis et connus numériquement, il est à présent possible de calculer la correction $\sigma^{(2)}$ en utilisant la définition (5.12) du produit scalaire. Ainsi, tous les éléments de l'approximation (5.7) sont connus. Les amplitudes et le twist corrigés sont reconstruits numériquement et présentés Fig. 5.11.

Annexe C

Détails de l'opérateur des perturbations

« *Lasciate Ogni Speranza, Voi Ch'Entrate* »

DANTE

Dans cet appendice, nous présentons certains détails omis dans la troisième partie. En particulier on verra le détail de l'opérateur de Schrödinger (6.17). On discutera ensuite des détails de l'analyse de stabilité dans le régime de faibles courants.

C.1 Allure explicite de l'opérateur de Schrödinger

Dans la partie principale du manuscrit, l'opérateur des perturbations est écrit de façon implicite. La paramétrisation (6.15) de la séparation de variables (6.6) permet de réécrire les perturbations physiques sous la forme d'un opérateur de Schrödinger à 16 équations.

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho\Psi'\right)' - \mathcal{U}(\kappa, m|\rho)\Psi = \Lambda\Psi \tag{C.1}$$

où Ψ est le vecteur propre à 16 composantes (6.16), $\Lambda = -\omega^2$ la valeur propre et $\mathcal{U}(\kappa, m|\rho)$ la matrice potentielle symétrique 16×16. Le vecteur propre et la matrice potentielle s'écrivent symboliquement

$$\Psi = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{Z}} \\ \vec{\mathcal{A}} \\ \vec{\mathcal{W}}^+ \\ \vec{\mathcal{W}}^- \\ \vec{\mathcal{H}} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}(\kappa, m|\rho) = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathcal{Z}} & \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{A}} & \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{W}^+} & \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{W}^-} & \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{H}} \\ \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{A}} & \Delta_{\mathcal{A}} & \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{W}^+} & \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{W}^-} & \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{H}} \\ \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{W}^+} & \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{W}^+} & \Delta_{\mathcal{W}^+} & \Gamma_{\mathcal{W}\mathcal{W}} & \Gamma_{\mathcal{W}^+\mathcal{H}} \\ \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{W}^-} & \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{W}^-} & \Gamma_{\mathcal{W}\mathcal{W}} & \Delta_{\mathcal{W}^-} & \Gamma_{\mathcal{W}^-\mathcal{H}} \\ \Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{H}} & \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{H}} & \Gamma_{\mathcal{W}^+\mathcal{H}} & \Gamma_{\mathcal{W}^-\mathcal{H}} & \Delta_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

où les composantes du vecteur propre sont

$$\vec{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{Z}_+ \\ \mathcal{Z}_- \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{A}_+ \\ \mathcal{A}_- \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathcal{W}^{\pm}} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_0^{\pm} \\ \mathcal{W}_+^{\pm} \\ \mathcal{W}_-^{\pm} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_1^- \\ h_2^+ \\ h_2^- \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

et les sous-matrices diagonales sont $\Delta_{\mathcal{Z}} = \mathrm{diag}\left(\Delta_0^{\mathcal{Z}}, \Delta_{+1}^{\mathcal{Z}}, \Delta_{-1}^{\mathcal{Z}}\right)$, $\Delta_{\mathcal{A}} = \mathrm{diag}\left(\Delta_0^{\mathcal{A}}, \Delta_{+1}^{\mathcal{A}}, \Delta_{-1}^{\mathcal{A}}\right)$ et

$$\Delta_{\mathcal{W}^\pm} = \begin{pmatrix} \Delta_0^{\mathcal{W}^\pm} & \pm\mathcal{Q} & \pm\mathcal{Q} \\ \pm\mathcal{Q} & \Delta_{+1}^{\mathcal{W}^\pm} & 0 \\ \pm\mathcal{Q} & 0 & \Delta_{-1}^{\mathcal{W}^\pm} \end{pmatrix}, \qquad \Delta_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \Delta_+^{h_1} & V_1 & V_+ & V_0 \\ V_1 & \Delta_-^{h_1} & V_0 & V_- \\ V_+ & V_0 & \Delta_+^{h_2} & V_2 \\ V_0 & V_- & V_2 & \Delta_-^{h_2} \end{pmatrix}. \tag{C.4}$$

Rappelons que $\eta = 0, \pm 1$ représente les différents degrés de polarisation des amplitudes. Les éléments des sous-matrices diagonales sont

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta^{\mathcal{Z}} &= \frac{g^2 v_1^2 + (m-\eta)^2}{\rho^2} + g^2\sigma^2 u_1^2 + \kappa^2 + \frac{1}{2}(f_1^2 + f_2^2) - 2g^2 g'^2 f_2^2\,, \\
\Delta_\eta^{\mathcal{A}} &= \frac{g'^2 v_1^2 + (m-\eta)^2}{\rho^2} + g'^2\sigma^2 u_1^2 + \kappa^2 + 2g^2 g'^2 f_2^2, \\
\Delta_\eta^{\mathcal{W}^\pm} &= \frac{v_1^2/2 + (v_3 \pm (m-\eta))^2}{\rho^2} \pm 2\eta\frac{v_3'}{\rho} + \frac{\sigma^2 u_1^2}{2} + (\sigma u_3 \mp \kappa)^2 + \frac{g^2}{2}(f_1^2 + f_2^2)\,, \\
\Delta_\pm^{h_1} &= \frac{v_1^2/4 + \left(\frac{v+v_3}{2} \mp m\right)^2}{\rho^2} + \left(\frac{\sigma u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}(u+u_3) \pm \kappa\right)^2 + \frac{\beta}{4}(2f_1^2 + f_2^2 - 1) \\
&\quad + \frac{f_1^2}{4} + \frac{g^2 f_2^2}{2}\,, \\
\Delta_\pm^{h_2} &= \frac{v_1^2/4 + \left(\frac{v-v_3}{2} \mp m\right)^2}{\rho^2} + \left(\frac{\sigma u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}(u-u_3) \pm \kappa\right)^2 + \frac{\beta}{4}(f_1^2 + 2f_2^2 - 1) \\
&\quad + \frac{f_2^2}{4} + \frac{g^2 f_1^2}{2}\,, \\
\mathcal{Q} &= -\sqrt{2}\sigma u_3'\,,\ V_{1,2} = (1-\beta)\frac{f_{1,2}^2}{4}\,,\ V_0 = (1-\beta)\frac{f_1 f_2}{4}\,, \\
V_\pm &= \frac{v_1}{\rho^2}\left(\frac{v}{2} \mp m\right) + \sigma u_1\left(\frac{\sigma u}{2} \pm \kappa\right) + (g'^2 - g^2 + \beta)\frac{f_1 f_2}{4}\,.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Le couplage entre différentes composantes vectorielles est

$$\Gamma_{xy} = \begin{pmatrix} d_0^{xy} & e_{+1}^{xy} & e_{-1}^{xy} \\ e_{-1}^{xy} & d_{+1}^{xy} & 0 \\ e_{+1}^{xy} & 0 & d_{-1}^{xy} \end{pmatrix} \tag{C.6}$$

où x et y représentent $\mathcal{Z}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}^+$, $\mathcal{W}^-$ et

$$\begin{aligned}
d_\eta^{\mathcal{Z}\mathcal{A}} &= -gg'\left(\frac{v_1^2}{\rho^2} + \sigma^2 u_1^2 + \left(g^2 - g'^2\right) f_2^2\right),\ d_\eta^{\mathcal{W}\mathcal{W}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{\rho^2} + \sigma^2 u_1^2\right), \\
d_\eta^{\mathcal{Z}\mathcal{W}^\pm} &= -g\sqrt{2}\left(\pm\eta\frac{v_1'}{\rho} + \frac{v_1}{\rho^2}\left(\frac{v_3}{2} \pm (m-\eta)\right) + \sigma u_1\left(\frac{\sigma u_3}{2} \mp \kappa\right) - \frac{g'^2}{2} f_1 f_2\right), \\
d_\eta^{\mathcal{A}\mathcal{W}^\pm} &= g'\sqrt{2}\left(\pm\eta\frac{v_1'}{\rho} + \frac{v_1}{\rho^2}\left(\frac{v_3}{2} \pm (m-\eta)\right) + \sigma u_1\left(\frac{\sigma u_3}{2} \mp \kappa\right) + \frac{g^2}{2} f_1 f_2\right),
\end{aligned} \tag{C.7}$$

et

$$e_\eta^{\mathcal{Z}\mathcal{W}^\pm} = \pm g\left(\sigma u_1' \pm \eta\frac{\sigma}{\rho}(v_3u_1 - v_1u_3)\right), \qquad e_\eta^{\mathcal{Z}\mathcal{A}} = 0\,,$$
$$e_\eta^{\mathcal{A}\mathcal{W}^\pm} = \mp g'\left(\sigma u_1' \pm \eta\frac{\sigma}{\rho}(v_3u_1 - v_1u_3)\right), \qquad e_\eta^{\mathcal{W}\mathcal{W}} = 0\,. \tag{C.8}$$

Enfin, le couplage entre les amplitudes vectorielles et les amplitudes scalaires est défini par

$$\Gamma_{\mathcal{Z}\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -a_1^0 & a_1^0 & (g^2-g'^2)a_2^0 & (g'^2-g^2)a_2^0 \\ a_1^+ & a_1^- & (g'^2-g^2)a_2^+ & (g'^2-g^2)a_2^- \\ a_1^- & a_1^+ & (g'^2-g^2)a_2^- & (g'^2-g^2)a_2^+ \end{pmatrix},\ \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{H}} = 2gg'\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_2^0 & a_2^0 \\ 0 & 0 & a_2^+ & a_2^- \\ 0 & 0 & a_2^- & a_2^+ \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{\mathcal{W}^+\mathcal{H}} = g\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & a_2^0 & -a_1^0 & 0 \\ 0 & a_2^- & a_1^+ & 0 \\ 0 & a_2^+ & a_1^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{\mathcal{W}^-\mathcal{H}} = g\sqrt{2}\begin{pmatrix} -a_2^0 & 0 & 0 & a_1^0 \\ a_2^+ & 0 & 0 & a_1^- \\ a_2^- & 0 & 0 & a_1^+ \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

avec les différents opérateurs

$$a_1^0 = \frac{\sigma}{2}\left((u+u_3)f_1 + u_1f_2\right), \qquad a_2^0 = \frac{\sigma}{2}\left((u-u_3)f_2 + u_1f_1\right), \tag{C.10}$$
$$a_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_1' \pm \frac{1}{2\rho}\left((v+v_3)f_1 + v_1f_2\right)\right), \quad a_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_2' \pm \frac{1}{2\rho}\left((v-v_3)f_2 + v_1f_1\right)\right).$$

Ayant ainsi présenté tous les éléments de la matrice potentielle du problème de Schrödinger, il est possible non-seulement de résoudre numériquement, mais également d'étudier la stabilité dans les différentes limites de la théorie. En effet dans les différentes limites qu'on étudiera, les champs de fond se simplifient plus ou moins, ce qui permet de simplifier également la matrice potentielle. En particulier dans le régime des courants faibles, les champs de fond sont développés en séries. Il est alors de définir la base des états propres de l'opérateur de Schrödinger dans cette limite, puis de calculer les corrections à la valeur propre.

C.2 Compléments de l'étude de stabilité dans le régime de courants faibles

Afin d'étudier les propriétés des solutions portant un faible courant, nous avons introduit la décomposition en série des champs de fond (5.7). Cette décomposition qui décrit les solutions supraconductrices au voisinage de la bifurcation avec les Z-strings permet de simplifier l'opérateur des perturbations. En effet, connaissant le développement (5.7), les outils de la mécanique quantique permettent de connaître les corrections aux différents ordres de l'opérateur de Schrödinger (6.17), d'après le développement (7.1). Avant d'évaluer ces corrections, il faut construire la base des états propres de l'opérateur de stabilité des Z-strings. Dans la partie principale du manuscrit, nous n'avons décrit que l'état fondamental de cet opérateur (7.4). Pour commencer, nous ferons quelques remarques supplémentaires au sujet de Z-string, puis on présentera le détail de l'analyse des sous-espaces orthogonaux.

C.2.1 Remarques supplémentaires sur l'état fondamental

On présente ici quelques remarques, au sujet de l'état fondamental de l'opérateur des perturbations des solutions sans courant. On a vu d'après (7.8), que la relation de dispersion des modes négatifs est donnée par $\omega_+^2(\kappa)$ si $\kappa > 0$ et $\omega_-^2(\kappa)$ si $\kappa < 0$. Par conséquent, la relation de dispersion $\omega^2(\kappa)$ est la superposition de deux paraboles qui s'intersectent lorsque $\kappa = 0$. Chacune des paraboles continue pour des valeurs $|\kappa| > 2\sigma^{(0)}$ et décrit alors des états liés stables tels que $\omega^2(\kappa) > 0$. Les courbes doivent se terminer pour $\kappa = 0$, sinon

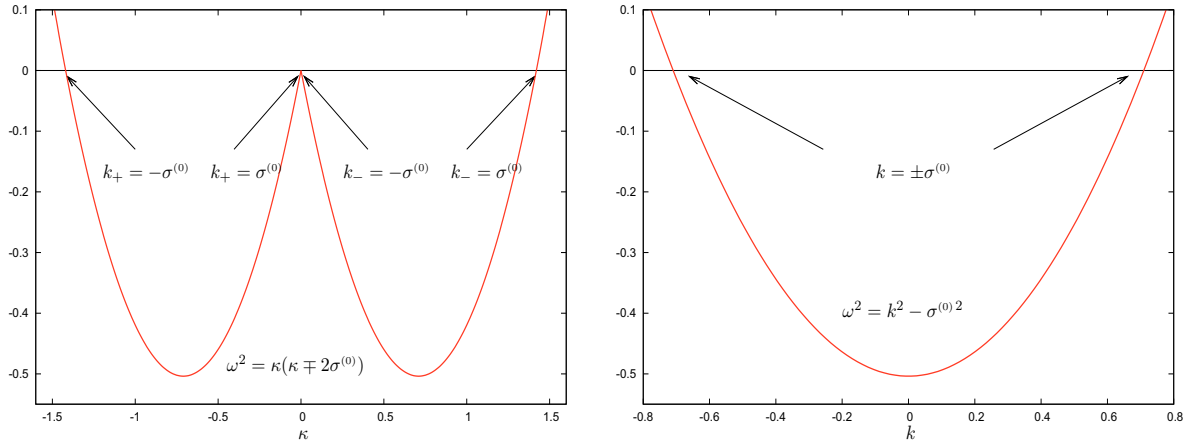


FIG. C.1: Relation de dispersion (7.8) de l'état fondamental de l'opérateur de stabilité de Z-string (7.4). On considère les valeurs expérimentales des paramètres de la théorie ($\sin^2\theta_{\rm W} = 0.23$ et $\beta = 2$). Les deux paraboles (À gauche) correspondent aux états fondamentaux orthogonaux Ψ_+ et Ψ_-. En passant à la jauge (C.11) elles sont envoyées sur une même parabole (À droite). On a noté les différents points de bifurcation avec la solution supraconductrice.

la masse effective du photon $\mu_A^2 = \kappa^2 - \omega^2 = \pm 2\kappa\sigma^{(0)}$ devient imaginaire. Cette condition disparaît lorsque le courant est exactement nul. Elle doit cependant être vérifiée si le fond est arbitrairement proche de Z-string.

Comme l'état fondamental est relativement simple, il est possible de reconstruire les fluctuations à l'aide de la définition (6.6). Les fluctuations dépendent alors de toutes les coordonnées d'espace-temps. Afin de trouver la forme habituellement employée dans la littérature [37]

$$\mathcal{W}_{\rm Z}^{\rm Rég} = 2(g'^2 + g^2\tau^3)(n - v_{\rm ANO})\mathrm{d}\varphi \quad \text{et} \quad \Phi_{\rm Z}^{\rm Rég\,-1} = (f_{\rm ANO}\mathrm{e}^{in\varphi}, 0)\,, \tag{C.11}$$

on applique la transformation de jauge $U = \mathrm{e}^{in\varphi + \frac{i}{2}(\nu\varphi + \sigma_\alpha x^\alpha)(1-\tau^3)}$ au fond (3.30a). La configuration de fond est alors régulière et indépendante des paramètres σ_α et ν. On trouve alors la fluctuation de la deuxième composante du champ de Higgs, correspondant aux modes instables

$$\delta\Phi_2 = C_\pm h_2^+ \mathrm{e}^{|\omega(k)|t}\mathrm{e}^{\mp ik_\pm)z}\,. \tag{C.12}$$

$C_\pm$ sont des constantes d'intégration, $k \equiv k_\pm = \kappa \mp \sigma^{(0)}$ et $\omega \equiv \omega_\pm^2 = k_\pm^2 - \sigma^{(0)\,2}$ (voir Fig. C.1). Et on a utilisé la propriété $h_2^+ = h_2^-$. Les modes instables (C.12) sont

vus comme des ondes stationnaires (de $\lambda = 2\pi/k$) dont l'amplitude croît avec le temps. Lorsque $k = \pm\sigma^{(0)}$, on trouve un mode zéro correspondant à la bifurcation avec les solutions supraconductrices. Comme la longueur d'onde minimale des modes instables est $\lambda_{\min} = 2\pi/\sigma$, l'instabilité peut être éliminée par périodisation sur une longueur $L < \lambda_{\min}$. La périodisation n'élimine cependant pas le mode $k = 0$: $\delta\Phi_2 = Ch_2^+ \mathrm{e}^{\sigma^{(0)}t}$.

O se propose d'étudier la solution dans un autre jauge, telle que

$$\mathcal{W} = \sigma^{(0)}(1-\tau^3)\mathrm{d}z + \mathcal{W}_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{Rég}} \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{Rég}}\,, \tag{C.13}$$

obtenue par

$$U = \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\sigma^{(0)}z(1-\tau^3)}\,. \tag{C.14}$$

Alors le mode négatif est

$$\delta\Phi_2 = C_\pm h_2^+ \mathrm{e}^{|\omega_\pm(\kappa)|t}\mathrm{e}^{\mp i\kappa_\pm)z} \tag{C.15}$$

où $\kappa \in (-2\sigma^{(0)}, 0)\bigcup(0, 2\sigma^{(0)})$. Ce sont à nouveau des ondes stationnaires de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/\kappa \geq \lambda_{\min} = \pi/\sigma$). Cette fois ci, la périodisation élimine *tous* les modes périodiques. En particulier, le mode qui était précédemment homogène devient ici inhomogène avec $\kappa = \pm\sigma^{(0)}$. Il est alors supprimé par les conditions périodiques sur l'axe du vortex. Dans cette jauge le mode homogène $\kappa = 0$ n'est pas négatif.

Comme toutes les quantités invariantes de jauge disparaissent pour ce cas particulier, il n'y a pas de moyen pour décider quels sont les modes qui sont homogènes. En fait la transformation de jauge (C.14) n'est pas périodique sur $[0, \pi/\sigma]$. Imposer la périodicité brise donc l'équivalence de jauge entre les configurations (C.11) et (C.13). Les deux descriptions de la solution Z-string sont alors *physiquement* différentes. On comprend ainsi pourquoi (C.13) est stabilisée par la périodisation, alors que (C.11) ne l'est pas.

Puisque les modes zéro de Z-strings tels que $\kappa = \pm 2\sigma$ correspondent aux bifurcations avec les solutions supraconductrices, ils peuvent être vus comme de petites déformations créées par un courant. Les modes zéro $\omega^2(\pm\kappa_{\max}) = 0$ existent également si $\mathcal{I} \neq 0$, ce qui suggère qu'ils correspondent également à des déformations induites par de petites variations du courant. Cependant de telles variations si $\mathcal{I} \neq 0$ contiennent les termes qui divergent logarithmiquement. Ils ne peuvent alors correspondre à des états liés de l'opérateurs de perturbations. Ceci suggère alors que les modes zéro $\kappa = \pm\kappa_{\max}$ correspondent à des variations par rapport à un autre paramètre. C'est-à-dire qu'il est possible que les solutions vortex admettent des généralisations stationnaires de l'ansatz (4.4).

C.2.2 Secteur d'ondes libres

En imposant le fond de Z-string, 3 amplitudes découplent complètement. Elles sont solutions des équations

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \frac{(m-\eta)^2}{\rho^2}\right]\mathcal{A}_\eta^{(0)} = \Lambda_\eta^{\mathrm{A}}\mathcal{A}_\eta^{(0)}\,, \quad \text{où} \quad \Lambda_\eta^{\mathrm{A}} = \Lambda^{(0)} + \kappa^2\,. \tag{C.16}$$

Aucune de ces équations n'admet de solution qui soit bornée à la fois à l'origine et à l'infini. Ainsi les amplitudes du *photon*, ne peuvent contribuer ni aux états liés, ni aux

états de diffusion. En effet, étant divergentes, il n'est pas possible de les coupler aux états liés sans rendre leur contribution infinie. Puisque nous nous intéressons exclusivement à la construction d'états liés, les amplitudes $\mathcal{A}_\eta^{(0)}$ doivent impérativement être exclues de la base des états propres.

C.2.3 Secteur des fantômes

Les amplitudes considérées ici correspondent à des modes non-physiques des perturbations autour de Z-string. Il s'agit en particulier des composantes longitudinales $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{W}_0^+$, $\mathcal{W}_0^-$. Sur le fond de Z-string, ces trois équations sont exactement les mêmes que les équations des amplitudes temporelles (6.11). On a pu souligner que ces amplitudes ne correspondent pas à des modes physiques. Bien que séparément ces amplitudes ne soient pas des modes physiques, elles peuvent contribuer à la base des états propres.

Les modes fantômes d'ANO satisfont l'équation

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{f_{\text{ANO}}^2}{2}\right)\right]\mathcal{Z}_0 = \Lambda_{\text{ANO}}^{\text{G}}\mathcal{Z}_0\,, \quad \text{où} \quad \Lambda_{\text{ANO}}^{\text{G}} = \Lambda^{(0)} + \kappa^2\,. \tag{C.17}$$

Les conditions aux bords sont similaires à celles du cas général et sont données par

$$\rho^{|m|} \leftarrow \mathcal{Z}_0 \rightarrow \frac{\mathrm{e}^{-m_{\text{ANO}}^{\text{G}}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \quad \text{où} \quad m_{\text{ANO}}^{\text{G}} = \sqrt{\Lambda_{\text{ANO}}^{\text{G}} + \frac{1}{2}}\,. \tag{C.18}$$

Pour une discussion détaillée de ces modes, voir l'analyse de stabilité des solutions ANO dans le modèle Higgs abélien de Goodband et Hindmarsh [58].

Les modes fantômes de $\mathcal{W}^\pm$ quant à eux satisfont l'équation

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \left(\frac{(2g^2(v_{\text{ANO}} - n) + \nu \pm m)^2}{\rho^2} + \frac{g^2 f_{\text{ANO}}^2}{2}\right)\right]\mathcal{W}_0^\pm = \Lambda_{\text{W}\pm}^{\text{G}}\mathcal{W}_0^\pm\,,$$
$$\text{avec la valeur propre} \quad \Lambda_{\text{W}\pm}^{\text{G}} = \Lambda^{(0)} + (\sigma^{(0)} \mp \kappa)^2\,. \tag{C.19}$$

Les amplitudes satisfont les conditions aux bords

$$\rho^{|\nu\pm m|} \leftarrow \mathcal{W}_0^\pm \rightarrow \frac{\mathrm{e}^{-m_\pm^{\text{G}}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \quad \text{où} \quad m_\pm^{\text{G}} = \sqrt{\Lambda_{\text{W}\pm}^{\text{G}} + \frac{g^2}{2}}\,. \tag{C.20}$$

Ces modes fantômes sont discutés en détail également par Goodband et Hindmarsh lors de l'analyse de stabilité des Z-string [28].

C.2.4 Secteur d'ANO

Le secteur considéré ici décrit la stabilité des solutions d'Abrikosov-Nielsn-Olesen dans la théorie $\text{U}(1)_{\text{HA}}$. La stabilité dans cette théorie a déjà été évoquée plus haut, cependant

on peut rappeler les résultats de l'analyse de Goodband et Hindmarsh [58]. Les fluctuations autour des vortex satisfont l'équation

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \mathcal{U}_{\rm ANO}(\kappa,m|\rho)\right]\Psi_{\rm ANO} = \Lambda_{\rm ANO}\Psi_{\rm ANO}\,, \quad \text{où} \quad \Lambda_{\rm ANO} = \Lambda^{(0)} + \kappa^2\,. \tag{C.21}$$

Le vecteur propre $\Psi_{\rm ANO}$ et $\mathcal{U}_{\rm ANO}(\kappa,m|\rho)$ la matrice potentielle symétrique 4×4 sont définis comme

$$\Psi_{\rm ANO} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_+ \\ \mathcal{Z}_- \\ h_1^+ \\ h_1^- \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}_{\rm ANO}(\kappa,m|\rho) = \begin{pmatrix} \Delta^{\mathcal{Z}}_{+1} & 0 & a_1^+ & a_1^- \\ 0 & \Delta^{\mathcal{Z}}_{-1} & a_1^- & a_1^+ \\ a_1^+ & a_1^- & \Delta^{h_1}_{+} & V_1 \\ a_1^- & a_1^+ & V_1 & \Delta^{h_1}_{-} \end{pmatrix}. \tag{C.22}$$

Rappelons succinctement les résultats. D'après [58], le vortex fondamental ($n=1$) est stable pour toutes les perturbations. C'est à dire quelque soit la valeur de m, il n'existe pas d'état lié dont la valeur propre soit négative. Les instabilités se manifestent pour les multivortex lorsque $\beta > 1$ (c'est à dire lorsque le champ scalaire est plus massif que le champ vectoriel) et pour $m > 2$. Ainsi pour les perturbations axisymétriques, ce secteur n'est pas instable. Cependant, il peut contribuer à la base des états propres de l'opérateur des fluctuations. Il faut souligner que lorsque $m=0$, l'opérateur (C.21) se découple en deux systèmes indépendants. Un système appelé *anti-symétrique* pour lequel des états liés sont toujours présents, et un système appelé *symétrique* qui contient soit des états liés soit un spectre continu en fonction des valeurs de β.

Partie Symétrique – Spectre continu. Les équations décrivant les perturbations sont ici

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{\rm S}_{\mathcal{Z}} & V^{\rm S} \\ V^{\rm S} & \mathcal{D}^{\rm S}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{\rm S} \\ h^{\rm S} \end{pmatrix} = \Lambda^{\rm S}_{\rm ANO}\begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{\rm S} \\ h^{\rm S} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \Lambda^{\rm S}_{\rm ANO} = \Lambda^{(0)} + \kappa^2 \tag{C.23}$$

avec les combinaisons linéaires $\mathcal{Z}^{\rm S} = \mathcal{Z}_+ - \mathcal{Z}_-$ et $h^{\rm S} = h_1^+ - h_1^-$ [1]. Les éléments de la matrice potentielle sont

$$\mathcal{D}^{\rm S}_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{f^2_{\rm ANO}}{2}\,, \qquad \mathcal{D}^{\rm S}_{\mathcal{H}} = \frac{v^2_{\rm ANO}}{\rho^2} + \frac{\beta}{4}\left(3f^2_{\rm ANO} - 1\right), \qquad V^{\rm S} = \sqrt{2}\frac{v_{\rm ANO}f_{\rm ANO}}{\rho}\,. \tag{C.24}$$

Lorsque le rapport de masse $\beta \geq 1.5$, il n'y a pas d'état lié dans ce secteur. Il est néanmoins possible de construire des états de diffusion. Pour cela la valeur propre $\Lambda^{(0)}$ devient un paramètre de contrôle et les amplitudes satisfont les conditions aux bords

$$\rho \leftarrow \mathcal{Z}^{\rm S} \rightarrow \frac{\cos\left(m^{\rm S}_{\rm Z}\rho + \delta\right)}{\sqrt{\rho}}\,, \qquad {m^{\rm S}_{\rm Z}}^2 = |\Lambda^{\rm S}_{\rm ANO} + \frac{1}{2}|\,, \qquad \rho^n \leftarrow h^{\rm S} \rightarrow \frac{{\rm e}^{-m^{\rm S}_{\rm H}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \tag{C.25}$$

avec $m^{\rm S}_{\rm H} = \sqrt{\Lambda^{\rm S}_{\rm ANO} + \frac{\beta}{2}}$ et $\Lambda^{\rm S}_{\rm ANO} \in [-\frac{\beta}{2}, -\frac{1}{2}]$. Ainsi les amplitudes $\mathcal{Z}^{\rm S}$ oscillent à l'infini tandis que $h^{\rm S}$ reste localisé. Bien que ces modes ne soient pas des états liés, ils peuvent contribuer à la base des états propres, puisqu'ils sont bornés. Ils apporteront une contribution finie à la correction à la valeur propre au travers des produits scalaires.

[1] D'après cette définition, on tendrait plutôt à appeler ce secteur anti-symétrique. Cependant d'après les propriétés de symétrie de l'opérateur,on voit que ce secteur est bien symétrique. De plus il correspond effectivement au secteur symétrique décrit par Goodband et Hindmarsh.

Partie antisymétrique – Spectre discret. Les équations décrivant les perturbations ici sont

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho\right) - \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{\mathrm{A}}_{\mathcal{Z}} & V^{\mathrm{A}} \\ V^{\mathrm{A}} & \mathcal{D}^{\mathrm{A}}_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{\mathrm{A}} \\ h^{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = \Lambda^{\mathrm{A}}_{\mathrm{ANO}} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{\mathrm{A}} \\ h^{\mathrm{A}} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \Lambda^{\mathrm{A}}_{\mathrm{ANO}} = \Lambda^{(0)} + \kappa^2\,, \tag{C.26}$$

avec les combinaisons linéaires $\mathcal{Z}^{\mathrm{A}} = \mathcal{Z}_+ + \mathcal{Z}_-$ et $h^{\mathrm{A}} = h_1^+ + h_1^-$. Les éléments de la matrice potentielle sont

$$\mathcal{D}^{\mathrm{A}}_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{f^2_{\mathrm{ANO}}}{2}\,, \qquad \mathcal{D}^{\mathrm{A}}_{\mathcal{H}} = \frac{v^2_{\mathrm{ANO}}}{\rho^2} + \frac{\beta}{4}\left(f^2_{\mathrm{ANO}} - 1\right) + \frac{f^2_{\mathrm{ANO}}}{2}\,, \qquad V^{\mathrm{A}} = \sqrt{2} f'_{\mathrm{ANO}}\,. \tag{C.27}$$

Comme annoncé précédemment, il est toujours possible de construire des états liés dans ce secteur. Ce sont des états liés stables qui contribueront à la base des états propres et obéissent aux conditions aux bords

$$\rho \leftarrow \mathcal{Z}^{\mathrm{A}} \rightarrow \frac{\mathrm{e}^{-m^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \qquad \rho^n \leftarrow h^{\mathrm{A}} \rightarrow \frac{\mathrm{e}^{-m^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\rho}}{\sqrt{\rho}}\,, \qquad m^{\mathrm{A}\,2}_{\mathrm{Z}} = \Lambda_{\mathrm{ANO}} + \frac{1}{2}\ . \tag{C.28}$$

Dans [58], il a été remarqué que la valeur propre de ce mode était très proche de celle pour le fantôme d'ANO (C.17). Il avait alors été conjecturé que le mode antisymétrique n'était pas physique et que sa contribution devait être éliminée du spectre par ce même fantôme. En résolvant numériquement le système, nous faisons la même observation que $\Lambda^{\mathrm{A}}_{\mathrm{ANO}} = \Lambda^{\mathrm{G}}_{\mathrm{ANO}}$ jusqu'à la $7^{\text{ème}}$ décimale, ce qui donne une estimation de la précision à laquelle on travaille. Ces modes non-physiques de la théorie $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{HA}}$ contribuent à la base des états propres dans la théorie complète $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{I}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$. On a donc identifié tous les secteurs de l'opérateur de stabilité de Z-string dont les amplitudes sont bornées. Il faut ensuite construire numériquement toutes les amplitudes afin de construire la base des états propres. Après il faut calculer tous les produits scalaires $\langle\varphi_i, \mathcal{U}^{(a)}\varphi_j\rangle$ aux différents ordres afin de reconstruire les corrections à la valeur propre (7.13) et au vecteur propre (7.11).

La correction au second ordre de la valeur propre est donnée pour chaque valeur de κ d'après (7.13). Lorsque $\kappa = 0$, l'état fondamental et son orthogonal coïncident et donc la valeur propre associée est dégénérée. Il est donc nécessaire de considérer ce cas à part.

C.2.5 Le cas dégénéré $\kappa = 0$

L'étude des perturbations en mécanique quantique nous apprend qu'il faut prendre des pincettes lorsqu'on considère le cas où la valeur propre de l'état fondamental est dégénérée. Ainsi le cas dégénéré où $\kappa = 0$ est traité séparément. À présent la correction au second ordre de la valeur propre doit être modifiée et permet de lever la dégénérescence

$$\begin{aligned} -\Lambda^{(2)} = {} & \frac{\langle\varphi_+, \mathcal{U}^{(2)}\varphi_+\rangle}{||\varphi_n||^2} \pm \frac{\langle\varphi_+, \mathcal{U}^{(2)}\varphi_-\rangle}{||\varphi_n||^2} \\ & + \frac{1}{||\varphi_n||^2}\sum_p \frac{\langle\varphi_+, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_p\rangle}{(\Lambda_p - \Lambda_n)\,||\varphi_p||^2}\left(\langle\varphi_+, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_p\rangle \pm \langle\varphi_-, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_p\rangle\right) \\ & + \frac{1}{||\varphi_n||^2}\int \frac{\langle\varphi_+, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_\nu\rangle}{(\Lambda_\nu - \Lambda_n)\,||\varphi_\nu||^2}\left(\langle\varphi_+, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_\nu\rangle \pm \langle\varphi_-, \mathcal{U}^{(1)}\varphi_\nu\rangle\right)\mathrm{d}\nu \end{aligned} \tag{C.29}$$

et $||\varphi_+||^2 = ||\varphi_-||^2 = ||\varphi_n||^2$. Les corrections à la valeur propre sont ainsi données par (7.10) pour des valeurs génériques de κ et (C.29) lorsque $\kappa = 0$.

Bibliographie

[1] J. S. Russel *Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1845) 311.

[2] D. Korteweg and de Vries G., "On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves," *Phil. Mag* (1895) 422.

[3] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, "Interaction of 'Solitons' in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States," *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240–243.

[4] T. H. R. Skyrme, "A Nonlinear field theory," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A260** (1961) 127–138.

[5] T. H. R. Skyrme, "A Unified Field Theory of Mesons and Baryons," *Nucl. Phys.* **31** (1962) 556–569.

[6] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons.* Cambridge, UK : Univ. Pr., 2004.

[7] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, "Knots and particles," *Nature* **387** (1997) 58, `arXiv :hep-th/9610193`.

[8] R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, "Knots as Stable Soliton Solutions in a Three-Dimensional Classical Field Theory," *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4798–4801, `arXiv :hep-th/9808129`.

[9] T. D. Lee and Y. Pang, "Nontopological solitons," *Phys. Rept.* **221** (1992) 251–350.

[10] S. R. Coleman, "Q Balls," *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 263.

[11] H. B. Nielsen and P. Olesen, "Vortex-Line Models for Dual Strings," *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45–61.

[12] G. 't Hooft, "Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories," *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 276–284.

[13] A. M. Polyakov, "Particle spectrum in quantum field theory," *JETP Lett.* **20** (1974) 194–195.

[14] P. A. M. Dirac, "The Theory of magnetic poles," *Phys. Rev.* **74** (1948) 817–830.

[15] A. A. Abrikosov, ""On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group"," *J. Exptl. Theoret. Phys.* **32** (1957) 1442–1452.

[16] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and other Topological Defects.* Cambridge Univ. Press, 1994.

[17] E. J. Copeland and T. W. B. Kibble, "Cosmic Strings and Superstrings," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A466** (2010) 623–657, arXiv :0911.1345 [hep-th].

[18] M. Shifman and A. Yung, "Supersymmetric Solitons and How They Help Us Understand Non-Abelian Gauge Theories," *Rev. Mod. Phys.* **79** (2007) 1139, arXiv :hep-th/0703267.

[19] M. Shifman and A. Yung, "Supersymmetric solitons,". Cambridge, UK : Cambridge Univ. Pr. (2009) 259 p.

[20] M. Shifman and A. Yung, "Non-Abelian string junctions as confined monopoles," *Phys. Rev.* **D70** (2004) 045004, arXiv :hep-th/0403149.

[21] A. Hanany and D. Tong, "Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics," *JHEP* **04** (2004) 066, arXiv :hep-th/0403158.

[22] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi, and N. Sakai, "Moduli space of non-Abelian vortices," *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 161601, arXiv :hep-th/0511088.

[23] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, "A Saddle Point Solution in the Weinberg-Salam Theory," *Phys. Rev.* **D30** (1984) 2212.

[24] T. Vachaspati, "Vortex solutions in the Weinberg-Salam model," *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1977–1980.

[25] T. Vachaspati, "Electroweak strings," *Nucl. Phys.* **B397** (1993) 648–671.

[26] T. Vachaspati and M. Barriola, "A New class of defects," *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1867–1870.

[27] E. Witten, "Superconducting Strings," *Nucl. Phys.* **B249** (1985) 557–592.

[28] M. Goodband and M. Hindmarsh, "Instabilities of electroweak strings," *Phys. Lett.* **B363** (1995) 58–64, arXiv :hep-ph/9505357.

[29] M. James, L. Perivolaropoulos, and T. Vachaspati, "Detailed stability analysis of electroweak strings," *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 534–546, arXiv :hep-ph/9212301.

[30] V. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2002.

[31] T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge Theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 1988.

[32] S. Coleman, *Aspects of symmetry*. Cambridge University Press., 1985.

[33] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction to Solions and Instantons in Quantum Field Theory*. Amsterdam, Netherlands : North-holland, 1982.

[34] C. Rebbi, (Ed.) and G. Soliani, (Ed.), *Solitons and Particles*. Singapore, Singapore : World Scientific, 1984.

[35] M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, "Cosmic strings," *Rept. Prog. Phys.* **58** (1995) 477–562, arXiv :hep-ph/9411342.

[36] F. A. Schaposnik, "Vortices," arXiv :hep-th/0611028.

[37] A. Achucarro and T. Vachaspati, "Semilocal and electroweak strings," *Phys. Rept.* **327** (2000) 347–426, arXiv :hep-ph/9904229.

[38] C. P. Burgess and G. D. Moore, *The standard model : A primer*. Cambridge Univiversity Press, 2007.

[39] K. Charles, *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 1995.

[40] A. Altland and B. Simons, "Condensed matter field theory,". Cambridge, UK : Univ. Pr. (2006) 624 p.

[41] J. Goldstone, "Field Theories with Superconductor Solutions," *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.

[42] Y. Nambu, "Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity," *Phys. Rev.* **117** (1960) 648–663.

[43] F. Englert and R. Brout, "Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons," *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321–322.

[44] P. W. Higgs, "Broken symmetries, massless particles and gauge fields," *Phys. Lett.* **12** (1964) 132–133.

[45] P. W. Higgs, "Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons," *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508–509.

[46] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, "Global Conservation Laws and Massless Particles," *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585–587.

[47] T. W. B. Kibble, "Symmetry breaking in non-Abelian gauge theories," *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554–1561.

[48] T. W. B. Kibble, "Topology of Cosmic Domains and Strings," *J. Phys.* **A9** (1976) 1387–1398.

[49] B. Julia and A. Zee, "Poles with Both Magnetic and Electric Charges in Nonabelian Gauge Theory," *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2227–2232.

[50] H. K. Onnes *Leiden Comm.* (1911) .

[51] W. Meissner and R. Ochsenfeld, ""Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit"," *Naturwissenschaften* **21** (1933) 787–788.

[52] F. London and H. London, ""The Electromagnetic Equations of the Superconductor"," *Proc. Roy. Soc. London A* **149** (1935) 77–88.

[53] V. Ginzburg and L. Landau *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064.

[54] A. A. Abrikosov *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **86** (1952) 489.

[55] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, ""Theory of Superconductivity"," *American Physical Society* **108** (1957) 1175.

[56] E. B. Bogomolny, "Stability of Classical Solutions," *Sov. J. Nucl. Phys.* **24** (1976) 449.

[57] E. B. Bogomolny and A. I. Vainshtein, "Stability of Strings in Gauge Abelian Theory," *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (NONE) 588.

[58] M. Goodband and M. Hindmarsh, "Bound states and instabilities of vortices," *Phys. Rev.* **D52** (1995) 4621–4632, `arXiv :hep-ph/9503457`.

[59] R. L. Davis and E. P. S. Shellard, "The Physics of Vortex Superconductivity – I," *Phys. Lett.* **B207** (1988) 404.

[60] R. L. Davis and E. P. S. Shellard, "The Physics of Vortex Superconductivity – II," *Phys. Lett.* **B209** (1988) 485.

[61] P. Amsterdamski and P. Laguna-Castillo, "Internal Structure and the Space-time of Superconducting Bosonic Strings," *Phys. Rev.* **D37** (1988) 877–884.

[62] A. Babul, T. Piran, and D. N. Spergel, "Bosonic Superconducting Cosmic Strings – I. Classical Field Theory Solutions," *Phys. Lett.* **B202** (1988) 307.

[63] C. T. Hill, H. M. Hodges, and M. S. Turner, "Bosonic Superconducting Cosmic Strings," *Phys. Rev.* **D37** (1988) 263.

[64] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley. 3rd edition, 1999.

[65] L. Landau and E. Lifshitz, *Volume 2 : Classical Theory of Fields* . Pergamon, 4rd edition, 1994.

[66] R. L. Davis and E. P. S. Shellard, "Cosmic Vortons," *Nucl. Phys.* **B323** (1989) 209–224.

[67] Y. Lemperiere and E. P. S. Shellard, "Vorton existence and stability," *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 141601, `arXiv :hep-ph/0305156`.

[68] E. Radu and M. S. Volkov, "Existence of stationary, non-radiating ring solitons in field theory : knots and vortons," *Phys. Rept.* **468** (2008) 101–151, `arXiv :0804.1357 [hep-th]`.

[69] R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, "Vorton construction and dynamics," *Nucl. Phys.* **B814** (2009) 180–194, `arXiv :0812.3239 [hep-th]`.

[70] S. Weinberg, "A Model of Leptons," *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.

[71] A. Salam, "Renormalizability of gauge theories," *Phys. Rev.* **127** (1962) 331–334.

[72] F. R. Klinkhamer, "Construction of a new electroweak sphaleron," *Nucl. Phys.* **B410** (1993) 343–354, `arXiv :hep-ph/9306295`.

[73] Y. Brihaye, B. Kleihaus, and J. Kunz, "Sphalerons at finite mixing angle and singular gauges," *Phys. Rev.* **D47** (1993) 1664–1667.

[74] B. Kleihaus, J. Kunz, and Y. Brihaye, "The Electroweak sphaleron at physical mixing angle," *Phys. Lett.* **B273** (1991) 100–104.

[75] E. Radu and M. S. Volkov, "Spinning Electroweak Sphalerons," *Phys. Rev.* **D79** (2009) 065021, `arXiv :0810.0908 [hep-th]`.

[76] B. Kleihaus, J. Kunz, and M. Leissner, "Electroweak Sphalerons with Spin and Charge," *Phys. Lett.* **B678** (2009) 313–316, `arXiv :0810.1142 [hep-ph]`.

[77] B. Kleihaus and J. Kunz, "Multi - sphalerons in the Weinberg-Salam theory," *Phys. Rev.* **D50** (1994) 5343–5351, `arXiv :hep-ph/9405387`.

[78] B. Kleihaus, J. Kunz, and M. Leissner, "Sphalerons, Antisphalerons and Vortex Rings," *Phys. Lett.* **B663** (2008) 438–444, `arXiv :0802.3275 [hep-th]`.

[79] Y. M. Cho and K. Kimm, "Electroweak monopoles," `arXiv :hep-th/9705213`.

[80] W. S. Bae and Y. M. Cho, "Finite energy electroweak dyon," *J. Korean Phys. Soc.* **46** (2005) 791–804, `arXiv :hep-th/0210299`.

[81] N. Graham, "An Electroweak Oscillon," *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 101801, `arXiv :hep-th/0610267`.

[82] N. Graham, "Numerical Simulation of an Electroweak Oscillon," *Phys. Rev.* **D76** (2007) 085017, `arXiv :0706.4125 [hep-th]`.

[83] J. Ambjorn and P. Olesen, "On Electroweak Magnetism," *Nucl. Phys.* **B315** (1989) 606.

[84] J. Ambjorn and P. Olesen, "Electroweak Magnetism : Theory and Application," *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 4525–4558.

[85] J. Ambjorn and P. Olesen, "Electroweak magnetism, W condensation and antiscreening," `arXiv :hep-ph/9304220`.

[86] V. V. Skalozub, "On Restoration of Spontaneously Broken Symmetry in Magnetic Field," *Yad. Fiz.* **28** (1978) 228–230.

[87] G. Bimonte and G. Lozano, "Z flux line lattices and selfdual equations in the Standard Model," *Phys. Rev.* **D50** (1994) 6046–6049, `arXiv :hep-th/9403128`.

[88] Y. Nambu, "String-like configurations in the Weinberg-Salam theory," *Nucl. Phys.* **B130** (1977) 505.

[89] J. Urrestilla, A. Achucarro, J. Borrill, and A. R. Liddle, "The evolution and persistence of dumbbells in electroweak theory," *JHEP* **08** (2002) 033, `arXiv :hep-ph/0106282`.

[90] Y. M. Cho, "Knot solitons in Weinberg-Salam model," `arXiv :hep-th/0110076`.

[91] B. A. Fayzullaev, M. M. Musakhanov, D. G. Pak, and M. Siddikov, "Knot soliton in Weinberg-Salam model," *Phys. Lett.* **B609** (2005) 442–448, `arXiv :hep-th/0412282`.

[92] M. S. Volkov, "Superconducting electroweak strings," *Phys. Lett.* **B644** (2007) 203–207, `arXiv :hep-th/0609112`.

[93] J. Garaud and M. S. Volkov, "Superconducting non-Abelian vortices in Weinberg-Salam theory – electroweak thunderbolts," *Nucl. Phys.* **B826** (2010) 174–216, `arXiv :0906.2996 [hep-th]`.

[94] M. Hindmarsh and M. James, "The Origin of the sphaleron dipole moment," *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6109–6114, `arXiv :hep-ph/9307205`.

[95] O. Tornkvist, "Definition of the electromagnetic field in the broken- symmetry phase of the electroweak theory," `arXiv :hep-ph/9805255`.

[96] J. Ambjorn and P. Olesen, "A Condensate Solution of the Electroweak Theory wich Interpolates between the Broken and the Symmetric Phase," *Nucl. Phys.* **B330** (1990) 193.

[97] N. F. Lepora and T. W. B. Kibble, "Classifying vortex solutions to gauge theories," *Phys. Rev.* **D59** (1999) 125019, `arXiv :hep-th/9904177`.

[98] N. F. Lepora and T. W. B. Kibble, "Electroweak vacuum geometry," *JHEP* **04** (1999) 027, `arXiv :hep-th/9904178`.

[99] N. S. Manton, "Topology in the Weinberg-Salam Theory," *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2019.

[100] F. R. Klinkhamer and P. Olesen, "A New perspective on electroweak strings," *Nucl. Phys.* **B422** (1994) 227–236, `arXiv :hep-ph/9402207`.

[101] J. Ambjorn and P. Olesen, "A Magnetic Condensate Solution of the Classical Electroweak Theory," *Phys. Lett.* **B218** (1989) 67.

[102] N. K. Nielsen and P. Olesen, "An Unstable Yang-Mills Field Mode," *Nucl. Phys.* **B144** (1978) 376.

[103] J. Ambjorn, N. K. Nielsen, and P. Olesen, "Superconducting Cosmic Strings and W Condensation," *Nucl. Phys.* **B310** (1988) 625.

[104] W. B. Perkins, "W condensation in electroweak strings," *Phys. Rev.* **D47** (1993) 5224–5227.

[105] P. Olesen, "A W dressed electroweak string," `arXiv :hep-ph/9310275`.

[106] P. Forgacs and N. S. Manton, "Space-Time Symmetries in Gauge Theories," *Commun. Math. Phys.* **72** (1980) 15.

[107] B. Carter, "Duality Relation Between Charged Elastic Strings and Superconducting Cosmic Strings," *Phys. Lett.* **B224** (1989) 61–66.

[108] B. Carter, "Stability and Characteristic Propagation Speeds in Superconducting Cosmic and Other String Models," *Phys. Lett.* **B228** (1989) 466–470.

[109] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.* Springer, 1999.

[110] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of differential equations.* New York, McGraw-Hill, 1955.

[111] H. M. Antia, *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* Birkhauser Verlag AG, 2002.

[112] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis.* Springer, 2002.

[113] A. W. Steiner and J. Garaud, *http ://o2scl.sourceforge.net.* 2008.

[114] L. Landau and E. Lifshitz, *Volume 1 : Mechanics.* Pergamon, 3rd edition, 1976.

[115] P. Forgacs and A. Lukacs, "Instabilities of Twisted Vortices," *JHEP* **12** (2009) 064, `arXiv :0908.2621 [hep-th]`.

[116] J. Garaud and M. S. Volkov, "Stability Analysis of The Twisted Superconducting Semilocal Strings," *Nucl. Phys.* **B799** (2008) 430–455, `arXiv :0712.3589 [hep-th]`.

[117] T. W. B. Kibble, G. Lozano, and A. J. Yates, "Non-Abelian string conductivity," *Phys. Rev.* **D56** (1997) 1204–1214, `arXiv :hep-ph/9701240`.

[118] T. Vachaspati and A. Achucarro, "Semilocal cosmic strings," *Phys. Rev.* **D44** (1991) 3067–3071.

[119] M. Hindmarsh, "Existence and stability of semilocal strings," *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1263–1266.

[120] M. Hindmarsh, "Semilocal topological defects," *Nucl. Phys.* **B392** (1993) 461–492, `arXiv :hep-ph/9206229`.

[121] P. Forgacs, S. Reuillon, and M. S. Volkov, "Superconducting vortices in semilocal models," *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 041601, `arXiv :hep-th/0507246`.

[122] P. Forgacs, S. Reuillon, and M. S. Volkov, "Twisted superconducting semilocal strings," *Nucl. Phys.* **B751** (2006) 390–418, `arXiv :hep-th/0602175`.

[123] A. Achucarro, R. Gregory, J. A. Harvey, and K. Kuijken, "Role of W Condensation in Electroweak String Stability," *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 3646–3649, arXiv :hep-th/9312034.

[124] Y. J. Brihaye and Y. Verbin, "Superconducting and Spinning Non-Abelian Flux Tubes," *Phys. Rev.* **D77** (2008) 105019, arXiv :0711.1112 [hep-th].

[125] J. Ambjorn and P. Olesen, "W condensate formation in high-energy collisions," *Phys. Lett.* **B257** (1991) 201–206.

[126] J. Eggers, "Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows," *Rev. Mod. Phys.* **69** (1997) 865–930.

[127] R. Gregory and R. Laflamme, "Black strings and p-branes are unstable," *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 2837–2840, arXiv :hep-th/9301052.

[128] R. Gregory and R. Laflamme, "The Instability of charged black strings and p-branes," *Nucl. Phys.* **B428** (1994) 399–434, arXiv :hep-th/9404071.

[129] V. Cardoso and O. J. C. Dias, "Gregory-Laflamme and Rayleigh-Plateau instabilities," *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181601, arXiv :hep-th/0602017.

[130] J. Garaud and M. S. Volkov, "Stability Analysis of Superconducting Electroweak Vortices," *Nucl. Phys.* **B** (2010) to appear, arXiv :1005.3002 [hep-th].

[131] I. M. Gel'fand and S. V. Fomain, *Calculus of Variations*. rentice Hill, Englewood Cliffs, 1963.

[132] H. Amann and P. Quittner, "A Nodal Theorem for Coupled Systems of Schrödiger Equations and the Number of Bound States," *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4553.

[133] J. Baacke, "Fluctuations and stability of the t'Hooft-Polyakov monopole," *Z. Phys.* **C53** (1992) 399–401.

[134] H. Hollmann, "On the stability of gravitating nonAbelian monopoles," *Phys. Lett.* **B338** (1994) 181–186, arXiv :gr-qc/9406018.

[135] L. Landau and E. Lifshitz, *Volume 3 : Quantum Mechanics – Non Relativstic Theory*. Pergamon, 3rd edition, 1991.

[136] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics : Vol. 2*. Wiley-Interscience, 2006.

[137] J. L. Hovdebo and R. C. Myers, "Black rings, boosted strings and Gregory-Laflamme," *Phys. Rev.* **D73** (2006) 084013, arXiv :hep-th/0601079.

[138] R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, "Kinky Vortons," *Nucl. Phys.* **B805** (2008) 287–304, arXiv :0806.2212 [hep-th].

[139] W. H. Press, W. T. Teukolsky, S. A. ant Vetterling, and B. Flannery, *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2007.

Résumé :

Nous présentons ici, l'analyse détaillée et l'étude de la stabilité de nouvelles solutions de type vortex dans le secteur bosonique de la théorie électrofaible. Les nouvelles solutions généralisent le plongement des solutions d'Abrikosov-Nielsen-Olesen dans la théorie électrofaible et reproduisent les résultats précédemment connus.

Les vortex, génériquement porteurs d'un courant électrique, sont constitués d'un coeur massif de bosons chargés W entouré d'une superposition non-linéaire de champs Z et Higgs. Au loin la solution est purement électromagnétique avec un potentiel de Biot et Savart. Les solutions sont génériques de la théorie et existent en particulier pour les valeurs expérimentales des constantes de couplage. Il est en particulier démontré que le courant dont l'échelle typique est le *milliard* d'Ampères peut être arbitrairement grand.

Dans un second temps la stabilité linéaire des vortex supraconducteurs vis-à-vis des perturbations génériques est considérée. Le spectre de l'opérateur de fluctuations est étudié qualitativement. Lorsque des modes instables sont détectés, ils sont explicitement construits ainsi que leurs relations de dispersion. La plupart des modes instables sont supprimés par une périodisation du vortex. Il subsiste cependant un unique mode instable homogène. On peut espérer qu'un tel mode puisse être supprimé par des effets de courbure si une portion de vortex est refermée afin de former une boucle stabilisée par le courant électrique.

Mots clés : Théorie électrofaible, solitons, vortex supraconducteurs, stabilité.

Abstract :

In this dissertation, we analyze in detail the properties of new string-like solutions of the bosonic sector of the electroweak theory. The new solutions are current carrying generalizations of embedded Abrikosov-Nielsen-Olesen vortices. We were also able to reproduce all previously known features of vortices in the electroweak theory.

Generically vortices are current carrying. They are made of a compact conducting core of charged W bosons surrounded by a nonlinear superposition of Z and Higgs field. Faraway from the core, the solution is described by purely electromagnetic Biot and Savart field. Solutions exist for generic parameter values including experimental values of the coupling constants. We show that the current whose typical scale is the *billion* of Ampères can be arbitrarily large.

In the second part the linear stability with respect to generic perturbations is studied. The fluctuation spectrum is qualitatively investigated. When negative modes are detected, they are explicitly constructed and their dispersion relation is determined. Most of the unstable modes can be eliminated by imposing periodic boundary conditions along the vortex. However there remains a unique negative mode which is homogeneous. This mode can probably be eliminated by curvature effects if a small piece of vortex is bent into a loop, stabilized against contraction by the electric current.

Keywords : Electroweak theory, solitons, superconducting strings, stability.