UNIVERSITÉ FRANÇOIS-RABELAIS
DE TOURS

ÉCOLE DOCTORALE SANTÉ, SCIENCES ET TECHNOLOGIES

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE THEORIQUE

THÈSE présentée par :

Ali SROUR

soutenue le : **2 décembre 2008**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université François-Rabelais**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Étude de deux approches mathématiques complémentaires pour un problème de reconstruction tomographique

THÈSE dirigée par :

M. BARLES Guy	Professeur, Université François-Rabelais, Tours

RAPPORTEURS :

Mme DIBOS Françoise	Professeur, Université Paris XIII
M. MARÉCHAL Pierre	Professeur, Université Toulouse III

JURY :

M. ABRAHAM Romain	Professeur, Université d'Orléans
M. BARLES Guy	Professeur, Université François-Rabelais, Tours
Mme BERGOUNIOUX Maïtine	Professeur, Université d'Orléans
Mme DIBOS Françoise	Professeur, Université Paris XIII
M. LEY Olivier	MCF, Université François-Rabelais, Tours
M. MARÉCHAL Pierre	Professeur, Université Toulouse III

Avant-propos

Cette thèse a été co-encadrée par Romain Abraham et Maïtine Bergounioux au MAPMO et Guy Barles et Olivier Ley au LMPT. Ces deux laboratoires font partie de la fédération Denis Poisson (Orléans-Tours).

Je remercie la Région Centre qui m'a accordé une bourse régionale durant ces trois ans de recherche. Cette thèse n'aurait pas pu être menée à bien sans ce support financier.

Finalement, il faut signaler que ce travail est composé de trois grandes parties :

Les première et deuxième parties ont été encadrées par R. Abraham et M. Bergounioux au sein du MAPMO. Elles aboutissent à deux articles, l'un à paraître dans « Pacific Journal of optimisation » et l'autre est en cours de préparation.

La troisième partie a été réalisée sous la direction de G. Barles et O. Ley au sein du LMPT. Elle a donné lieu à un article à paraître dans « Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications ».

À mes parents...
Merci pour votre soutien ...
Merci pour votre confiance ...
Rien n'aurait été possible sans vous ...

Mes Remerciements...

C'est la vie ! On fait le premier pas, on rencontre des difficultés, des problèmes, des obstacles... Mais par l'espoir, la patience et l'ambition, on pourra tout surmonter. On vit des expériences dures et on réussit à faire face aux moments difficiles grâce à des personnes, qui nous guident sans hésitations, ni réserves dans cette période de notre vie.

Je tiens à commencer ces remerciements par les membres du Jury de cette thèse notamment, Mme Françoise Dibos et M. Pierre Maréchal pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant d'être rapporteurs et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Cette thèse, si elle est couronnée par le succès, c'est grâce à des directeurs compétents, attentifs et toujours présents.

Ma première pensée va à M. Guy Barles qui a accepté de diriger mon travail avec beaucoup de disponibilité. Ses larges connaissances en Mathématiques m'ont donné l'envie et l'énergie de me lancer dans la recherche. Avec lui, j'ai appris les Mathématiques avec rigueur et même avec plaisir. Je le remercie pour sa grande gentillesse et son soutien constant. Je n'oublie jamais son expression : « Ali, je suis toujours là, mon bureau est toujours ouvert, tu viens quand tu veux, quand tu sens que tu as besoin d'aide... » Pour moi, c'était une chance de travailler avec lui.

Quant à Olivier Ley, je suis très reconnaissant d'avoir partagé avec moi son savoir, sa méthodologie de travail. Je le remercie pour son support continu, sa grande disponibilité, ses conseils pertinents et enfin son aide dans les corrections et l'améliorations rédactionnelles de mes travaux. Il a été d'un grand soutien dans les moments difficiles.

Un grand merci aussi à Mme Maïtine Bergounioux. Grand merci de m'avoir proposé le sujet de stage en DEA qui m'a ouvert la porte de la recherche. Je suis très honoré d'avoir partagé son savoir et je la remercie pour l'aide et le soutien qu'elle m'a apporté malgré la distance ; je la remercie pour le temps qu'elle m'a consacré. Soyez assurée Mme Bergounioux de mon profond respect.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Romain Abraham d'avoir partagé avec moi ses connaissances du modèle étudié.

Je veux remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques et Physique théorique à l'université de Tours. Un grand merci à Anne-Marie, Bernadette et Olivier Thibault. À mes collègues du bureau : Ola, Haydar, Julien, Thierry, merci pour tous ces agréables moments de travail et de loisir que nous avons partagés.

A tous les moments passés ensemble au travail et en dehors, à l'encouragement que tu m'as apporté tout au long de ma thèse, je te remercie vivement Waad. Sois assurée, Waad, de tout mon respect, de ma profonde gratitude et de toute mon amitié.

J'adresse un remerciement à Rami Younes pour son aide. Sois assuré, Rami, de mon respect et de toute mon estime.

Mes pensées vont aussi à la famille Ataya qui m'a accueilli chaleureusement à mon arrivée en France, je vous remercie vivement.

Je souhaite remercier mes amis : Jinane, Ali, Sami, Chirine, Nadia et Marylène. Vous êtes de vrais amis.
Merci Diana, Houssein, Hawrae, Ghennwa et toute la famille Daoud. Vous m'avez encouragé, accompagné et donné toute votre aide et vous m'avez comblé de votre amitié.

Je pense à mes chers parents : mon père, ma mère, mes frères et soeurs. Je suis vraiment reconnaissant pour le soutien inconditionnel que vous m'avez apporté, vous avez eu foi en moi et vous m'avez permis de réaliser mes rêves.
Enfin, une douce pensée pour la personne vraiment chère à mon coeur, la femme la plus tendre, qui me soutient et qui m'encourage toujours. Je te remercie vivement Ola...

Étude de deux approches mathématiques complémentaires pour un problème de reconstruction tomographique

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse sont divisés en quatre parties. La première est consacrée à la présentation du modèle de reconstruction tomographique. Deux approches sont utilisées dans cette reconstruction : une approche variationnelle et une approche par lignes de niveaux (Level-Set). Dans la deuxième partie, nous traitons l'approche variationnelle qui consiste en un problème de minimisation non-différentiable avec une contrainte non convexe, d'intérieur vide pour les topologies usuelles. Pour résoudre ce problème, nous commençons par relaxer la contrainte et obtenons un problème approché pour lequel la contrainte est toujours non-convexe mais exprimée sous forme d'inégalités. Ensuite, par une méthode de pénalisation, en utilisant une méthode de Programmation Mathématique, un système d'optimalité est établi pour le problème pénalisé. Enfin, nous prouvons des estimations a priori pour passer du problème pénalisé au problème relaxé.

L'étude numérique de l'approche précédente est faite dans la troisième partie. Elle est basée sur le système d'optimalité, la méthode d'Uzawa et une méthode de gradient à pas optimal pour écrire un schéma numérique.

Dans la quatrième partie, nous nous intéressons à l'approche par lignes de niveaux pour résoudre des problèmes de propagation de fronts. Cette méthode fait apparaître des équations de type Hamilton-Jacobi du second ordre avec un terme non-local. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité pour ces équations dans deux cas : celui des fronts compacts et celui des fronts non compacts. Dans le cas compact, contrairement au cas non-compact, nos résultats sont valables pour des Hamiltoniens qui peuvent être non-bornés par rapport au terme non-local.

Mots-clés : Reconstruction tomographique, Méthode Variationnelle, Relaxation, Multiplicateurs de Lagrange, Méthode de programmation mathématique, Méthode du Lagrangien, Méthode de gradient, Équations de Hamilton-Jacobi non-locales, Propagation de fronts, Méthode des lignes de niveaux, Solutions de viscosité.

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, (UMR CNRS 6083), Fédération de Recherche Denis Poisson (FR CNRS 2964), Université François Rabelais de Tours, Parc de Grandmont, F-37200 Tours France.

Study of two complementary mathematical approaches of a tomographic reconstruction problem

Abstract

The thesis at hand is composed of four parts. The first of which is devoted to present our model of tomographic reconstruction. Two approaches are implied in this reconstruction : one is variational and the other is by level-set. The second part treats a non-differentiable variational problem with a non-convex constraint the interior of which is empty for usual topologies. The constraint is relaxed to obtain a problem with a non-convex constraint in the form of an inequality. A penalization method is then applied for which an optimal system is obtained using mathematical programming methods. Finally, a priori estimates allow us to pass from the penalized to the relaxed problem.

A numerical study of the above approach is elaborated in the third part. A numerical scheme is derived based upon our optimal system, the method of Uzawa and a gradient descent method.

In the last part, we use a level-set approach to solve the front propagation problem. A second order Hamilton-Jacobi type equation with a non-local term comes into play. We prove the existence and uniqueness of a viscosity solution in both compact and non-compact fronts cases. In the compact case, contrary to the non-compact one, our results hold for Hamiltonians which could be unbounded with respect to the non-local term.

Keywords : Tomographic reconstruction, Variational method, Relaxation, Lagrange multipliers, Mathematical programming method, Lagrangian method, Gradient method, Nonlocal Hamilton-Jacobi equations, Nonlocal front propagation, Level-Set approach, Viscosity solutions.

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, (UMR CNRS 6083), Fédération de Recherche Denis Poisson (FR CNRS 2964), Université François Rabelais de Tours, Parc de Grandmont, F-37200 Tours France.

Table des matières

Introduction **1**
1 Approche variationnelle 4
2 Simulation numérique pour l'approche variationnelle 9
3 Approche par les lignes de niveaux (Level-Set approach) 11

1 Présentation du modèle **19**
1 Présentation du problème 21
2 Approche variationnelle 25
3 Approche par propagation de fronts 28
3.1 Formulation mathématique 29
3.2 Application au problème de reconstruction 30
4 Quelques propriétés de l'opérateur de projection H 35

2 Préliminaires d'optimisation **37**
1 Outils d'optimisation 39
2 Optimisation sans contraintes 40
3 Minimisation avec contraintes 41
3.1 Contraintes convexes 42
3.2 Contraintes d'égalités 42
3.3 Contraintes d'inégalités : 43
3.4 Contraintes égalité et inégalité : 44
4 Le problème $(\mathcal{P})$: modification du modèle 45
4.1 L'espace des fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$. 46
4.2 Existence d'une solution de $(\mathcal{P})$ 47
4.3 Système d'optimalité. 47

3 Une méthode de relaxation pour une reconstruction tomographique régulière d'un objet binaire à symétrie axiale **51**
1 Introduction 53
2 The relaxed problem 55
2.1 A general qualification condition in Banach spaces 56
2.2 Penalization of the relaxed problem 58

3 Optimality system for $(\mathcal{P}_\alpha)$ . . . 61
3.1 Estimate on r_α^ε . . . 61
3.2 q_α^ε estimates . . . 64
3.3 $(\mathcal{P}_\alpha)$ optimality system . . . 64
4 Conclusion . . . 65

4 Étude numérique 67
1 Introduction . . . 69
2 Étude numérique du problème pénalisé $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ . . . 71
2.1 Point-selle, théorème de Karush, Kuhn et Tucker . . . 73
2.2 L'application de la notion du point-selle au problème pénalisé . . . 74
2.3 La méthode d'Uzawa . . . 76
2.4 Algorithme dans le cas où la contrainte est inactive . . . 77
3 Discrétisation du problème . . . 77
4 Application de la notion du point selle à $(\mathcal{P}_\alpha)$ . . . 80
5 Interprétation des résultats numériques . . . 82
5.1 Sensibilité par rapport à λ . . . 82
5.2 Sensibilité par rapport à α. . . . 88
6 Conclusion . . . 89

5 Étude d'une équation géométrique non-locale du second ordre apparaissant dans la reconstruction tomographique 91
1 Introduction . . . 93
2 Presentation of our problem . . . 96
3 Uniqueness result for compact fronts . . . 100
4 Uniqueness result for non compact fronts . . . 105
5 Existence result . . . 110
6 Appendix . . . 113

Perspectives 117

Mes travaux et communications 119

Bibliographie 121

Introduction

Introduction

La tomographie consiste à reconstituer un objet tridimensionnel à partir de radiographies bidimensionnelles appelées projections. En d'autres termes, un objet est soumis à un faisceau d'électrons : chaque point de cet objet est alors caractérisé par son coefficient d'atténuation. La tomographie consiste à recueillir ces mesures d'atténuations (projections) d'un rayon X à travers un objet et à reconstruire la carte de densité de cet objet à partir de ces mesures. Cette problématique a été intensivement étudiée depuis le début des années 1970 et elle a eu de nombreuses applications notamment en imagerie médicale (scanner).

En utilisant un nombre suffisant de projections, il est possible de déduire de l'ensemble des observations la densité en chaque point de l'objet. Dans ce cadre, plusieurs travaux ont été réalisés : dans [24], J. P. Bruandet et al. reconstruisent une image binaire pour un objet 3D à partir d'un certain nombre de projections. Dans [52], M. Soumekh illustre le problème de reconstruction d'une image binaire à partir de deux paires de projections orthogonales. F. Dubois [32] considère le problème de reconstruction tomographique en utilisant la méthode de rétroprojection filtrée.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude théorique et numérique d'un modèle de reconstruction tomographique qui apparaît dans [1]. Dans ce modèle, I. Abraham, R. Abraham et M. Bergounioux tentent de reconstruire, à partir d'une seule radiographie, la carte de densité d'un objet binaire composé d'une matière homogène (en noir) et de petits trous (en blanc) (voir figure 1). Comme l'objet est observé sous une seule radiographie, une hypothèse de symétrie est nécessaire pour réaliser la reconstruction. Sous cette hypothèse, il suffit de prendre une section plane, l'objet 3D sera obtenu par rotation de cette section autour de l'axe de symétrie.

Si nous supposons que u est la carte de densité de l'objet initial et g celle de l'image observée, le problème consiste à trouver u sachant que, sans aucune perturbation (bruit), $Hu = g$, où H est l'opérateur de projection de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ donné par :

$$Hu(y,z) = 2\int_{|y|}^{+\infty} u(r,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr,$$

où $\Omega = [0,a) \times (-a,a)$, est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$ ($a > 0$) qui représente le domaine de l'image. Un calcul explicite de u revient à calculer l'inverse de l'opérateur de



FIG. 1: Exemple de section plane d'un objet à symétrie radiale.

projection H :

$$u(r,z) = H^{-1}g(r,z) = -\frac{1}{\pi}\int_r^a \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(y,z)}{\sqrt{y^2-r^2}}dy.$$

À cause du terme $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, l'opérateur H^{-1} n'est pas un opérateur borné sur $L^2(\Omega)$. En utilisant H^{-1}, une petite perturbation dans l'image observée génère une grande perturbation dans l'image reconstruite. La reconstruction opérée à partir de H^{-1} est donc instable.

1 Approche variationnelle

Le problème de reconstruction étant mal posé, nous devons trouver une méthode qui n'utilise pas l'inverse de l'opérateur de projection. Pour améliorer la reconstruction, une stratégie d'optimisation continue est largement utilisée : c'est l'approche variationnelle. Ce type de méthode a été introduit en 1997 par A. N. Tikhonov et V. Y. Arsenin [53], puis a été développé dans ce contexte par D. Mumford et J. Shah dans [43]. Cette stratégie consiste à chercher u comme un minimiseur d'une fonctionnelle

$$E(u) = ||Hu - g||^2_{L^2} + \lambda J(u),$$

où λ est une constante positive et $J(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|$ désigne la variation totale de u dans $BV(\Omega)$. Comme l'image est binaire, le problème de minimisation devient :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u\in BV(\Omega)} ||Hu - g||^2_{L^2} + \lambda J(u), \\ u \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

où l'ensemble des contraintes $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D} = \{u \in BV(\Omega) : u(1-u) = 0 \ \text{ p.p. dans } \ \Omega \ \}.$$

Le premier terme de la fonctionnelle E est un terme d'ajustement à la donnée observée. Ce terme mesure la fidélité entre Hu et la carte de densité de l'image bruitée g. Le deuxième est un terme de régularisation qui permet de sélectionner une solution sur des critères géométriques (prise en compte des contours via les discontinuités par exemple). C'est aussi un terme qui assure la coercivité de la fonctionnelle à minimiser. Autrement dit, non seulement nous voulons que Hu soit « proche » de l'image observée g, mais nous imposons également que le « gradient » de u soit petit pour minimiser la longueur des contours et donc éliminer le bruit.

Notre but est en premier lieu prouver, si possible, l'existence et l'éventuelle unicité d'une solution puis établir des conditions d'optimalité (équations d'Euler-Lagrange). Dans le cas de contraintes qualifiées[(1)], plusieurs travaux ont été réalisés : pour une fonctionnelle différentiable, nous considérons les travaux de G. Allaire [4], G. Aubert et P. Kornprobst [9], A. Acar et C. R. Vogel [3] et J. B. Hiriart-Urruty [38]. Dans le cas où la fonctionnelle est non différentiable, citons le travail de G. Aubert et P. Kornprobst [9], K. Kunisch et C. Pola [25] ainsi que le papier de A. Chambolle, F. Alter et V. Caselles [5]. Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive.

Le problème $(\mathcal{P})$ présente deux difficultés majeures. Tout d'abord, l'ensemble des contraintes $\mathcal{D}$ n'est pas convexe et il est d'intérieur vide pour n'importe quelle topologie raisonnable ; les contraintes ne sont pas qualifiées (pour les conditions usuelles). Par conséquent, nous ne pouvons pas utiliser de résultats standards pour trouver un système d'optimalité associé au problème $(\mathcal{P})$. Ensuite, à cause du terme de régularisation $J(u)$, la fonctionnelle E n'est pas Fréchet-différentiable.

R. Abraham et al. ont étudié le problème $(\mathcal{P})$ dans [2]. Ils ont prouvé qu'il existe au moins une solution $\bar{u}$ de ce problème dans $BV(\Omega)$ (à condition de se restreindre à une boule de rayon arbitraire mais fixé ce qui n'est pas très restrictif). De plus, pour établir un système d'optimalité, ils ont pénalisé la contrainte $u(1-u)=0$ en considérant le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \min\limits_{u\in BV(\Omega)} \dfrac{1}{2}\left\|Hu-g\right\|_{L^2}^2 + \lambda\displaystyle\int_\Omega |\nabla u| + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|u^2-u\right\|_{L^2}^2, \\ \\ u \in BV(\Omega)\cap\mathcal{B}_R, \end{cases}$$

où R est un réel positif et

$$\mathcal{B}_R = \{u \in L^\infty : ||u||_\infty \leq R\}.$$

Après avoir prouvé que le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ admet une solution u_ε dans $BV(\Omega)\cap\mathcal{B}_R$, ils ont démontré que cette solution converge faiblement, quand $\varepsilon \to 0$, vers u^* dans $BV(\Omega)\cap\mathcal{B}_R$, où u^* est une solution de $(\mathcal{P})$. En utilisant un résultat de [25], un système d'optimalité

[(1)] Les contraintes qualifiées sont les contraintes dans lesquelles nous pouvons trouver des directions admissibles suivant lesquelles nous établissons des conditions différentielles sur la fonctionnelle au point minimum.

pénalisé a été établi . Finalement, des estimations a priori ont été utilisées pour passer à la limite en ε.

Dans la première partie de notre travail, nous avons mis en place une stratégie différente pour étudier le problème $(\mathcal{P})$. Pour pallier à la non convexité de l'ensemble $\mathcal{D}$ et au défaut de différentiabilité, nous allons apporter deux modifications au modèle initial $(\mathcal{P})$. Pour gérer le problème de la non-différentiabilité de la fonctionnelle E, nous remplaçons $J(u)$ par un terme plus régulier $\|\nabla u\|_{L^2}^2$. Avec ce nouveau terme de régularisation, nous imposons que le gradient de l'image (qui était a priori une mesure) soit borné dans L^2. Cela revient à régulariser plus fortement l'image. Nous aurons donc une perte d'informations dans les zones non lisses de l'image. Ensuite, comme l'ensemble $\mathcal{D}$ est d'intérieur vide, nous ne pouvons pas prendre de fonctions tests admissibles au voisinage d'un point $u \in \mathcal{D}$. Pour contourner le problème, nous allons relaxer la contrainte de binarité $u(u-1) = 0$ en considérant l'ensemble $\mathcal{D}_\alpha$ donné par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \{u \in H^1(\Omega) : 0 \leq u \leq 1, (u, 1-u)_2 \leq \alpha\},$$

où α est une constante strictement positive et $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\}.$$

Si la constante α est suffisamment petite, nous approchons la contrainte $u(u-1) = 0$ et nous obtenons un problème régulier qui est, a priori, assez proche du problème $(\mathcal{P})$. D'autre part, cette relaxation est justifiée d'un point de vue numérique car la relation $\int_\Omega u(1-u) = 0$ est toujours remplacée par $\left|\int_\Omega u(1-u)dx \leq \alpha\right|$ en raison des erreurs numériques.

Une fois que nous avons modifié le problème $(\mathcal{P})$, nous avons affaire à un problème de minimisation $(\mathcal{P}_\alpha)$ avec des contraintes d'inégalités (toujours non convexes)

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \begin{cases} \min\limits_{u \in H^1(\Omega)} \dfrac{1}{2}\|Hu - g\|_{L^2}^2 + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2, \\ \\ u \in \mathcal{D}_\alpha \ \text{ dans } \quad \Omega. \end{cases}$$

Dans un premier temps, nous montrons qu'il existe au moins une solution u_α de $(\mathcal{P}_\alpha)$. Les nouvelles contraintes sont maintenant qualifiées (dans un sens faible) : nous utilisons pour cela une méthode de Programmation Mathématique dans un espace de Banach [18, 54, 55]. Cette méthode est adaptée pour résoudre les problèmes du type

$$\min\{f(x,u) : T(x,u) = 0, G(x,u) \leq 0, u \in \mathcal{U}_{ad}\}, \tag{1}$$

avec

$$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R},$$
$$T : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Z}_1,$$

et

$$G : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Z}_2,$$

où $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ sont des espaces de Banach, $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ est un ensemble admissible convexe fermé et f, G, T sont Fréchet-différentiables. Nous définissons dans $\mathcal{Z}_2$ un cône fermé convexe $\mathbf{P}$ tel que $\mathcal{Z}_2$ est partiellement ordonnée par la relation $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{P}$. Nous supposons qu'il existe une solution (x_0, u_0) pour (1) et nous introduisons les ensembles suivants :

$$\mathcal{U}_{ad}(u_o) = \{\ u \in \mathcal{U} \mid \exists \lambda \geq 0, \exists u^* \in \mathcal{U}_{ad},\ u = \lambda(u^* - u_o)\ \},$$
$$\mathbf{P}(G(x_o, u_o)) = \{\ z \in \mathcal{Z}_2 \mid \exists \lambda \geq 0, \exists p \in -\mathbf{P},\ z = p - \lambda G(x_o, u_o)\ \},$$
$$\mathbf{P}^+ = \{\ y \in \mathcal{Z}_2^* \mid\ \langle y, p \rangle \geq 0\ , \forall p \in \mathbf{P}\ \}.$$

Le théorème-clé qui donne le système d'optimalité de $(\mathcal{P}_\alpha)$, est le suivant :

Théorème 1.1 ([41]) Soit (x_0, u_0) une solution de (1). Si, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2$, le système

$$\begin{array}{rcl} T'(x_o, u_o)(x, u) & = & z_1, \\ G'(x_o, u_o)(x, u) - p & = & z_2, \end{array} \tag{2}$$

admet une solution $(x, u, p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}_{ad}(u_o) \times \mathbf{P}(G(x_o, u_o))$, alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $(y_1, y_2) \in \mathcal{Z}_1' \times \mathcal{Z}_2'$ tels que :

$$f_x'(x_o, u_o) + T_x'(x_o, u_o)^* y_1 + G_x'(x_o, u_o)^* y_2 = 0, \tag{3}$$

$$\langle f_u'(x_o, u_o) + T_u'(x_o, u_o)^* y_1 + G_u'(x_o, u_o)^* y_2, u - u_o \rangle_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} \geq 0\ ,\ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \tag{4}$$

$$y_2 \in \mathbf{P}^+\ ,\ \langle y_2, G(x_o, u_o) \rangle_{\mathcal{Z}_2', \mathcal{Z}_2} = 0. \tag{5}$$

Afin d'appliquer cette méthode au problème $(\mathcal{P}_\alpha)$, nous introduisons une variable auxiliaire v et considérons le problème de minimisation équivalent suivant :

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \begin{cases} \min \dfrac{1}{2} \|Hu - g\|_{L^2}^2 + \dfrac{\lambda}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2, \\ \\ (u, v) \in \mathcal{C}_\alpha, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{C}_\alpha = \{(u, v) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{V}_{ad} : u + v = 1, (u, v)_2 \leq \alpha\},$$

et

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in H^1(\Omega) : u \geq 0\},\ \ \mathcal{V}_{ad} = \{v \in L^2 : v \geq 0\}.$$

Nous montrons tout d'abord qu'il existe une solution $(u_\alpha, v_\alpha) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ puis nous appliquons le théorème 1.1 au problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ avec $\mathcal{X} = H^1(\Omega), \mathcal{U} = H^1(\Omega)$, $\mathcal{Z}_2 = H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ et

$$\mathbf{P} = \{(u, \tau) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R} \mid u \geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega,\ \tau \geq 0\ \}\ .$$

Dans ce cas, $T(u,v) = u + v - 1$ et f, G sont données par :

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\|Hu - g\|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2},$$

et

$$\begin{array}{rccc} G : & H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \to & H^1(\Omega) \times \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & (-u, (u,v)_2 - \alpha)\,. \end{array}$$

Les fonctions f et G sont de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{v \in H^1(\Omega) : v \geq 0 \ p.p\right\},$$

et $\mathcal{V}_{ad}(v_\alpha) = \{\lambda(v - v_\alpha) : \lambda \geq 0, v \in \mathcal{V}_{ad}\}$. Finalement

$$\mathbf{P}(G(u_\alpha, v_\alpha)) = \left\{(-p + \lambda u_\alpha, -\gamma - \lambda\left[(u_\alpha, v_\alpha) - \alpha\right]) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}\right\},$$

où p, λ et γ sont des constantes positives.
En écrivant la condition (2), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{array}{c} u + \mu(v - v_\alpha) = z_1, \\ -u + p - \lambda u_\alpha = z_2, \\ (u_\alpha, \mu\,(v - v_\alpha)) + (u, v_\alpha)_2 + \delta + \lambda\left[(u_\alpha, v_\alpha) - \alpha\right] = \theta, \end{array}$$

où $(\mu, \delta, \lambda, p) \in \mathbb{R}^4_+$, $v \in \mathcal{V}_{ad}, u \in H^1(\Omega)$.

La vérification de cette hypothèse est délicate et nous allons donc « contourner » la difficulté en pénalisant le problème $(\mathcal{P}_\alpha)$, pour passer ensuite à la limite. Nous considérons donc le problème suivant

$$(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha) \quad \begin{cases} \min F^\varepsilon_\alpha =: \|Hu - g\|^2_{L^2} + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} + \dfrac{1}{2\varepsilon}\|u + v - 1\|^2_{L^2} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\|u - u_\alpha\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v - v_\alpha\|^2_{L^2}\,, \\ (u,v) \in \mathcal{K}_\alpha, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{(u,v) \in (H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) : u \geq 0, v \geq 0, (u,v)_2 \leq \alpha\right\}.$$

Nous prouvons que le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha)$ admet une solution $(u^\varepsilon_\alpha, v^\varepsilon_\alpha)$ puis, nous montrons que cette solution converge fortement, quand $\varepsilon \to 0$, vers $(u_\alpha, 1 - u_\alpha)$ dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ où u_α est une solution de $(\mathcal{P}_\alpha)$. La condition (2) avec $T = 0$ est alors vérifiée, avec les mêmes fonctions f, G et nous obtenons le système d'optimalité suivant :

Théorème 1.2 (Théorème 2.5, chapitre 3) La solution $(u^\varepsilon_\alpha, v^\varepsilon_\alpha)$ du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha)$ satisfait le système d'optimalité (S^ε_α) suivant :

$$\begin{array}{ll} \forall u \in H^1(\Omega) & (p^\varepsilon_\alpha + q^\varepsilon_\alpha, u - u^\varepsilon_\alpha)_2 + \lambda\,(\nabla u^\varepsilon_\alpha, \nabla(u - u^\varepsilon_\alpha))_2 + r^\varepsilon_\alpha\,(u - u^\varepsilon_\alpha, v^\varepsilon_\alpha)_2 \\ & + (u^\varepsilon_\alpha - u_\alpha, u - u^\varepsilon_\alpha)_{H^1} + (v^\varepsilon_\alpha - v_\alpha, v - v^\varepsilon_\alpha)_2 \geq 0, \end{array} \tag{6a}$$

$$\forall v \in \mathcal{V}_{ad} \qquad (q_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 + r_\alpha^\varepsilon \, (u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 \geq 0, \tag{6b}$$

$$r_\alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}_+, \qquad r_\alpha^\varepsilon((u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha) = 0, \tag{6c}$$

avec $p_\alpha^\varepsilon = H^\star H u_\alpha^\varepsilon$ et $q_\alpha^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1)$. □

Pour passer au système d'optimalité du problème $(\mathcal{P}_\alpha)$, des estimations sur r_α^ε et q_α^ε sont nécessaires. Lors de notre étude, nous prouvons que r_α^ε est borné dans $\mathbb{R}_+$ et q_α^ε est borné dans $\mathcal{M}(\Omega) = (L^\infty)'(\Omega)$, uniformément par rapport à ε. Avec ces estimations, il existe r_α dans $\mathbb{R}_+$ et q_α dans $\mathcal{M}(\Omega)$ tels que :

$$r_\alpha^\varepsilon \to r_\alpha \text{ dans } \mathbb{R},$$

et

$$q_\alpha^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} q_\alpha \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega) \text{ pour la topologie faible} - *.$$

Nous passons à la limite en ε dans (S_α^ε), nous obtenons le système (S_α) :

$$\begin{aligned} &\forall u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ tel que } u \geq 0 \\ &(H^*(Hu_\alpha - g) + r_\alpha v_\alpha, u - u_\alpha)_2 + \lambda \, (\nabla u_\alpha, \nabla(u - u_\alpha))_2 + \langle q_\alpha, u - u_\alpha \rangle_{\mathcal{M},L^\infty} \quad \geq 0, \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\forall v \in \mathcal{V}_{ad} \cap L^\infty(\Omega) \qquad \langle q_\alpha, v - v_\alpha \rangle_{\mathcal{M},L^\infty} + r_\alpha \, (u_\alpha, v - v_\alpha)_2 \geq 0, \tag{7b}$$

$$r_\alpha \, [(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha] = 0. \tag{7c}$$

Dans la suite, le but est d'établir un schéma numérique à partir de ce système.

2 Simulation numérique pour l'approche variationnelle

Dans cette partie, nous utilisons le système d'optimalité (S_α) pour construire un schéma numérique afin de résoudre $(\mathcal{P}_\alpha)$. L'idée principale est inspirée du théorème de Karush-Kuhn-Tucker [4, Théorème 10.3.4]. Grâce à ce théorème, nous établissons un lien entre la notion de point-selle et la solution d'un problème de minimisation avec une contrainte d'inégalités. Plus précisément, en utilisant le système d'optimalité (S_α), nous interprétons le couple (solution, multiplicateurs de Lagrange) comme un point-selle d'un Lagrangien associé au problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ (cf. [19, 21]).

La mesure q_α est difficile à appréhender numériquement. Dans un premier temps, nous allons commencer par le traitement numérique du problème $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ avec l'objectif d'en déduire un schéma numérique pour $(\mathcal{P}_\alpha)$. Comme la solution u_α de $(\mathcal{P}_\alpha)$ n'est pas connue de façon explicite, nous considérons le même problème pénalisé $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ mais en ignorant les termes $||u - u_\alpha||_{H^1}^2$ et $||v - v_\alpha||_{L^2}^2$.

En appliquant la même méthode, nous établissons le même système d'optimalité obtenu dans le théorème 1.2 en enlevant les termes correspondants au $||u - u_\alpha||_{H^1}^2$ et $||v - v_\alpha||_{L^2}^2$.

Nous considérons maintenant le Lagrangien associé au problème $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ défini par :

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u,v,r) = F_\alpha^\varepsilon(u,v) + r[(u,v)_2 - \alpha].$$

Dans le cas où la contrainte $(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha$ est inactive, c'est-à-dire si

$$(u_\alpha, v_\alpha)_2 < \alpha,$$

nous montrons que le couple $(u_\alpha^\varepsilon, v^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$:

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u,v,r_\alpha^\varepsilon), \quad \forall (u,v,r) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{V}_{ad} \times \mathbb{R}_+.$$

Une fois que nous avons démontré cette propriété pour le couple (solution, multiplicateurs de Lagrange), nous utilisons la méthode d'Uzawa [4, 20] pour établir un schéma numérique sur $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$. Avec cette méthode, nous cherchons une suite (u^n, v^n, r^n) qui approche $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ suivant l'algorithme :

Algorithme $\mathcal{A}_0$ (ε fixé)

Étape 0 Initialisation : on se donne $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}, v^{-1} \in \mathcal{V}_{ad}, r^0 \in \mathbb{R}_+$.
Étape 1 Itération sur u^n et v^n :

$$u^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u, v^{n-1}, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}_{ad}.$$

$$v^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u^n, v, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}_{ad}.$$

Étape 2 Itération sur r^n :

$$r^{n+1} = r^n + \rho[(u^n, v^n)_2 - \alpha]_+.$$

Étape 3 Test d'arrêt : on arrête la procédure si $||u^{n+1} - u^n|| < \tau$ et $||v^{n+1} - v^n|| < \tau$ où τ est la précision choisie. Sinon, on pose $n = n + 1$ et on retourne aux étapes 2 et 3.

Tout d'abord, pour les étapes 2 et 3, nous utilisons la méthode du gradient à pas optimal. Ensuite, pour discrétiser l'algorithme $(\mathcal{A}_0)$, nous utilisons une discrétisation explicite en différences finies pour les termes d'intégraux et différentiels le terme de Laplacien. Le calcul des matrices correspondant aux opérateurs H et $H^\star$ est direct.

L'algorithme $(\mathcal{A}_0)$ donne une reconstruction instable. Cette instabilité est liée à la présence du terme perturbant ε (voir chapitre 4). La stratégie est alors de faire une étude numérique directe pour le problème $(\mathcal{P}_\alpha)$.

Dans le but d'utiliser la méthode d'Uzawa sur le problème $(\mathcal{P}_\alpha)$, nous faisons un calcul formel. Nous considérons maintenant le Lagrangien $\mathcal{L}_\alpha$ associé à $(\mathcal{P}_\alpha)$:

$$\mathcal{L}_\alpha(u,v,q,r) = ||Hu - g||_{L^2}^2 + \lambda \int |\nabla u|^2 dx + \langle q, u + v - 1\rangle_{\mathcal{M},L^\infty} + r[(u,v)_2 - \alpha],$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M},L^\infty}$ est le crochet de dualité entre $\mathcal{M}(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$.
Grâce au système d'optimalité (S_α) et toujours dans le cas où la contrainte $(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha$ est inactive, nous montrons que $(u_\alpha, v_\alpha, q_\alpha, r_\alpha)$ est un point selle de $\mathcal{L}_\alpha$. Nous appliquons la méthode d'Uzawa et nous obtenons l'algorithme suivant :

Algorithme $\mathcal{A}_1$ (α fixé)

Étape 0 Initialisation : on se donne $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}, q^0 \in L^2(\Omega), v^{-1} \in \mathcal{V}_{ad}$.
Étape 1 Itération sur u^n et v^n :

$$u^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha(u, v^{n-1}, q^n, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}_{ad}.$$

$$v^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha(u^n, v, q^n, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}_{ad}.$$

Étape 2 Itération sur q^n :

$$q^{n+1} = q^n + \rho_1(u^n + v^n - 1).$$

Étape 3 Itération sur r^n :

$$r^{n+1} = r^n + \rho_2[(u^n, v^n)_2 - \alpha]_+.$$

Étape 4 Critère d'arrêt : on arrête l'algorithme dès que $||u^{n+1} - u^n||_\infty$ et $||q^{n+1} - q^n||_\infty$ sont suffisamment petits.

Pour les étapes 2 et 3, nous utilisons toujours la méthode du gradient à pas optimal. Avec la même discrétisation utilisée dans l'algorithme ($\mathcal{A}_0$), nous obtenons une reconstruction assez stable et nous récupérons à partir de l'image bruitée des informations importantes et précises sur l'image initiale. Ces résultats sont illustrés dans le chapitre 4.

3 Approche par les lignes de niveaux (Level-Set approach)

Comme l'objet initial est homogène et binaire, une reconstruction satisfaisante pour un tel objet nécessite une bonne connaissance des contours qui contiennent l'information essentielle de l'image. En d'autres termes, pour reconstruire l'image binaire, il suffit de trouver les courbes (contours) qui séparent les deux régions de binarité. Il est donc naturel d'avoir recours à la méthode des contours actifs.

La méthode des contours actifs constitue un outil efficace pour la segmentation d'images et la reconnaissance des formes. Cette méthode consiste à faire évoluer une courbe initiale Γ_u^0 de classe C^2 avec une vitesse de propagation normale afin de détecter les contours de l'objet initial. Dans notre modèle, compte tenu de la topologie de l'objet étudié, le but est de trouver une famille de courbes $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$ qui convergent vers le contour des trous de l'objet initial. L'évolution de cette famille de courbes est gouvernée par une équation du type :

$$\frac{\partial \Gamma_u^t}{\partial t} = V\vec{n}, \tag{8}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur à la courbe Γ_u^t et V représente la vitesse de propagation. Cette vitesse est choisie d'une manière optimale en utilisant une approche d'optimisation, basée sur l'étude des variations de la fonctionnelle E par rapport à la courbe Γ_u^t (Dérivée de Gâteaux). Le calcul des variations de l'énergie E par rapport à la courbe Γ_u^t aboutit à la vitesse de propagation suivante :

$$V = H^\star Hg - H^\star Hu + \beta \mathrm{Curv}(\Gamma_u^t), \tag{9}$$

où $\mathrm{Curv}(\Gamma_u^t)(x)$ désigne la courbure à la courbe Γ_u^t au point $x \in \Gamma_u^t$ et β est une constante positive. La question est maintenant de savoir comment suivre l'évolution de la courbe initiale et comment gérer les changements de la topologie de cette courbe pendant l'évolution.

La méthode des lignes de niveaux est une réponse efficace à ce genre de questions. Elle permet de suivre la propagation de la courbe initiale et de gérer le changement de topologie. Elle consiste à traiter la courbe Γ_u^t comme la ligne de niveau zéro d'une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}$

$$\phi(x,t) = 0 \ \text{ pour tout } \ x \in \Gamma_u^t. \tag{10}$$

À un instant t de propagation, la densité u est donnée par $u(x,t) = \mathbb{1}_{\phi(x,t)\geq 0}$. En dérivant (10) par rapport à t puis en utilisant la formule de la vitesse de propagation (9), nous voyons que l'évolution de la courbe Γ_u^t est gouvernée, via ϕ, par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = |\nabla \phi| \left(\left(H^\star Hg - H^\star H \left(\mathbb{1}_{\phi(.,t)\geq 0} \right) \right)(x,t) + \beta \mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) \ \text{dans } \ \mathbb{R}^2 \times [0,\mathrm{T}], \\ \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \ \text{dans } \ \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \end{cases} \tag{11}$$

avec

$$H^\star H(\mathbb{1}_{\phi(.,t)})(x,y) = \int_0^1 |x| \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{(r,s):\phi\left(\sqrt{r+x^2s^2},y,t\right)\geq 0\}}}{\sqrt{r}\sqrt{1-s^2}} dr ds.$$

Il s'agit d'une équation géométrique du second ordre avec un terme de courbure et un terme non-local. À cause de la présence du terme non-local, des difficultés au niveau de l'existence, de l'unicité et de la stabilité sont intervenues lors de l'étude de l'équation (11).

Motivés par cette équation, nous allons étudier une classe d'équations plus générale du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x,t,Du,D^2u,[u]_{x,t}) \text{ dans } \mathbb{R}^N \times [0,T], \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \tag{12}$$

où $T > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. La solution u est une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, Du et D^2u désignent respectivement son gradient et sa matrice hessienne par rapport à la variable d'espace $(x_1, ..., x_N)$. Enfin, $[u]_{x,t}$ désigne le terme non-local et la non-linéarité F est une fonction continue de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_N$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathscr{S}_N$ désigne l'espace des matrices symétriques de taille $N \times N$ muni de l'ordre partiel usuel

$$M_2 \leq M_1 \Leftrightarrow (M_2 p, p) \leq (M_1 p, p) \ \ \forall p \in \mathbb{R}^N,$$

et $\mathscr{B}_N$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de tous les sous ensembles de $\mathbb{R}^N$ muni de la relation d'équivalence $A \sim B$ si $\mathcal{L}^N(A \Delta B) = 0$, où $\mathcal{L}^N$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.

Pour résoudre ce type d'équation, nous allons utiliser la notion de solutions de viscosité (cf. [13, 29, 12, 40]). Cette théorie a été introduite en 1981 par M.G. Crandall et P.L. Lions [30] pour résoudre des problèmes posés par les équations de type Hamilton-Jacobi du premier ordre, mais elle est très vite apparue comme une notion de solutions faibles bien adaptée pour les équations elliptiques non linéaires, éventuellement dégénérées et non-locales. Cette notion repose sur le principe du maximum à partir duquel elle s'introduit naturellement. L'idée de base des solutions de viscosité est de remplacer les « dérivées » de la solution dans l'équation par les dérivées de la fonction-test lisse évaluées aux points de maximum ou de minimum de la différence entre la solution et la fonction-test.

La notion de solutions de viscosité est bien adaptée aux équations pour lesquelles F vérifie les hypothèses classiques suivantes :
(**F1**)(**Monotonie**) : pour tout $(x, t, p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N$, pour tout $K, L \in \mathscr{B}_N$ tels que $K \subset L$, nous avons :

$$F(x, t, p, X, K) \leq F(x, t, p, X, L).$$

D'un point de vue géométrique, cette hypothèse est traduite de la façon suivante : en considérant à $t = 0$ deux ensembles Ω_1^0 et Ω_2^0 dans $\mathbb{R}^2$ tels que $\Omega_1^0 \subset \Omega_2^0$. En évoluant en temps le bord de Ω_1^0 et Ω_2^0 avec une vitesse de propagation non-locale et suivant la direction normale, l'hypothèse de la monotonie garantit l'inclusion de Ω_1^t dans Ω_2^t à un instant quelconque t de propagation.
Ensuite, le terme du second ordre étant présent, une hypothèse de croissance par rapport à ce terme est nécessaire :
(**F2**)(**Ellipticité**) : pour tout $(x, t, p, K) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{B}_N$, pour tout $X \in \mathscr{S}_N, Y \in \mathscr{S}_N$, si $X \leq Y$ alors

$$F(x, t, p, X, K) \leq F(x, t, p, Y, K).$$

Finalement, nous supposons que, l'équation (12) est invariante par tout changement croissant de fonctions $u \to \Psi(u)$, $\Psi' > 0$:
(**F3**)**(Géométrique)** : pour tout $(x, t, p, X, K) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_N$, pour tout $\lambda \geq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, nous avons une hypothèse géométrique :

$$F(x, t, \lambda p, \lambda X + \mu p \otimes p, K) = \lambda F(x, t, p, X, K).$$

Les travaux réalisés sur ce genre d'équations portent sur un terme non-local de la forme

$$[u]_{x,t}^{+} = \{y \in \mathbb{R}^N : u(y, t) \geq u(x, t)\},$$

et

$$[u]^-_{x,t} = \{y \in \mathbb{R}^N : u(y,t) > u(x,t)\}.$$

Avec ces termes non-locaux, nous pouvons utiliser la définition de la solution de viscosité suivante due à D. Slepčev.

Définition 3.1 (Slepčev [49]) Une fonction localement bornée $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$ est dite sous-solution de viscosité de (12), pour toute fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, si $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^N \times]0,T]$ est un point de maximum local de $u^\star - \phi$, alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0,t_0) \leq F_\star(x_0,t_0,D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0),[u]^+_{x_0,t_0}).$$

et $u(x,0) \leq u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Une fonction localement bornée $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$ est dite sur-solution de viscosité de (12) si la condition suivante est vérifiée : pour toute fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, si $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^N \times]0,T]$ est un point de minimum local de $u_\star - \phi$, alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0,t_0) \geq F^\star(x_0,t_0,D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0),[u]^-_{x_0,t_0}).$$

et $u(x,0) \geq u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Une fonction localement bornée $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$ est dite solution de viscosité de (12) si elle est à la fois sous et sur-solution de (12).

Notons que pour toute fonction localement bornée $u : S \to \mathbb{R}$, où S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$, nous définissons ses enveloppes supérieure $u^\star$ et inférieure $u_\star$, pour tout $z \in \bar{S}$, par

$$u^\star(z) = \limsup_{\substack{z' \to z \\ z' \in S}} u(z') \ \text{ et } \ u_\star(z) = \liminf_{\substack{z' \to z \\ z' \in S}} u(z').$$

Cette définition est particulière et hors du cadre classique. En effet, suite à un problème de stabilité par rapport au terme non-local, nous remplaçons le terme $[u]^+_{x,t}$ par $[u]^-_{x,t}$ dans la définition de la sur-solution. Cette idée est bien illustrée dans [49] ainsi que dans l'annexe du chapitre 5.

Dans [49], Slepčev a étudié l'évolution d'un front dans un domaine borné suivant une vitesse non-locale dépendant de la courbure de front. En propageant avec ce genre de vitesse, le mouvement de front est décrit par une équation géométrique du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x,t,Du(x,t),D^2u(x,t),[u]^+_{x,t}) \quad \text{dans} \quad O \times [0,T], \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = 0 \quad \text{sur} \ \ \partial O \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad O \times \{0\}, \end{cases} \tag{13}$$

où O est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et γ désigne la normale extérieure à O. Pour une fonction F lipschitzienne en x et Du, bornée indépendamment du terme non-local et sous

les hypothèses (**F1-F2-F3**), Slepčev a établi un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de viscosité de (13).

Dans [15], G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley et R. Monneau ont étudié une équation d'Hamilton-Jacobi intervenue lors de la modélisation des dislocations dans un cristal en utilisant la méthode d'ensembles de niveaux

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Big(C_0(.,t) * \mathbb{1}_{[u]^+_{x,t}}(x,t) + C_1(x,t)\Big)\,|Du| \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0,T]\,, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \{0\}\,. \end{cases} \tag{14}$$

Dans le cas où $C_0 \geq 0$, $C_0(.,t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t \in [0,T]$ et C_0, C_1 sont deux fonctions Lipchitziennes, un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de viscosité a été prouvé dans [15]. De plus, en utilisant la notion de solutions faibles, un résultat d'existence est établi dans [15] sous condition de signe négatif. Il reste à signaler que, ce même type d'équations avec les formulations $[u]^+_{x,t}$ et $[u]^-_{x,t}$ du terme non-local a été étudié dans [31].

Lors de l'étude du problème (11), deux difficultés sont intervenues au niveau du terme non-local.
Tout d'abord, à cause de la présence du signe négatif devant $H^\star H \mathbb{1}_{\phi\geq 0}$, l'équation (11) ne conserve pas l'hypothèse (**F1**) par rapport au terme non-local. Afin d'appliquer la notion de solutions de viscosité, nous allons modifier le signe du terme non-local en considérant ce terme avec le bon signe. Suite à cette modification, on s'éloigne du modèle étudié et l'étude numérique de cette approche devient moins intéressante.
Ensuite, ce dernier terme n'a pas la même forme classique considérée dans [15, 49]. La particularité essentielle du terme non-local dans (11) est que la deuxième variable « y » est toujours fixée. Motivés par cette particularité, nous allons nous intéresser dans notre étude aux termes non-locaux du type :

$$K^{k,+}_{x,t,u} = [u]^+_{x,t} \cap A^k_x,$$

et

$$K^{k,-}_{x,t,u} = [u]^-_{x,t} \cap A^k_x,$$

avec $k < N$ et

$$A^k_x = \left\{ y = (y_1, ..., y_k, y_{k+1}, ..., y_N) \in \mathbb{R}^N : \pi_k(y) = \pi_k(x) \right\},$$

où π_k désigne la projection $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^k$ définie par :

$$\pi_k(x) = (x_1, ..., x_k) \text{ si } x = (x_1, ..., x_k, ...x_N).$$

Pour appliquer la notion de viscosité et obtenir des résultats d'existence, unicité et stabilité généraux, une telle forme du terme non-local nécessite une modification sur la

dépendance de la non-linéarité de F par rapport au terme du gradient. Plus précisément, nous allons étudier des équations paraboliques non-linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x,t,Du,D^2u,K^{k,+}_{x,t,u}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0,\mathrm{T}]\,, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \{0\}\,, \end{cases} \tag{15}$$

avec $N \geq 1$ est un entier et $T > 0$.

Un exemple typique est représenté par :

$$F(x,t,Du,D^2u,K^{1,+}_{x,t,u}) = C(x,t)\left(\int_{K^{1,+}_{x,t,u}} g(z)dz\right)|\frac{\partial u}{\partial x_2}| + \mathrm{Trace}\left[(I - \frac{Du \otimes Du}{|Du|^2})D^2u\right], \tag{16}$$

avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, C est une fonction positive de $\mathbb{R}^2 \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$ et g est une fonction positive.

Le terme non-local présent dans (16) est plus singulier que celui de [49, 15], il n'a pas la forme d'une convolution. Dans (14), le terme non-local est donné par :

$$[u]^+_{x,t} = \{y \in \mathbb{R}^2 : u(y,t) \geq u(x,t)\}\,,$$

donc nous intégrons sur un ensemble de $\mathbb{R}^2$ alors que, dans l'équation (16), le terme non-local est donné par :

$$K^{1,+}_{x,t} = [u]^+_{x,t} \cap A^1_x = \{y \in \mathbb{R}^2 : u(y,t) \geq u(x,t)\} \cap \{y_1 = x_1\}\,,$$

donc, la première variable est fixée et nous intégrons seulement sur une ligne droite.

Sur cet exemple, la dépendance en $|\frac{\partial u}{\partial x_2}|$ au lieu de $|\nabla u|$ est nécessaire pour établir un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de viscosité. Autrement dit, à cause de niveau terme non-local, la technique classique de viscosité utilisée dans [49, 15, 31] reste inapplicable. Afin de gérer ce problème, nous avons apporté une modification sur la dépendance de la fonction F par rapport au terme du gradient. D'un point de vue géométrique, au lieu de propager le front dans le sens normal, nous le propageons dans le sens vertical, la direction d'intégration pour le terme non-local.

Après ces remarques sur le terme non-local et la dépendance de F par rapport au terme du gradient, nous nous intéressons dans (16) aux deux cas : $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \notin L^1(\mathbb{R})$. Dans le premier cas, le terme non-local a toujours un sens et la vitesse de propagation est bien définie. Sous l'hypothèse $g \in L^1(\mathbb{R})$, nous traitons tous les cas, y compris celui des fronts non compacts. Dans ce cas, nous supposons que F est bornée indépendamment du terme non-local et nous supposons, de plus, que :

$$F(x,t,p,X,K^k) - F(x,t,p,X,L^k) \to 0,$$

quand $\mathcal{L}^{N-k}(K^k \backslash L^k) \to 0$. En ajoutant ces hypothèses, nous montrons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de viscosité pour (15).

Dans le second cas ($g \notin L^1(\mathbb{R})$), le terme non-local n'est défini que pour des fronts compacts (ou de longueur finie en x_2). Dans ce cas, nous considérons un front initial compact et nous avons besoin d'une hypothèse qui assure que les fronts vont rester compacts. Elle s'écrit : pour tout $(x, t, p, X, K^k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_{N-k}$, nous avons :

$$(\mathbf{F4}) \quad |F(x,t,p,X,K^k)| \leq L_1\Big((1+|x|)|p| + \mathcal{L}^{N-k}(K^k)^{\frac{1}{N-k}}|\tilde{\pi}_k(p)|\Big) + L_2(1+|x|^2)|X|_\infty,$$

où $\tilde{\pi}_k(p) = p - \pi_k(p)$.

Ceci est à rapprocher de l'équation du volume

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\mathrm{vol}\{u(.,t) \geq u(x,t)\})^\beta \, |Du| \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [0,T]\,, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \{0\}\,, \end{cases} \tag{17}$$

où le front ne reste compact que si $\beta \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{N-0}$ ($k = 0$ dans ce cas). Plus précisément, le fait que β est plus petit que la valeur « limite » $\frac{1}{N}$ nous assure que le front n'explose pas en temps fini. De plus, si le front à un instant quelconque $t \in [0,T]$ est compact, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, il existe $M_{x,t}$ telle que $\mathcal{L}^N([u]^+_{x,t}) \leq M_{x,t}$. Par conséquent, la vitesse de propagation associée à l'équation (17) est bien définie. Remarquons que si le front n'est pas borné, cette même vitesse devient infinie.

Il reste à signaler que, dans ce second cas et sous les hypothèses (**F1-F2-F3-F4**), en utilisant la technique de viscosité et en adaptant la méthode de Perron, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de viscosité pour (15).

Chapitre 1

Reconstruction tomographique d'un objet symétrique binaire : Présentation du modèle

Dans ce chapitre nous présentons un modèle utilisé pour la reconstruction tomographique d'un objet binaire à symétrie radiale. Deux approches sont utilisées lors de la reconstruction : une approche variationnelle et une approche par les lignes de niveaux « Level-Set ». La première approche aboutit à un problème de minimisation avec contraintes alors que la deuxième donne une équation de type Hamilton-Jacobi non-locale.

1 Présentation du problème

Nous étudions le comportement d'un objet 3D subissant un choc. Dans ce but, nous effectuons une radiographie de l'objet (projection) en le bombardant par un faisceau électronique (figure 1.1) au moment du choc. Cette technique est basée sur la mesure de l'atténuation du faisceau à travers l'objet. Née officiellement en 1971 à des fins d'applications médicales, la tomographie consiste à recueillir ces projections pour reconstruire, en trois dimensions, la structure de l'objet.

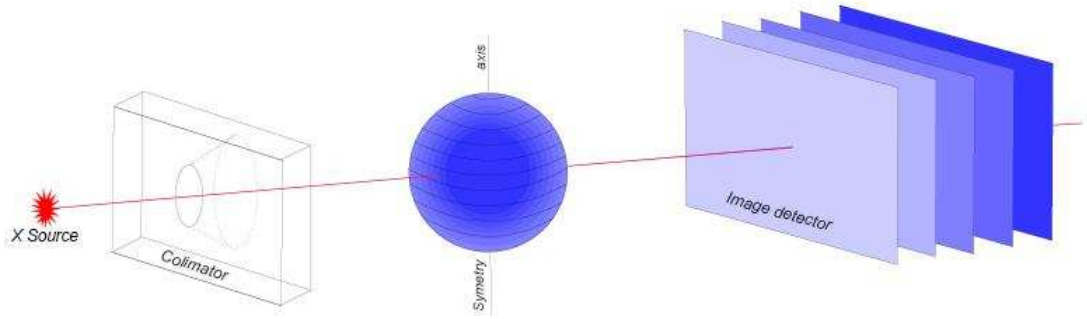


Fig. 1.1: Étape expérimentale [2].

Dans le cas où l'objet est observé avec un nombre suffisant de projections, il est possible de déduire la densité en chaque point de l'objet étudié. Plusieurs travaux ont été établis dans ce cas. Dans [24], les auteurs reconstruisent une image binaire pour un objet tridimensionnel à partir d'un certain nombre de projections. Dans [52], M. Soumekh illustre le problème de reconstruction d'une image binaire à partir de deux paires de projections orthogonales. Dans son article [32], F. Dubois étudie le problème de reconstruction tomographique en utilisant la méthode de rétroprojection filtrée.

Dans le cas où l'objet est observé grâce à une seule projection, nous ne pouvons pas utiliser de stratégies similaires à celles de [24, 32, 52] et nous avons recours à la méthode de projection inverse [9]. Comme cette méthode est insuffisante pour assurer la stabilité de la reconstruction, une autre méthode a été largement utilisée dans le domaine de la segmentation et de la reconstruction : c'est la méthode variationnelle. Cette approche a été illustrée par A.N. Tichonov et V. Y. Arsenin [53] puis a été développée par D. Mumford et J. Shah [43]. Une autre méthode maintenant classique, utilise les techniques d'optimisation topologique et conduit à la méthode d'ensembles de niveaux zéro. Cette approche a bien été illustrée dans [44] ainsi que dans [34]. Cette stratégie nous fournit un cadre de travail ainsi que des méthodes numériques efficaces permettant de modéliser le mouvement ou la déformation des interfaces. En considérant une seule radiographie et en partant d'une donnée bien précise (image binaire, objet à symétrie radiale), nous allons détailler dans notre étude la méthode de projection inverse, celle d'ensembles de niveaux zéro « Level-Set » et la méthode variationnelle.

Expression d'atténuation : Un faisceau de rayons X traversant des objets subit une variation d'énergie. C'est le phénomène d'atténuation. Soit μ le coefficient d'atténuation ; ce coefficient dépend de l'énergie du rayon X et du matériau. D'une manière plus précise, si N photons incidents traversent une épaisseur $d\ell$ (infinitésimale) de densité ρ alors $\mu\times$ $\rho \times$ N $\times$ $d\ell$ photons sont absorbés. Nous avons donc, le long d'un rayon sur une longueur $d\ell$:

$$dN = -\mu\rho N d\ell.$$

Une équation différentielle linéaire du premier ordre apparaît :

$$dN/N = -\rho\mu d\ell \Rightarrow N = N_0 \exp\left(-\int \mu\rho d\ell\right),$$

avec N_0 le nombre de photons initiales.

Nous considérons un objet $3D$ qui admet une symétrie cylindrique : nous pouvons donc travailler dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z). Grâce à cette hypothèse de symétrie, nous ne prenons en compte qu'une section plane de l'objet en fixant θ : l'objet 3D est obtenu par rotation de cette section autour l'axe de symétrie z. Nous supposons en plus que l'objet est binaire c'est-à-dire composé d'une matière homogène (dessinée en noire) et de « trous » (dessinés en blanc) de densité différente. L'image que nous allons reconstruire sera donc décrite par la carte de densité u en chaque point (r, z). Cette densité peut prendre deux valeurs 0 et 1. La valeur 0 correspond à la zone noire alors que la valeur 1 correspond à la zone blanche.

Soit u la carte de densité de l'objet l'initial. Nous supposons que $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ à

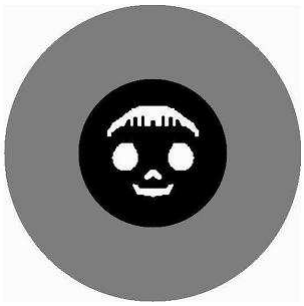


FIG. 1.2: Exemple de section plane d'un objet symétrique radial.

support compact dans un ouvert borné Ω dans $\mathbb{R}^2$. Soit g la carte de densité de l'image observée. Le problème de reconstruction est de trouver u telle que $Hu = g$, avec H l'opérateur de projection (radiographie), donné pour un objet à symétrie radiale par la proposition suivante :

Proposition 1.1 Pour toute densité $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ (à support compact) d'un objet à symétrie radiale, l'opérateur de projection H est donné par :

$$Hu(y,z) = 2\int_{|y|}^{+\infty} u(r,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr. \tag{1.1}$$

Preuve 1.1 En général, pour un objet $3D$ dont la carte de densité est caractérisée par une fonction $\tilde{u}(x,y,z)$ dans un repère cartésien, l'opérateur de projection est défini par :

$$H\tilde{u}(y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x,y,z)dx. \tag{1.2}$$

Dans le cas d'un objet à symétrie radiale, nous décrivons l'objet par la fonction $u(r,z)$ dans un système de coordonnées cylindriques avec :

$$\tilde{u}(x,y,z) = u(\sqrt{x^2+y^2},z).$$

Pour $y \geq 0$,

$$Hu(y,z) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x,y,z)dx = \int_{\mathbb{R}} u(\sqrt{x^2+y^2},z)dx = 2\int_0^{+\infty} u(\sqrt{x^2+y^2},z)dx. \tag{1.3}$$

Par changement de variables $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $y \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{r^2-y^2}, r \geq y$, nous obtenons :

$$Hu(y,z) = 2\int_y^{+\infty} u(r,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr.$$

De même pour $y < 0$ nous avons :

$$Hu(y,z) = 2\int_{-y}^{+\infty} u(r,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr.$$

Dans les deux cas, nous concluons que :

$$Hu(y,z) = 2\int_{|y|}^{+\infty} u(r,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr.$$

□

Pour trouver u, il suffit de trouver H^{-1}. Nous supposons pour l'instant que $u \in L^\infty(\Omega)$, avec $\Omega = [0,a) \times (-a,+a)$ où a est une constante positive. Il est facile de voir que Hu est à support compact dans $\tilde{\Omega} = (-a,+a)^2$.

Proposition 1.2 Soit $g \in L^2(\tilde{\Omega})$ telle que $g(y,z) = g(-y,z)$ pour tout $(y,z) \in \tilde{\Omega}$. De plus, nous supposons que $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ existe presque partout dans $\tilde{\Omega}$ et que $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est borné et mesurable. Alors, il existe une unique fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ telle que $Hu = g$, et ceci

$$u(r,z) = -\frac{1}{\pi}\int_r^a \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(y,z)}{\sqrt{y^2-r^2}}dy, \tag{1.4}$$

pour tout $(r,z) \in \Omega$.

Le terme de la dérivée étant présent et la fonction g n'étant pas assez régulière, l'opérateur H^{-1} est discontinu (même pas défini sur $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$) et une petite perturbation dans l'image observée g provoque une grande perturbation dans l'image reconstruite. La reconstruction est donc un problème mal posé.

Les perturbations dues à la réponse du détecteur jouent un rôle important dans la reconstruction de la carte initiale u de l'objet. Ces perturbations se traduisent essentiellement par la fonction de flou $\mathcal{F}$. Nous allons nous intéresser au cas où $\mathcal{F}$ est linéaire et donnée par la formule :

$$\mathcal{F}(K) = N * K,$$

où $*$ désigne l'opérateur de convolution et N est symétrique, positive, infiniment différentiable. Dans ce cas, l'image observée est donnée par :

$$g(x,y) = \mathcal{F}Hu(x,y), \forall (x,y) \in \Omega.$$

À chaque étape de l'acquisition d'une scène, des perturbations (rayures, poussières, caméra, amplification,...) vont détériorer la qualité de l'image. Ces perturbations sont regroupées sous le nom de bruit d'image. Ce bruit d'image est modélisé par un Gaussien additif τ de moyenne zéro et d'écart type σ. En ajoutant ce bruit, l'image observée devient :

$$g(x,y) = \mathcal{F}Hu(x,y) + \tau(x,y), \forall (x,y) \in \Omega.$$

Les figures (1.4) et (1.3) illustrent l'effet des perturbations ainsi que la reconstruction obtenue en utilisant la projection inverse :

$$u = H^{-1}(g).$$

La reconstruction faite par inversion de l'opérateur de projection est instable : le problème est mal posé. Nous allons utiliser une approche de régularisation au sens de Tychonov [9]. Nous illustrons le résultat sur un objet fictif qui présente des difficultés classiques (figure 1.5) :
1- Des trous situés sur l'axe de symétrie : les points les plus éloignés de l'axe portent d'informations plus importantes que les points rapprochés.
2- Plusieurs trous déconnectés
3- Détails sur la frontière du trou du haut.

Comme l'objet est à symétrie radiale, il suffit, afin de le décrire, de trouver la fonction de densité u pour une section plane de cet objet. Comme l'image est binaire, la densité u ne peut prendre que deux valeurs. Deux approches peuvent être utiliser pour reconstruire la carte de l'objet. La première se base sur une méthode variationnelle et la deuxième sur la méthode des courbes des niveaux (Level-Set). Commençons par une présentation de ces deux approches.

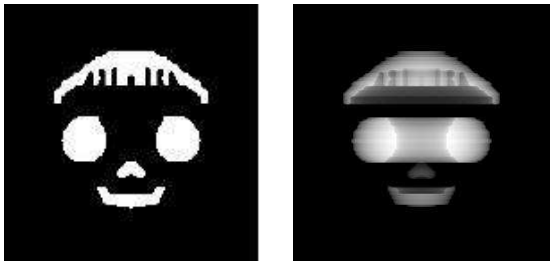


FIG. 1.3: L'image à gauche représente l'objet initial alors que l'image à droite représente la projection avec flou $\mathcal{F}Hu$.

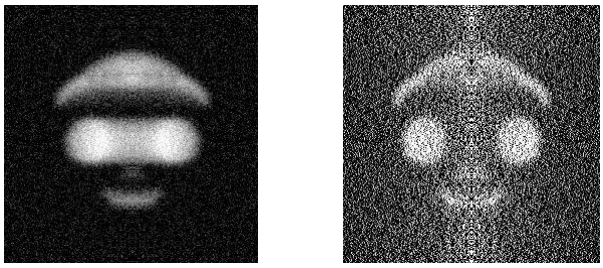


FIG. 1.4: L'image à gauche illustre la projection avec "flou et bruit" $\mathcal{F}Hu + \tau$ alors que l'image à droite représente la reconstruction en utilisant H^{-1} .

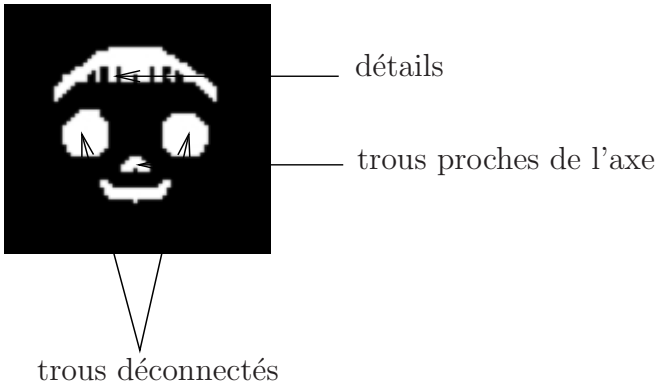


FIG. 1.5: L'objet initial.

2 Approche variationnelle

Cette approche consiste à trouver la densité de l'objet initial comme un minimiseur d'une fonctionnelle bien construite. Cette idée a été introduite par A. N. Tikhonov et V. Y. Arsenin dans [53], puis cette même méthode a été développée par D. Mumford et J.

Shah dans [43]. Les méthodes variationnelles sont largement utilisées en reconstruction tomographique, voir G. Aubert et L. Vese [10], C. R. Vogel et M. E. Oman [56], G. Aubert et P. Kornprobst [9] et A. Acar et R. Vogel dans [3]. Dans [53], les auteurs ont proposé de chercher la carte u comme un minimiseur de la fonctionnelle suivante de :

$$E(u) = \|\mathcal{F}(Hu) - g\|_{L^2}^2 + \lambda \int |\nabla u|^2 dx, \tag{1.5}$$

où λ est une constante positive. Le premier terme de E permet un rappel aux données. Ce terme mesure la fidélité entre $\mathcal{F}Hu$ et la densité de l'image bruitée (mesurée) g, alors que le second est un terme de régularisation. Avec ce deuxième terme, on cherche à enlever le bruit de l'image et à garder autant que possible des informations sur le bord de l'image. En oubliant la contrainte de binarité, la stratégie maintenant est de trouver u qui minimise la fonctionnelle E posée dans un espace X c'est-à-dire

$$\inf_{u \in X} E(u), \tag{1.6}$$

où X est un espace de Banach bien choisi.
Ce problème est bien posé dans l'espace de Sobolev $X = H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \nabla u \in L^2(\Omega)\}.$$

Sous certaines conditions sur H, le problème admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ caractérisée par les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$H^\star \mathcal{F} H u - H^\star g - \lambda \Delta u = 0.$$

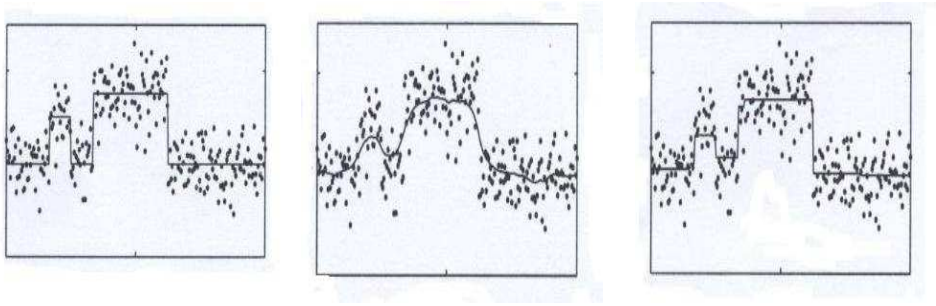
La question qui se pose est la suivante : la solution trouvée est-elle une « bonne » solution pour notre problème ? La réponse est négative. En effet, la présence du terme de Laplacien (qui est un filtre) aboutit à une reconstruction très régulière et à une perte importante des informations sur les bords de l'image. Cette perte d'informations est due à la norme $L^2(\Omega)$ du gradient dans la fonctionnelle. Il est vrai que cette norme permet de supprimer le bruit mais ce terme pénalise fortement les gradients correspondants aux bords. Une image dont le gradient est borné est lissée. Les bords sont érodés et la reconstruction donnera une image floue. Le but maintenant est de remplacer le terme $||\nabla u||_{L^2}^2$ par un terme moins contraignant et régularisant. Le premier travail dans cette direction a été réalisé par L. I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi dans [45]. L'espace adapté est l'espace des fonctions à variations bornées $BV(\Omega)$ défini par :

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : J(u) < \infty\},$$

où

$$J(u) := \int |\nabla u| = \mathrm{Sup}\Big\{ \int u(x) div\phi(x) : \phi(x) \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), ||\phi||_\infty \leq 1 \Big\},$$

où $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact dans Ω et dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^2$. Le terme $J(u)$ dans l'espace $BV(\Omega)$ nous permet de garder les discontinuités sur le bord de l'image reconstruite, alors que le terme de Laplacien dans l'espace $H^1(\Omega)$ le régularise trop et le rend trop lisse. Pour bien illustrer la différence entre la reconstruction tomographique en utilisant l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ et la reconstruction en utilisant l'espace de variation total $BV(\Omega)$, nous donnons un exemple traité par C. R Vogel et M. E. Oman [56](voir figure 1.6).



(a) Image initiale. (b) Reconstruction dans $H^1(\Omega)$. (c) Reconstruction dans $BV(\Omega)$

FIG. 1.6: La reconstruction en utilisant $H^1(\Omega)$ et $BV(\Omega)$.

Comme l'image est binaire, le problème de minimisation devient

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u \in BV(\Omega)} E(u), \\ \\ u \in \mathcal{D} \ \text{ sur } \quad \Omega, \end{cases}$$

avec

$$E(u) = \|\mathcal{F}(Hu) - g\|_{L^2}^2 + \lambda J(u),$$

et l'ensemble des contraintes $\mathcal{D}$ est donné par :

$$\mathcal{D} = \{u \in BV(\Omega) : u(1-u) = 0 \ \text{ presque partout dans } \Omega \ \}.$$

Dans le cas où le domaine réalisable est convexe ou si les contraintes sont qualifiées, plusieurs problèmes similaires au problème $(\mathcal{P})$ ont été étudiés. Le cas d'une fonctionnelle différentiable a été étudié par G. Aubert et P. Kornprobst [9], R. Acar et C. R. Vogel [3] et G. Aubert et L. Vese [10]. Dans le cas où la fonctionnelle est non différentiable, nous renvoyons à G. Aubert et P. Kornprobst [9] et E. Casas, K. Kunisch et C. Pola [25].
Le problème $(\mathcal{P})$ présente deux difficultés. D'une part, comme l'ensemble $\mathcal{D}$ est formée de fonctions qui ne prennent que deux valeurs $u = 1$ ou $u = 0$, $\mathcal{D}$ est non convexe et son intérieur vide pour n'importe quelle topologie « raisonnable ». D'autre part, à cause du terme de régularisation $J(u)$, la fonctionnelle E n'est pas Fréchet différentiable. En couplant ces deux difficultés, les résultats classiques d'optimisation ne s'appliquent pas.

Remarque 2.1 Pour bien illustrer le rôle du terme de régularité, considérons le même problème de minimisation avec le premier terme de la fonctionnelle E et $\mathcal{F} = I$, où I désigne la fonction identité de $L^2(\Omega)$. Nous cherchons maintenant u comme un minimiseur de

$$\int_\Omega |Hu - g|^2 dx. \tag{1.7}$$

Si u est un minimum de (1.7), elle vérifie nécessairement la condition d'Euler-Lagrange suivante :

$$H^\star Hu - H^\star g = 0,$$

avec $H^\star$ l'opérateur adjoint de H. Comme l'inverse de $H^\star H$ n'est pas toujours continue, pour une petite perturbation dans l'image observée, nous obtenons une reconstruction instable, d'où l'importance de ce deuxième terme de régularisation.

3 Approche par propagation de fronts

À cause des difficultés mentionnées précédemment, nous ne pouvons pas utiliser la théorie classique d'analyse convexe pour assurer l'existence et l'unicité du problème. Dans cette section, nous utilisons une autre approche afin d'améliorer la reconstruction. Nous allons donc présenter la méthode d'ensembles de niveaux qui consiste à trouver une famille de courbes minimisantes $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$ qui converge vers le contour voulu. La méthode d'ensembles de niveaux décrit l'évolution des courbes et des surfaces dans les domaines discrets. Cette méthode permet de faire évoluer une courbe paramétrique fermée $\mathcal{C}$ avec une vitesse optimale choisie en fonction de la donnée initiale et la courbure aux points de contrôle de la courbe déformable. D'un point de vue numérique, cette méthode a été introduite par S. Osher et J. A. Sethian dans [44], puis elle a été développée théoriquement par L. C. Evans et J. Spruck dans [34] pour le mouvement par courbure moyenne et par Y. G. Chen, Y. Giga et S. Goto [28] pour une vitesse plus générale de propagation. Pour plus d'informations sur la méthode des lignes de niveaux, on peut se référer à G. Barles, H. G. Soner, et P. E. Souganidis [17]. Les applications faisant intervenir des propagations d'interfaces apparaissent dans de nombreux problèmes physiques, comme en mécanique des fluides, en mécanique des matériaux ou encore lors de l'étude du front d'une flamme. En ce qui concerne le domaine de reconstruction tomographique et la segmentation d'image, la méthode de « Level-Set » a été largement utilisée. Dans l'article de J. P. Bruandet, F. Peyrin, J. M. Dinten, O. Amadieu and M. Barlaud [24], les auteurs utilisent la méthode d'ensembles de niveaux pour reconstruire la carte de densité d'un objet à partir de quatre projections. Cette même méthode a été utilisée dans le traitement et l'interprétation des images médicales dans [42] afin d'isoler d'éventuelles pathologies par le biais de la segmentation qui est considérée comme étant le cœur de l'imagerie médicale. Nous nous renvoyons à G. Aubret et P. Kornprobst [9] et à [47].

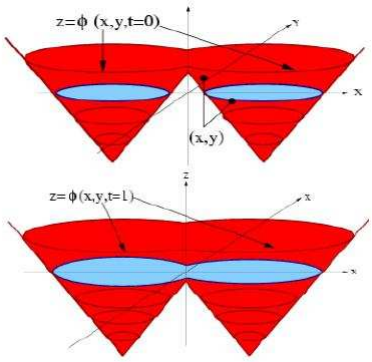


FIG. 1.7: Changement de topologie [48].

3.1 Formulation mathématique

Commençons par une approche heuristique. Soit $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ une famille d'hypersurfaces lisses dans $\mathbb{R}^N$ qui sont à chaque temps $t \geq 0$ le bord d'un ouvert Ω_t^+. En chaque point x de Γ_t nous pouvons définir la normale $n(x,t)$. Supposons que Γ_t évolue avec une vitesse normale $V(x,t,n,\nabla n)$ qui dépend du point (x,t), de la normale $n(x,t)$, et de son gradient ∇n. L'idée principale de la méthode d'ensembles de niveaux est la suivante : au lieu de travailler avec des ensembles ou des hypersurfaces dans $\mathbb{R}^N$ qui sont des objets géométriques difficiles à étudier, nous présentons cette famille d'hypersurfaces $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ comme l'ensemble des niveaux zéro d'une fonction lisse $\phi : \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \phi(x,t) = 0\} \quad \text{et} \quad \Omega_t^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \phi(x,t) > 0\}.$$

Soit $x(t)$ un point de Γ_t à l'instant t alors

$$\phi(x(t),t) = 0.$$

Dérivons par rapport à t nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi(x(t),t) \cdot \dot{x}(t) = 0, \tag{1.8}$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.

Nous supposons que l'intérieur de $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ est situé dans la zone $\phi \geq 0$. Quelques calculs classiques permettent de montrer que, la normale extérieure est donnée par :

$$n(x,t) = -\frac{\nabla \phi(x,t)}{|\nabla \phi(x,t)|}.$$

En utilisant (1.8), la fonction ϕ vérifie l'équation de type suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) + \tilde{F}(x,t,D\phi,D^2\phi) = 0,$$

avec $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (0, +\infty)$, $p \in \mathbb{R}^N$ et X une matrice symétrique,

$$\tilde{F}(x,t,p,X) = -|p|V\left(x,t,-\frac{p}{|p|},-\frac{1}{|p|}\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right),$$

où I représente la matrice identité de taille $N \times N$ et $\otimes$ le produit tensoriel. C'est une équation de type Hamilton-Jacobi du second ordre. La méthode d'ensembles de niveaux présente plusieurs avantages :

• L'avantage principal de cette méthode est la possibilité de gérer le changement de topologie de la courbe en évolution. Une courbe $\mathcal{C}$ peut être divisée en deux ou trois courbes, et inversement, plusieurs d'entre elles peuvent fusionner et n'en former qu'une seule. Cette méthode est capable de réaliser ce changement en utilisant une fonction d'ordre supérieur $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pour représenter la courbe $\mathcal{C}$ comme une niveau zéro de ϕ c'est-à-dire $\mathcal{C}(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x,t) = 0\}$. Le niveau zéro $(\mathcal{C})$ peut être divisé tandis que ϕ reste continue (voir figure 1.7).

• L'initialisation dans une dimension plus élevée. Une surface peut être représentée implicitement comme un niveau zéro d'une fonction définie dans un espace $3D$.

• Cette méthode permet aussi de gérer la géométrie de l'objet avec lequel nous travaillons (la courbe $\mathcal{C}$). En d'autres termes, en utilisant cette méthode, nous pouvons explicitement écrire la normale et la courbure moyenne sur cette courbe en fonction de ϕ.

• Avec une discrétisation simple en temps, en espace et en utilisant quelques schémas numériques simples (différences finies), nous pouvons obtenir de bons résultats numériques.

3.2 Application au problème de reconstruction

Comme l'objet est homogène et la carte de densité u est binaire, nous pouvons décrire cet objet par l'ensemble des courbes de Jordan qui séparent les deux régions de binarité ($u = 1$ et $u = 0$). Donc, chercher u, revient à trouver ces courbes de Jordan Γ_u qui séparent les deux régions de binarité $u = 0$ et $u = 1$. Maintenant, notre stratégie consiste à chercher une famille de courbes $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$ qui évolue avec une vitesse de propagation optimale bien choisie et avec laquelle cette famille de courbes converge vers celles de Jordan Γ_u. Nous cherchons donc une courbe $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$ à un instant t donné comme une courbe de niveau zéro d'une fonction lisse ϕ. Autrement dit, nous cherchons $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$ comme le bord dans $\mathbb{R}^2$ d'un ouvert Ω^+ tel que :

$$\Gamma_u^t = \{x \in \mathbb{R}^N : \phi(x,t) = 0\} \text{ et } \Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \phi(x,t) > 0\}.$$

Pour tout $x(t)$ de $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$, nous avons $\phi(x(t),t) = 0$. En dérivant par rapport à t nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \dot{x}(t) = 0.$$

Maintenant, nous nous posons la question suivante : comment faut-il choisir la vitesse de propagation et suivant quelle direction ? C'est à dire comment faut-il choisir $\dot{x}(t)$?

Pour répondre à cette question, il faut trouver la variation de l'énergie E par rapport à la variation de courbes. Une fois que nous avons calculé cette variation de E, nous choisissons la vitesse de propagation de façon à faire décroître rapidement l'énergie afin de tomber sur un minimiseur de E. La réponse à cette question est bien illustrée dans le livre de G. Aubert et P. Kornprobst [9], dans l'article de R. Abraham, I. Abraham et M. Bergounioux [1] ainsi que dans le papier de G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras et S. Jehan-Besson [8]. En utilisant la variation de l'énergie E par rapport aux courbes (Dérivée de Gâteaux), nous calculons dans la suite la vitesse optimale de propagation.

Afin de trouver la vitesse optimale de propagation, nous allons déterminer la variation de la fonctionnelle E par rapport à la courbe de Jordan (dérivée de Gâteaux). Pour cette raison, nous écrivons cette énergie sous la forme équivalente :

$$E(u) = ||Hu - g||_2^2 + \lambda l(\Gamma_u),$$

où $l(\Gamma_u)$ désigne la longueur de la courbe Γ_u qui sépare les deux régions $u = 1$ et $u = 0$. Pour une petite déformation $\delta\Gamma_u$ d'une courbe Γ_u de classe C^2, cette dérivée est donnée par :

$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma_u}.\delta\Gamma_u = \lim_{t \to 0} \frac{E(\Gamma_u + t\delta\Gamma_u) - E(\Gamma_u)}{t}. \tag{1.9}$$

Nous allons nous focaliser sur une déformation locale de Γ_u. Soit (r_0, z_0) un point P de Γ_u, nous considérons un système de coordonnées (r, z) centré en P et dont les axes sont donnés par le vecteur normal $\vec{n}$ et le vecteur tangent $\vec{\tau}$. Nous utilisons le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de P et une fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $(r, z) \in U$ nous avons :

$$(r, z) \in \Gamma_u \Leftrightarrow z = h(r).$$

Nous supposons que l'intérieur de la courbe est situé dans la région où la carte de densité $u(r, z) = 1$.

Soit U un voisinage de P et I un voisinage de r_0 et soit h la fonction C^2 telle que :

$$\Gamma_u \cap U = \left\{(r, z) \in \mathbb{R}^2 / z = h(r), r \in I\right\}.$$

La fonction u est définie sur U par :

$$u(r, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z < h(r), \\ 0 & \text{si } z \geq h(r). \end{cases}$$

Nous considérons une déformation $\delta\Gamma_u$ de Γ_u suivant le vecteur normal extérieur $\vec{n}$ dans U, ceci est équivalent à une déformation δh de h de classe $\mathcal{C}^2$ dont le support est inclus dans le voisinage I de r_0. Nous notons Γ_u^t la courbe obtenue après une déformation $t\delta\Gamma_u$. Cette courbe est paramétrée par :

$$\begin{cases} z = h(r) + t\delta h(r) & \text{si } (r,z) \in U, \\ \Gamma_u & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous définissons maintenant la nouvelle fonction u_t par :

$$u_t(r,z) = \begin{cases} u(r,z), & \text{si } (r,z) \notin U, \\ 1 & \text{si } (r,z) \in U \cap \{z < h(r) + t\delta h(r)\}, \\ 0 & \text{si } (\mathrm{r},\mathrm{z}) \in \mathrm{U} \cap \{\mathrm{z} \geq \mathrm{h(r)} + \mathrm{t}\delta\mathrm{h(r)}\}. \end{cases}$$

La paramétrisation et la déformation que nous avons décrites au dessus sont bien illustrées dans la figure (1.8). Désormais, notons par $\delta u_t = u_t - u$. Il est facile de voir que si $\delta h(r) \geq 0$,

$$\delta u_t = u_t - u = \begin{cases} 0 & \text{si } \{z \leq h(r) \quad \text{ou } \ z \geq h(r) + t\delta h(r)\}, \\ 1 & \text{si } \{h(r) \leq z \leq h(r) + t\delta h(r)\}, \end{cases}$$

et

$$\delta u_t = u_t - u = \begin{cases} 0 & \text{si } \{z \geq h(r) \quad \text{ou } \ z \leq h(r) + t\delta h(r)\}, \\ 1 & \text{si } \{h(r) \geq z \geq h(r) + t\delta h(r)\}, \end{cases}$$

si $\delta h(r) \leq 0$.

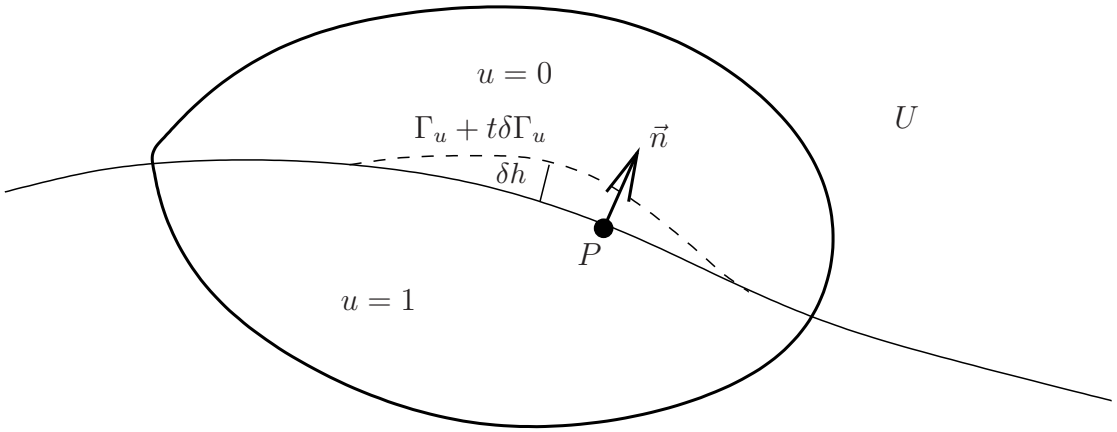


FIG. 1.8: Description de la déformation.

Nous notons dès maintenant $E = E_1 + E_2$ avec $E_1 = ||Hu - g||_2^2$ et $E_2 = l(\Gamma_u)$.

Proposition 3.1 La dérivée de Gâteaux de E_2 est donnée par :

$$\frac{\partial E_2}{\partial \Gamma}(\Gamma_u).\delta\Gamma_u = -\int_0^{+\infty} \mathrm{Curv}(\Gamma_u)(r, h(r))\delta h dr,$$

où $\mathrm{Curv}(\Gamma_u)(x)$ désigne la courbure à la courbe Γ_u au point $x \in \Gamma_u$.

Preuve 3.1 Pour la preuve de cette proposition nous renvoyons à [43].

Proposition 3.2 La dérivée de Gâteaux de E_1 est donnée par :

$$\frac{\partial E_1}{\partial \Gamma}.\delta\Gamma_u = -2\int_0^{+\infty} \mathcal{A}u(r,h(r))\delta h(r)dr, \tag{1.10}$$

avec $\mathcal{A}(u) = (H^\star Fg - H^\star FFHu)$ et $H^\star$ désigne l'opérateur adjoint de H.

Preuve 3.2 Pour la preuve de cette proposition voir [1].

Proposition 3.3 Pour $\beta = \dfrac{\lambda}{2}$, la dérivée de Gâteaux de E est donnée par :

$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma}(\Gamma_u).\delta\Gamma_u = -2\int_0^{+\infty} \left(\mathcal{A}(u) + \beta \mathrm{Curv}\left(\Gamma_u\right)\right)(r,h(r))\left\langle \delta\Gamma_u, \vec{n}\right\rangle dr.$$

Preuve 3.3 Pour calculer la dérivée de Gâteaux de E, il suffit d'additionner la dérivée de Gâteaux de E_1 et celle de E_2, nous obtenons :

$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma}(\Gamma_u).\delta\Gamma_u = -2\int_0^{+\infty} \mathcal{A}(u)(r,h(r))\delta h(r)dr - \lambda\int_0^{+\infty} \mathrm{curv}(\Gamma_u)(r,h(r))\delta h(r)dr, \tag{1.11}$$

Prenons $\beta = \dfrac{\lambda}{2}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma}.\delta\Gamma_u = -2\int_0^{+\infty} (\mathcal{A}(u) + \beta \mathrm{Curv}(\Gamma_u)(r,h(r))\delta h(r)dr.$$

Comme $\delta h = \langle \delta\Gamma_u, \vec{n}\rangle$, nous remplaçons δh par sa valeur dans (1.11), nous obtenons :

$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma}(\Gamma_u).\delta\Gamma_u = -2\int_0^{+\infty} (\mathcal{A}(u) + \beta \mathrm{curv}(\Gamma_u)(r,h(r))\left\langle \delta\Gamma_u, \vec{n}\right\rangle dr$$

d'où la preuve de la proposition 3.3.

□

Comme notre but consiste à trouver une famille de courbes $(\Gamma_u^t)_{t\geq 0}$ qui converge vers un minimum local de $E(\Gamma_u)$, nous considérons la famille de courbes qui évolue avec la vitesse $\dot{\Gamma}_u^t$ donnée par :

$$\dot{\Gamma}_u^t = \frac{\partial \Gamma_u^t}{\partial t} = (\mathcal{A}(u) + \beta \mathrm{Curv}(\Gamma_u^t))\vec{n}. \tag{1.12}$$

Avec cette famille de courbes la dérivée de Gâteaux de la fonctionnelle E est négative. Donc, avec cette famille Γ_u^t qui se propage suivant la vitesse (1.12), la fonctionnelle $E(\Gamma_u^t)$

décroît rapidement. Alors Γ_u^t décroît vers le minimum local de $E(\Gamma_u)$ (convergence à une sous-suite près).

Soit $x(t)$ un point de Γ_u^t, d'après l'équation (1.12) nous avons :

$$\dot{x}(t) = (\mathcal{A}(u) + \beta \text{Curv}\left(\Gamma_u^t\right)(x(t))\,\vec{n}. \tag{1.13}$$

Maintenant, nous utilisons la méthode de « Level-Set » : nous supposons que $u = \mathbb{1}_{\phi \geq 0}$ et nous cherchons la famille des courbes Γ_u^t à un instant t comme une courbe de niveau zéro d'une fonction lisse $\phi_t = \phi(.,t)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\phi(x(t),t) = 0. \tag{1.14}$$

Comme la normale extérieure $\vec{n} = -\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ et $\text{Curv}(\Gamma_u^t) = \text{div}\left(\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)$, nous pouvons écrire (1.13) en fonction de ϕ

$$\dot{x}(t) = \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{1}_{\phi(.,t)\geq 0}\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right)\left(-\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right).$$

En dérivant (1.14) par rapport à t, nous obtenons :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \dot{x}(t) = 0. \tag{1.15}$$

Nous remplaçons $\dot{x}(t)$ par sa valeur dans (1.15), nous obtenons :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x(t),t) - \left\langle \nabla\phi, \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{1}_{\phi(.,t)\geq 0}\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right)\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right\rangle (x(t),t) = 0,$$

et la fonction ϕ évolue suivant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x(t),t) - |\nabla\phi|\left(\mathcal{A}(\mathbb{1}_{\phi(.,t)\geq 0}) + \beta \text{div}(\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right) = 0, \tag{1.16}$$

Nous remplaçons maintenant $\mathcal{A}(\mathbb{1}_{\phi\geq 0})$ par sa valeur, l'équation (1.16) devient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = |\nabla\phi|\left(H^\star\mathcal{F}g - H^\star\mathcal{F}^\star\mathcal{F}H(\mathbb{1}_{\phi(.,t)\geq 0}) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right).$$

Finalement, supposons que Γ_u^0 est la courbe initiale vue comme une courbe de niveau zéro de la fonction ϕ à temps $t = 0$. Il s'agit alors d'étudier l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(x,t) = |\nabla\phi|\left(\left(H^\star\mathcal{F}g - H^\star\mathcal{F}^\star\mathcal{F}H\left(\mathbb{1}_{\phi(.,t)\geq 0}\right)\right)(x,t) + \beta \text{div}\left(\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right) \quad \mathbb{R}^2 \times [0,T], \\ \phi(x,0) = \phi_0(x) \quad \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \end{cases} \tag{1.17}$$

4 Quelques propriétés de l'opérateur de projection H

Donnons pour terminer quelques propriétés de l'opérateur H. Nous supposons désormais que la fonction de densité de l'objet $u \in L^\infty$ a un support compact dans un ouvert borné $\Omega = [0, a) \times (-a, +a)$ de $\mathbb{R}^2$, avec a un réel positif fixé.

Proposition 4.1 *:* L'opérateur adjoint H^* de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est donné par la formule suivante :

$$H^*g(r,z) = 2\int_0^r g(y,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dy. \tag{1.18}$$

Preuve 4.1 pour tout u, g dans $L^2(\Omega)$ l'opérateur auto adjoint H^* de H est donné par :

$$(Hu, g)_2 = (u, H^*g)_2$$

$(,)_2$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
(Hu,g)_2 &= \int Hu(y,z)g(y,z)dydz \\
&= 2\int_{R^2}\left(\int_{|y|}^{+\infty} u(r,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr\right)g(y,z)dydz \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{|y|}^{+\infty} u(r,z)\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}g(y,z)\right)drdydz \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{|u|}^{+\infty} u(r,z)g(y,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}drdy\right)dz \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\left(\int_{-r}^{+r} g(y,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dy\right)drdz\right. \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int 2u(r,z)\int_0^r g(y,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dydzdr \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u(r,z)H^*g(r,z)drdz \\
&= (u, H^*g)_2 .
\end{aligned}$$

D'où :

$$H^*g(r,z) = 2\int_0^r g(y,z)\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dy.$$

□

Proposition 4.2 [2] L'opérateur de projection H s'étend à un opérateur toujours noté H dans $L^p(\Omega)$ quelque soit $p \in [1, +\infty]$. De plus,

$$||Hu||_{L^s(\tilde{\Omega})} \leq (\frac{4}{2-q})^{\frac{1}{q}} a^{\frac{2}{q}-1}||u||_{L^p(\Omega)},$$

pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, et pour tout $p \in [1, +\infty], q \in [1, 2)$, avec s vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{s}$.
En particulier, $H : L^p(\Omega) \longrightarrow L^s(\tilde{\Omega})$ est un opérateur continu $\forall p \in [1, +\infty]$ et $\forall s$ tels que $s \in [p, \frac{2p}{2-p})$ où $1 \leq p \leq 2$, et $s \in [p, +\infty]$ avec $p > 2$.

Proposition 4.3 [2] L'opérateur adjoint H^* s'étend à un opérateur linéaire continu de $L^{s'}(\tilde{\Omega})$ dans $L^{p'}(\Omega)$ pour tout $s' \in [1, \infty]$ et pour tout $p' \in [s', \frac{2s'}{2-s'})$ avec $1 \leq s' \leq 2$ et $p' \in [s', \infty]$ avec $s' > 2$.

Supposons pour l'instant que $\mathcal{F} = Id$, dans ce cas $\mathcal{A}(u) = H^*g - H^*Hu$. Dans un premier temps, nous allons détailler la forme $\mathcal{A}(u)$ en utilisant la forme de H et H^*. Par un simple changement de variables nous obtenons :

$$H^*g(y,z) = 2\int_0^1 \frac{|y|g(yr,z)}{\sqrt{1-r^2}}dr.$$

Nous raisonnons de la même manière pour l'opérateur H, par changement de variable l'opérateur H devient :

$$Hu(y,z) = 2\int_{|y|}^{+\infty} \frac{u(r,z)rdr}{\sqrt{r^2-y^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{u(\sqrt{r+y^2},z)dr}{\sqrt{r}}.$$

En remplaçant H et $H^\star$ par leurs valeurs, nous obtenons :

$$H^\star H(\mathbb{1}_{\phi(.,t)})(x,y) = 2\int_0^1 |x| \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{(r,s):\phi\left(\sqrt{r+x^2s^2},y,t\right)\geq 0\}}}{\sqrt{r}\sqrt{1-s^2}}drds, \tag{1.19}$$

$$H^\star g(x,y) = 2\int_0^1 \frac{|x|g(xr,y)}{\sqrt{1-r^2}}dr. \tag{1.20}$$

Finalement, en remplaçant (1.19) et (1.20) par leurs valeurs dans (1.17), nous obtenons une équation géométrique du deuxième ordre avec un terme non-local. Cette équation présente deux difficultés : le terme non-local n'a pas la forme classique (la deuxième variable est toujours fixée) et à cause du signe négatif devant le terme $H^\star H(\mathbb{1}_{\phi(.,t)})$, cette équation ne conserve pas l'hypothèse de la monotonie (**F1**). Dans notre étude et suite à ces deux difficultés, nous allons modifier la dépendance par rapport au terme de gradient et le signe du terme non-local pour établir un résultat d'unicité et d'existence d'une solution de viscosité.

Chapitre 2

Préliminaires d'optimisation

Dans cette partie, nous présentons quelques outils classiques d'optimisation utiles pour l'étude du problème $(\mathcal{P})$, puis nous illustrons les difficultés du problème $(\mathcal{P})$ ainsi les modifications apportées à ce problème.

1 Outils d'optimisation

L'optimisation est un sujet ancien qui s'applique dans de très nombreux domaines comme le domaine d'économie, de gestion, de planification, de logistique, d'automatique, de robotique, de traitement de signal ou d'image.

Nous pouvons séparer l'optimisation en deux grands axes selon que les variables sont continues ou discrètes. En d'autres termes, si nous minimisons une fonction f définie sur $\mathbb{R}^N$, il s'agit d'optimisation en variables continues, tandis que si f est définie sur $\mathbb{Z}^N$, nous parlons de l'optimisation combinatoire ou en variables discrètes. Dans notre cas, nous nous intéressons à l'optimisation continue.

Tout d'abord, l'espace dans lequel le problème est posé, noté V, est un espace vectoriel normé et en général un espace de Banach. nous nous donnons également un sous ensemble $\mathcal{C}$ de V où nous allons chercher l'éventuelle solution. Nous appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments admissibles du problème ($\mathcal{C}$ définit les contraintes qui s'exercent sur le problème considéré). Enfin, la fonction coût ou objectif à minimiser notée F est une fonction définie sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le problème étudié sera donc noté par :

$$\inf_{u\in\mathcal{C}} F(u).$$

Nous donnons tout d'abord quelques définitions élémentaires nécessaires pour la suite.

Définition 1.1 On dit que u est un minimum local de F sur $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$u \in \mathcal{C} \text{ et } \exists\, \delta \geq 0, \forall v \in \mathcal{C}, \|v-u\| < \delta \Rightarrow F(v) \geq F(u).$$

On dit que u est un minimum global de F sur $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$u \in \mathcal{C} \text{ et } F(v) \geq F(u), \forall v \in \mathcal{C}.$$

Définition 1.2 On appelle infimum de F sur $\mathcal{C}$ (ou plus couramment, valeur minimum), la borne supérieure, dans $\mathbb{R}$, des constantes qui minorent F sur $\mathcal{C}$. Si F n'est pas minorée sur $\mathcal{C}$, alors l'infimum vaut $-\infty$. Si $\mathcal{C}$ est vide, par convention l'infimum est $+\infty$.
Une suite minimisante de F dans $\mathcal{C}$ est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_n \in \mathcal{C}, \forall n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{v\in\mathcal{C}} F(v).$$

Par la définition de l'infimum de F sur $\mathcal{C}$, il existe toujours une suite minimisante. Rappelons quelques propriétés des fonctions convexes.

Définition 1.3 On dit que F est propre s'il existe u dans V telle que $F(u) < +\infty$.

Définition 1.4 Une fonction $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :
• $\forall a \in \mathbb{R}, \{u \in V, F(u) \leq a\}$ est fermé.
• $\forall \bar{u} \in V, \liminf_{u\to\bar{u}} F(u) \geq F(\bar{u})$.

Théorème 1.1 [23] Une fonction F convexe s.c.i pour la topologie forte (celle de la norme de V) est s.c.i pour la topologie faible de V.

En pratique ce résultat s'utilise sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 1.1 Soit F une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i pour la topologie forte. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de V faiblement convergente vers $v \in V$ alors

$$F(v) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(v_n).$$

Définition 1.5 Soit F une fonction de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que F est Gâteaux différentiable en u si pour tout $v \in V$ la dérivée directionnelle suivante :

$$F'(u : v) = \lim_{t\to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t},$$

existe et si elle est linéaire et continue. D'une manière générale, nous notons $\nabla F(u)$ la Gâteaux différentielle de F en u. C'est un élément du dual V' de V. Soit alors

$$F'(u : v) =< \nabla F(u), v >,$$

où $<, >$ désigne le produit de dualité entre V et V'.

Théorème 1.2 [4] Soit $F : \mathcal{C} \subset V \to \mathbb{R}$, Gâteaux différentiable sur $\mathcal{C}$, avec $\mathcal{C}$ convexe alors

$$F \text{ est convexe } \Leftrightarrow \forall (u, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}, F(v) \geq F(u) + \nabla F(u)(v - u).$$

On dit qu'une fonction F de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est coercive si $\lim_{\|u\|\to\infty} F(u) = +\infty$.

2 Optimisation sans contraintes

Dans une première partie, nous allons étudier les problèmes d'optimisation évoqués plus haut dans le cas où $\mathcal{C} = V$. Nous effectuons la minimisation de F sur l'espace tout entier. Nous rappelons des résultats classiques sur ce type de problèmes :

$$(\mathcal{P}_{sc}) \quad \begin{cases} \inf F(u), \\ u \in V. \end{cases}$$

Théorème 2.1 [20] Supposons que la fonction F est propre, continue et coercive. Alors le problème $(\mathcal{P}_{sc})$ admet au moins une solution dans V.

Théorème 2.2 [20] **(Unicité.)** Supposons que la fonction F est strictement convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors le problème $(\mathcal{P}_{sc})$ admet au plus une solution dans V.

Théorème 2.3 [20] Soit F une fonction C^1 de V dans $\mathbb{R}$, nous supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in V \times V, (\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) \geq \alpha \|u - v\|^2,$$

alors F est strictement convexe et coercive, plus encore, le problème $(\mathcal{P}_{sc})$ admet une solution unique.

Lemme 2.1 [20] Soit V un espace de Banach réel et F une fonction de V dans $\mathbb{R}$ Gâteaux-différentiable. Si u réalise un minimum local ou global de F sur V alors

$$\nabla F(u) = 0.$$

Un point $u \in V$ vérifiant $\nabla F(u) = 0$ est appelé point critique ou stationnaire. Grâce au théorème 2.1, nous pouvons sélectionner un nombre de candidats minima. Toutefois, la réciproque du théorème est fausse. Mais il existe une situation importante où $\nabla F(u) = 0$ devient une condition nécessaire et suffisante comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.4 [4] Supposons que F est convexe et Gâteaux différentiable sur V. Un point u réalise un minimum global sur F si et seulement si $\nabla F(u) = 0$.

3 Minimisation avec contraintes

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas où le problème de minimisation comporte des contraintes. Nous étudions le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_c) \quad \begin{cases} \inf F(u), \\ u \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ l'ensemble des contraintes, c'est un sous ensemble fermé et non vide de V.

Théorème 3.1 Supposons que F est continue, $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble fermé non vide de V et que l'une des conditions suivantes est réalisée :
• soit $\mathcal{C}$ est borné,
• soit F est coercive,
alors le problème $(\mathcal{P}_c)$ admet au moins une solution dans V.

Preuve 3.1 Voir [20].

Dans le but de trouver les conditions d'optimalité pour la solution, nous distinguons les différentes formes de $\mathcal{C}$. Nous commençons par le cas le plus simple où l'ensemble des contraintes $\mathcal{C}$ est convexe.

3.1 Contraintes convexes

En utilisant la convexité de $\mathcal{C}$, nous pouvons tester l'optimalité de la solution u dans la direction admissible $(v-u)$ car $(u+t(v-u)) \in \mathcal{C},\ \forall t \in [0,1]$.

Théorème 3.2 Soit $u \in \mathcal{C}$, avec $\mathcal{C}$ convexe. Nous supposons que F est Gâteaux-différentiable en u. Si u est une solution de $(\mathcal{P}_c)$ alors

$$\nabla F(u)(v-u) \geq 0,\ \forall v \in \mathcal{C}. \tag{2.1}$$

Preuve 3.2 Voir [4].

Remarque 3.1 Si u vérifie (2.1) et si nous supposons de plus que F est convexe, nous déduisons que la solution u devient un minimum global de F et la condition d'optimalité (2.1) devient une condition nécessaire et suffisante.

3.2 Contraintes d'égalités

Nous allons à présent donner des conditions de minimalité lorsque l'ensemble $\mathcal{C}$ n'est pas nécessairement convexe. Plus précisément, nous étudierons des ensembles $\mathcal{C}$ définis par des contraintes d'égalité. Nous supposons que $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\mathcal{C} = \{v \in V, G(v) = 0\}, \tag{2.2}$$

où $G(v) = (G_1(v), ..., G_M(v))$ est une application de V dans $\mathbb{R}^M$ avec $M \geq 1$. Avec cette contrainte, la condition d'optimalité est décrite par le théorème suivant :

Théorème 3.3 [20] Soit $u \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est donnée par (2.2). Nous supposons que :
- F est dérivable en $u \in \mathcal{C}$,
- les fonctions $G_i, i = 1, ..., M$ sont continûment dérivables dans un voisinage de u,
- les vecteurs $(G_i'(u))_{i=1,...M}$, sont linéairement indépendants.

Alors, si u est un minimum local de F sur $\mathcal{C}$, il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_M$ appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que :

$$\nabla F(u) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i G_i'(u) = 0$$

.

Preuve 3.3 *:* Pour la preuve de ce théorème, voir [4, Théorème 10.2.8]

Remarque 3.2 Lorsque les vecteurs $(G_i')_{i=1,...M}(u)$ sont linéairement indépendants, on dit que l'on est dans un cas régulier.

Remarque 3.3 Dans tous les cas, la difficulté majeure est représentée par l'existence des directions admissibles c'est-à-dire les directions suivant lesquelles nous pouvons tester la dérivée de la fonctionnelle au point minima. Dans le cas des contraintes d'égalités, l'ensemble des directions admissibles est représenté par :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in V, G_i'(u)(v) = 0, \forall i = 1, ..., M\} = \bigcap_{i=1}^{M} [G_i']^{\perp(1)}.$$

3.3 Contraintes d'inégalités :

Dans ce cas, $\mathcal{C}$ est donné par :

$$\mathcal{C} = \{v \in V : L_i(v) \leq 0, \forall i = 1, ..., N\}, \tag{2.3}$$

où $L_1, ..., L_N$ sont des fonctions de V dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, la situation est un peu plus compliquée que dans le cas précédent pour trouver les directions admissibles. Dans un tel cas, les contraintes ne jouent pas le même rôle. Plus précisément, si $L_i(v) < 0$, il est clair que, pour ϵ suffisamment petit, nous aurons aussi $L_i(v + \epsilon w) \leq 0$, mais si $L_i(v) = 0$ pour certains indices i, il n'est pas clair que l'on puisse trouver un vecteur $v \in V$ tel que, pour ϵ suffisamment petit, $(v + \epsilon w)$ satisfait toutes les contraintes dans (2.3). Il fallait donc imposer des conditions supplémentaires sur les contraintes appelées conditions de qualification. C'est avec ces conditions que nous pouvons faire des « variations » autour d'un point v afin de tester son optimalité.

Définition 3.1 Soit $u \in \mathcal{C}$, l'ensemble $I(u) = \{i = 1, ..., N, L_i(u) = 0\}$ est appelé l'ensemble des contraintes actives en u .

Définition 3.2 On dit que les contraintes (2.3) sont qualifiées en $u \in \mathcal{C}$ s'il existe une direction $w \in V$ tel que $\forall i \in I(u)$ où $I(u)$ désigne l'ensemble des indices $i = 1, ..., N$ tel que $L_i(u) = 0$, nous avons :

$$L_i'(u)(w) < 0, \quad \text{ou bien} \quad L_i'(u)(w) = 0 \quad \text{et} \quad L_i \quad \text{affine.}$$

Remarque 3.4 Les conditions de qualifications sont des conditions suffisantes qui permettent de faire des variations à l'ensemble $\mathcal{C}$ à partir d'un point u. La condition de qualification de la définition 3.2 est assez générale, mais parfois difficile à vérifier dans les applications. Des conditions de qualifications plus simples (donc plus faciles à vérifier) mais plus générales (moins souvent vérifiées) sont données dans [4, 38].

(1) Pour plus des détails sur la forme des directions admissibles dans le cas des contraintes d'égalités voir [4].

Théorème 3.4 On suppose que $\mathcal{C}$ est donné par (2.3) ; les fonctions F et $L_1, ..., L_N$ sont dérivables en u et que les contraintes sont qualifiées en u. Si u est un minimum local de F sur $\mathcal{C}$ alors il existe N réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_N$ tels que :

$$\nabla F(u) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \nabla L_i(u) = 0,$$

$$\lambda_i L_i(u) = 0 \ \ \forall i = 1, ..., N.$$

Preuve 3.4 Voir [4, Théorème 10.2.15].

3.4 Contraintes égalité et inégalité :

Dans ce troisième cas, nous mélangeons le deux types de contraintes. Nous supposons que $\mathcal{C}$ est donné par :

$$\mathcal{C} = \{v \in V, G(v) = 0, L(v) \leq 0\}, \tag{2.4}$$

où $G = (G_1, ..., G_M)$ et $L = (L_1, ..., L_N)$ sont deux applications de V dans $\mathbb{R}^M$ (respectivement dans $\mathbb{R}^N$). Nous notons $J(u) = \{j = 1, ..., N, L_j(u) = 0\}$ l'ensemble des contraintes d'inégalités actives en $u \in \mathcal{C}$. Nous considérons maintenant le problème

$$(\mathcal{P}_{cei}) \quad \begin{cases} \inf F(u), \\ u \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

avec $\mathcal{C}$ est donné par (2.4). On dit qu'un élément $u \in V$ est régulier pour les contraintes G et L si

- Il est réalisable : $G(u) = 0, L(u) \leq 0$.
- Les vecteurs $\nabla G_i(u) i = 1, ..., M$ sont linéairement indépendants.
- Nous pouvons trouver une direction $d \neq 0$ dans V telle que :

$$\nabla G_i(u)(d) = 0, i = 1, ..., M \quad \text{et} \quad \nabla L_j(u)(d) \leq 0 \ \ \forall j \in J(u).$$

On dit aussi que u vérifie la contrainte de Mangasarian-Fromowitz.

Théorème 3.5 (Conditions d'optimalité non qualifiées) On suppose que F, G, L sont de classe C^1. Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{cei})$. Alors il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$, $(\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{R}^{N,+}$ et $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall j \in \{1, ...N\}, \ \ \mu_j \geq 0, G(u) = 0, L(u) \leq 0,$$

$$\forall j \in \{1, ...N\}, \ \ \mu_j L_j(u) = 0,$$

$$\mu_0 \nabla F(u) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \nabla G_i(u) + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \nabla L_j(u) = 0.$$

Preuve 3.5 Pour la démonstration de ce théorème voir [4].

Les conditions obtenues ci-dessus sont dites non qualifiées. Si le réel μ_0 est nul, nous n'avons donc aucun renseignement sur le minimum de la fonction coût F. Il est donc important de donner quelques conditions qui permettent d'assurer que μ_0 est non nul.

Théorème 3.6 (Conditions de Karush-Kuhn-Tucker) *:* Nous supposons que F, G, L sont de classe C^1. Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{cei})$. Nous supposons que u est régulier pour les contraintes G et L, alors il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$, $(\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{R}^{N,+}$ tels que :

$$\forall j \in \{1, ...N\}, \quad \mu_j \geq 0, G(u) = 0, L(u) \leq 0,$$

$$\forall j \in \{1, ...N\}, \quad \mu_j L_j(u) = 0,$$

$$\nabla F(u) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \nabla G_i(u) + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \nabla L_j(u) = 0.$$

Preuve 3.6 Pour la démonstration des théorèmes 3.5 et 3.6, regardons [4, 20, 38].

4 Le problème $(\mathcal{P})$: modification du modèle

Comme nous l'avons évoqué plus haut, le problème de minimisation qui est apparu dans le modèle de reconstruction tomographique en utilisant l'approche variationnelle relève du cadre d'optimisation avec contraintes. Dans cette partie, nous allons souligner les difficultés théoriques de ce problème face aux résultats classiques présentés dans les sections précédentes. Rappelons le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u \in BV(\Omega)} ||Hu - g||^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \displaystyle\int |\nabla u|, \\ \\ u \in \mathcal{D} \ . \end{cases}$$

Les techniques employées plus haut (éventuellement généralisées) sont-elles encore applicables pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème $(\mathcal{P})$? Est ce que nous sommes capable de trouver les directions admissibles suivant lesquelles nous établissons des conditions sur la dérivée de la fonctionnelle aux points minima du problème $(\mathcal{P})$? Afin de répondre à ces questions, nous allons souligner les difficultés majeures présentées par notre problème en déduisant à partir de ces difficultés que nous ne pouvons pas appliquer les résultats standard d'optimisation continue.

Pour l'existence d'une solution, nous pouvons adapter le théorème 2.1 en profitant des bonnes propriétés de l'espace des fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$. Commençons par une brève présentation de l'espace $BV(\Omega)$.

4.1 L'espace des fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$.

Dans ce qui suit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Lipschitzienne et $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ est l'espace des fonctions C^1 à support compact dans Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.1 Une fonction u de $L^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est à variation bornée dans Ω si $J(u) < +\infty$ où

$$J(u) = \sup\{\int_\Omega u(x)\mathrm{div}(\phi(x))u(x)dx : \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), ||\phi||_\infty \leq 1\}.$$

Nous notons

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : J(u) < +\infty\},$$

l'espace de telles fonctions.

Remarque 4.1 Nous rappelons que si $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ alors

$$\mathrm{div}\phi(x) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(x).$$

Donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\mathrm{div}\phi(x)dx &= \int_\Omega u(x)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(x)\right)dx = \\ &- \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\phi_1(x) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\phi_2(x)\right)dx \\ &= -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\phi(x)dx,\end{aligned}$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4.1 [33] L'application de $BV(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ qui à u fait correspondre la fonction $\|u|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1} + J(u)$ est une norme.

Théorème 4.1 [33, 7] **(Semi-continuité inférieure de la variation totale J)** L'application de $u \to J(u)$ de $BV(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ est semi-continue inférieurement (sci) pour la topologie séquentielle de $L^1(\Omega)$. Plus précisément, si $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite de fonctions de $BV(\Omega)$ qui converge vers u fortement dans $L^1(\Omega)$ alors

$$J(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} J(u_k).$$

Nous admettons les résultats suivants :

Théorème 4.2 [33, 7]**(Approximation régulière)** Pour toute fonction $u \in BV(\Omega)$, il existe une suite des fonctions $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $BV(\Omega) \cup C^\infty(\Omega)$ tels que :
(i) $u_k \to$u dans $C^\infty(\Omega)$.
(ii) $J(u_k) \to J(u)$(dans $\mathbb{R}$).

Théorème 4.3 [33, 7] L'espace $BV(\Omega)$ muni de la norme

$$||u||_{BV(\Omega)} = ||u||_{L^1} + J(u),$$

est un espace de Banach (non réflexif).

Comme l'espace $BV(\Omega)$ muni de la topologie forte définie par la norme précédente est non réflexif, nous allons utiliser la topologie faible-$\star$ qui rend la boule unité compacte. Elle est définie par :

$$u_j \underset{BV(\Omega)-w^\star}{\rightharpoonup} u \Leftrightarrow u_j \to u \quad \text{et} \quad \mathrm{Du_j} \rightharpoonup \mathrm{Du},$$

avec $Du_j \rightharpoonup Du$ si $\displaystyle\int_\Omega \phi Du_j \to \int_\Omega \phi Du \ \forall \phi$ dans $C_0(\Omega)^N$.
Muni de cette topologie, la boule unité dans $BV(\Omega)$ est compacte.

Théorème 4.4 [7] **(Compacité)** L'espace $BV(\Omega)$ s'injecte dans $L^1(\Omega)$ de manière compacte. Plus précisément : si $(u_n)_n$ est une suite bornée de $BV(\Omega)$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||_{BV(\Omega)} < \infty,$$

alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_{n_k} \in \mathbb{N}$ et une fonction $u \in BV(\Omega)$ telle que u_{n_k} converge fortement vers u dans $L^1(\Omega)$

4.2 Existence d'une solution de $(\mathcal{P})$

Théorème 4.5 [2] Le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution dans $BV(\Omega)$.

Remarque 4.2 Comme la contrainte $\mathcal{D}$ est non convexe, nous ne pouvons pas assurer l'unicité d'une solution pour $(\mathcal{P})$.

4.3 Système d'optimalité.

En ce qui concerne les conditions d'optimalité, deux grosses difficultés interviennent lors de l'étude de $(\mathcal{P})$. Tout d'abord, on observe que dans les théorèmes 3.2, 3.3, 3.4 et 3.6, la différentiabilité de la fonctionnelle F est une condition nécessaire pour trouver le système d'optimalité. En raison du terme de régularisation $J(u) = \int |\nabla u|$, la fonctionnelle E donnée par :

$$E(u) = ||Hu - g||^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \int |\nabla u|,$$

est non Fréchet différentiable. De plus, les contraintes de $\mathcal{D}$ sont non qualifiées. Suite à ces deux difficultés, il faut contourner le problème pour établir des résultats similaires aux résultats classiques.

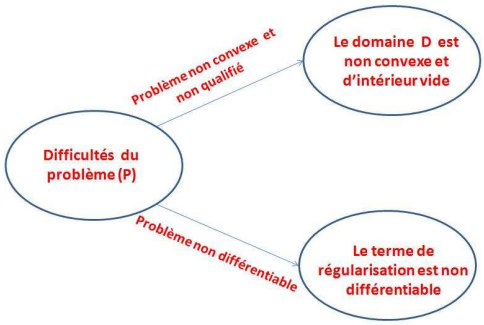


FIG. 2.1: Difficultés du problème $(\mathcal{P})$.

Plusieurs problèmes similaires au problème $(\mathcal{P})$ ont été étudiés. Dans le cas où la contrainte est convexe nous pouvons regarder le travail de E. Casas, K. Kunisch et C. Pola [25], G. Aubert et L. Vese [10]. Dans le cas où la contrainte n'est pas convexe, nous renvoyons à M. Bergounioux [18] et R. Abraham , M. Bergounioux et E. Trélat [2].

Dans notre cas et afin de gérer les difficultés présentées par le problème $(\mathcal{P})$, nous apportons à $(\mathcal{P})$ deux modifications. Dans un premier temps et afin d'assurer la différentiabilité de la fonctionnelle, nous changeons le terme de régularisation $J(u)$ dans BV et nous le remplaçons par le terme régulier $\int |\nabla u|^2$ dans l'espace de Sobolev H^1, en espérant de trouver quelques méthodes numériques qui gèrent la forte régularisation de ce terme sur le bord de l'image étudiée. De plus, comme les contraintes ne sont pas qualifiées, nous ne pouvons pas trouver un voisinage de fonctions tests admissibles autour du minimum. Nous relaxons donc ces contraintes en considérant

$$\mathcal{D}_\alpha = \{u \mid \ \leq u \leq 1, \int u(1-u) \leq \alpha\},$$

où α est une constante strictement positive. Notre problème de minimisation devient alors

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \begin{cases} \min\limits_{u \in H^1(\Omega)} \dfrac{1}{2} \|Hu - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{\lambda}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ \\ u \in \mathcal{D}_\alpha. \end{cases}$$

Cette modification est bien justifiée d'un point de vue numérique, en effet, numériquement on remplace $\int u(1-u) = 0$ par $\left|\int u(1-u)\right| \leq \alpha$. De plus, en choisissant une constante α suffisamment petite, nous pouvons espérer avoir un résultat équivalent d'un point de vue numérique.
En raison du terme $\int u(1-u) \leq \alpha$, le domaine $\mathcal{D}_\alpha$ n'est pas toujours convexe. Toutefois, après ces modifications effectuées sur le problème $(\mathcal{P})$, nous avons affaire à un problème de minimisation différentiable $(\mathcal{P}_\alpha)$ avec une contrainte d'inégalité qualifiée.

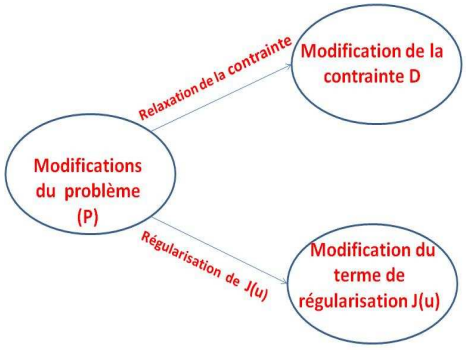


FIG. 2.2: Modifications effectuées sur le problème $(\mathcal{P})$.

Dans l'article [22] que nous présentons dans le chapitre suivant, nous montrons tout d'abord un résultat d'existence d'une solution pour $(\mathcal{P}_\alpha)$. Ensuite, en utilisant une méthode de pénalisation et des conditions de qualification générales dans les espaces de Banach, nous établissons un système d'optimalité du premier ordre pour $(\mathcal{P}_\alpha)$.

Chapitre 3

Une méthode de relaxation pour une reconstruction tomographique régulière d'un objet binaire à symétrie axiale

Dans cette partie de ma thèse, nous traitons l'approche variationnelle obtenue lors de la reconstruction tomographique. Nous utilisons cette approche, nous nous retrouvons face à un problème de minimisation non différentiable avec une contrainte non convexe et d'intérieur vide, plus précisément, une contrainte non qualifiée.

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u \in BV(\Omega)} ||Hu - g||^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \displaystyle\int |\nabla u|, \\ \\ u \in \mathcal{D} \ \text{ dans } \quad \Omega. \end{cases}$$

En couplant les deux difficultés de la non différentiabilité de la fonctionnelle et la non convexité de la contrainte, nous ne pouvons pas utiliser la théorie classique pour chercher les conditions d'optimalité associées au problème $(\mathcal{P})$. Tout d'abord, notre stratégie consiste à contourner le problème de différentiabilité en modifiant le terme de régularisation dans $(\mathcal{P})$. Ensuite, dans le but de gérer le problème de la binarité de la contrainte, nous relaxons la contrainte $\mathcal{D}$ de façon justifiée d'un point de vue numérique. Une fois que nous avons apporté ces modifications, nous avons affaire à un problème de minimisation différentiable avec une contrainte non convexe. Nous pénalisons notre problème relaxé, puis nous utilisons une méthode de programmation mathématique dans un espace de Banach pour établir un système d'optimalité pour le problème approché.

A relaxation method for smooth tomographic reconstruction of binary axially symmetric objects[(1)]

Maïtine Bergounioux & Ali Srour

Abstract

In this paper we study a minimization problem which appears in tomographic reconstruction. The problem is known to be ill posed. The object to reconstruct is assumed to be binary so that the intensity function belongs to $\{0, 1\}$. Therefore the feasible set is not convex and its interior is empty for most usual topologies. We propose a relaxed formulation of the problem. We prove existence of solutions and give optimality conditions.

Keywords : Variational method, Relaxation, Lagrange multipliers, Mathematical programming method.

1 Introduction

In this paper we study a minimization problem arising in tomographic reconstruction as described in [1]. We have to reconstruct a radially symmetric object with a single snapshot. In addition the image is assumed to be binary. This corresponds to the material density of the object to reconstruct (there is material or not). The problem is modelled in a standard way as follows :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min F_o(u) := \dfrac{1}{2}\|Hu - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda J(u), \\ u \in \mathcal{D} \ , \end{cases}$$

where

1. Ω is a bounded open domain in $\mathbb{R}^2$ with a smooth boundary,
2. $\mathcal{D} = \{u \in BV(\Omega) : u(u-1) = 0 \text{ a.e in } \Omega\}$, where $BV(\Omega)$ denotes the functions of bounded variation space defined by

$$BV(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega) : J(u) < \infty\right\},$$

with

$$J(u) = \sup\left\{\int_\Omega u(x)\mathrm{div}(\phi(x))dx : \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\phi\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Here $C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^2)$ denotes the space of the C^1 functions with compact support in Ω with value in $\mathbb{R}^2$.

[(1)] To appear in Pacific Journal of Optimization.

3. $H := BH_o$ where B is a linear blur (convolution) operator and H_o is the (linear) tomographic projection operator that can be written as in [2] :

$$(H_o u)(y,z) = 2\int_{|y|}^{+\infty} u(r,z)\,\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}dr, \tag{3.1}$$

for almost all $y, z \in \mathbb{R}$.

4. the observed image is $g \in L^2(\Omega)$.

In the sequel, we shall denote $||.||$ the $L^2(\Omega)$-norm. In the same way, $(.,.)_2$ denotes the $L^2(\Omega)$- scalar product, $(.,.)_{H^1}$ denotes the $H^1(\Omega)$- scalar product and $\langle .,. \rangle_{V',V}$, the duality product between V' and V, where V is a Banach space and V' is the dual space of V.

Similar problems have been studied by Aubert and Kornprobst in [9], Acar and Vogel in [3], Vogel and Oman in [56] and Chambolle, Caselles and Alter et al. in [5]. In the case of convex constraints, we may quote papers by E. Casas, K.Kunisch and C.Pola [25] and Aubert and Vese [10]. Here, the main difficulty comes from the fact that the feasible domain $\mathcal{D}$ is not convex and it's interior is empty for most usual topologies. In addition, the total variation $J(u)$ of a function u in $BV(\Omega)$ is not Fréchet differentiable.

Abraham, Bergounioux and Trélat have also considered problem $(\mathcal{P})$ in [2]. They proved the existence of (at least) a solution of $(\mathcal{P})$ in $BV(\Omega)$ and gave first order optimality conditions. They use a penalization technique to deal with the binary constraint and considered

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \min \dfrac{1}{2}\|Hu-g\|^2 + \lambda J(u) + \dfrac{1}{2\varepsilon}\|u^2-u\|^2, \\ u \in BV(\Omega). \end{cases}$$

where $\varepsilon > 0$. However the optimality system they obtained was not suitable for numerical purposes and they rather solved the penalized system. In addition, the proposed numerical algorithm is not very performing. The penalization term is difficult to handle and parameter tuning is quite delicate.

In this paper we look for different strategies to study problem $(\mathcal{P})$ from a numerical point of view. In a first step we want to avoid the difficulties mentioned before, namely the domain non convexity and the cost functional lack of differentiability. We could consider a problem where the total variation $J(u)$ is replaced by the $L^2(\Omega)$-norm of the gradient of $u \in H^1(\Omega)$. Therefore the underlying space is no longer $BV(\Omega)$ but $H^1(\Omega)$. The resulting problem would be

$$(\mathcal{P}_o) \quad \begin{cases} \min F(u) := \dfrac{1}{2}\|Hu-g\|^2 + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2, \\ u \in \mathcal{D} \end{cases}$$

Unfortunately, this problem has no solutions except (may be) the two functions identically equal to 0 or 1. Indeed a binary function cannot belong to $H^1(\Omega)$ since its gradient (in the distribution sense) is a measure (it is a Dirac measure along the contours). We could

choose $W^{1,1}(\Omega)$ instead of $BV(\Omega)$ and deal with the gradient L^1 norm instead of the L^2-norm, but we would like to overcome the lack of differentiability and avoid the use of subdifferentiability.

On the other hand, one can get rid of the binary constraint if we consider a relaxed formulation, that is $0 \leq u \leq 1, \quad (u, 1-u)_2 \leq \alpha$, where $\alpha > 0$ instead of $0 \leq u \leq 1, \ (u, 1-u)_2 = 0$. The relaxation of the binary constraint is motivated and justified numerically : indeed, it is not possible to ensure $(u, 1-u)_2 = 0$ during computations but rather $|\,(u, 1-u)_2\,| \leq \alpha$ where α may be chosen as small as wanted, but (strictly) positive. One can see (as in [2]) that the corresponding relaxed problem

$$\min F_o(u)\ , u \in BV(\Omega),\ 0 \leq u \leq 1, \quad (u, 1-u)_2 \leq \alpha\ ,$$

has a solution that converges (in $BV(\Omega)$) towards a solution to $(\mathcal{P})$. However, the problem of finding first order optimality conditions remains delicate since the total variation is not differentiable.

So, in a first step we consider a "smooth version " of the above relaxed problem namely

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \begin{cases} \min F(u) := \dfrac{1}{2}\|Hu - g\|^2 + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2, \\ u \in \mathcal{D}_\alpha, \end{cases}$$

where $\alpha > 0$ and $\mathcal{D}_\alpha$ is given by

$$\mathcal{D}_\alpha := \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid 0 \leq u \leq 1\ ,\ (u, 1-u)_2 \leq \alpha \right\}. \tag{3.2}$$

Next section is devoted to existence results of solutions to $(\mathcal{P}_\alpha)$. Then we recall some general mathematical programming results to get some qualification conditions. In section 3, we define a "temporary" penalized problem that allows to decouple the binary constraint via a virtual control function. We give existence results and establish estimations to pass to the limit with respect to the penalization parameter. Then we get optimality conditions for $(\mathcal{P}_\alpha)$.

2 The relaxed problem

Now we consider the following relaxed problem

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \begin{cases} \min F(u) := \dfrac{1}{2}\|Hu - g\|^2 + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2, \\ u \in \mathcal{D}_\alpha \end{cases}$$

where $\alpha > 0$ and $\mathcal{D}_\alpha$ is given by (3.2). We first recall a important property of operator H

Proposition 2.1 *The operator H is continuous from $L^2(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$.*

Proof - [2, Lemma 1]. □

We can give an existence result :

Theorem 2.1 *Problem* $(\mathcal{P}_\alpha)$ *has at least a solution* u_α *in* $H^1(\Omega)$.

Proof - Let $(u_n)_n \in H^1(\Omega)$ be a minimizing sequence. Since $0 \leq u_n \leq 1$, the sequence u_n is bounded in $L^\infty(\Omega)$ and in $L^2(\Omega)$ as well. As $\|\nabla u_n\|$ is bounded, $(u_n)_n$ is bounded in $H^1(\Omega)$ and weakly converges (up to a subsequence) to some u_α in $H^1(\Omega)$. As the functional $u \longmapsto \|\nabla u\|$ is convex and lower semi-continuous, it is weakly lower semi-continuous and we have

$$\|\nabla u_\alpha\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|^2.$$

Now, we use the continuity property of H from $L^2(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$ and the convexity of the $L^2(\Omega)$-norm, to write

$$\|Hu_\alpha - g\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|Hu_n - g\|^2.$$

So,

$$\begin{aligned} \inf(\mathcal{P}_\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|Hu_n - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_n\|^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|Hu_\alpha - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_\alpha\|^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

To finish the proof of Theorem 2.1, we must prove that $u_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$. As the set $\{u \in H^1(\Omega) : 0 \leq u \leq 1\}$ is convex and L^2- closed for the strong-topology of $L^2(\Omega)$, it is weakly L^2-closed as well. So $0 \leq u_\alpha \leq 1$. As $u_n \rightharpoonup u_\alpha$ in $H^1(\Omega)$ then $u_n \to u_\alpha$ strongly in $L^2(\Omega)$ and

$$(u_n, 1-u_n)_2 \longrightarrow (u_\alpha, 1-u_\alpha)_2 \ .$$

As $(u_n, 1-u_n)_2 \leq \alpha$ for every $n \in \mathbb{N}$, we conclude that $(u_\alpha, 1-u_\alpha)_2 \leq \alpha$ □

The constraint "$(u_\alpha, 1-u_\alpha)_2 \leq \alpha$" is not convex and it is not possible to find the "admissible" directions to compute derivatives. We need a general qualification assumption to derive optimality conditions. We are going to use general mathematical programming problems results and optimal control in Banach spaces.

2.1 A general qualification condition in Banach spaces

The method we use has been mainly developed by Zowe and Kurcyusz [41] and Tröltzsch [54, 55]. Let us consider real Banach spaces $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ and a convex closed "admissible" set $\mathcal{U}_{ad} \subseteq \mathcal{U}$. In $\mathcal{Z}_2$ a convex closed cone $\mathbf{P}$ is given so that $\mathcal{Z}_2$ is partially ordered by

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{P}.$$

We also deal with :

$$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R} \ , \text{ Fréchet- differentiable functional ,}$$

$$T : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Z}_1 \text{ and } G : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Z}_2 \text{ continuously Fréchet-differentiable operators .}$$

Now, let be the abstract mathematical programming problem defined by :

$$\min \{ f(x,u) \mid T(x,u)=0,\ G(x,u)\leq 0\ , u\in \mathcal{U}_{ad} \}\ . \tag{3.4}$$

To shorten the text, we denote the partial Fréchet-derivative of f, T, and G with respect to x and u by a corresponding index x or u. We suppose that the problem (3.4) has an optimal solution that we call (x_o,u_o), and we introduce the sets :

$$\mathcal{U}_{ad}(u_o)=\{\ u\in\mathcal{U}\mid \exists\lambda\geq 0, \exists u^*\in\mathcal{U}_{ad},\ u=\lambda(u^*-u_o)\ \},$$

$$\mathbf{P}(G(x_o,u_o))=\{\ z\in\mathcal{Z}_2\mid \exists\lambda\geq 0, \exists p\in-\mathbf{P},\ z=p-\lambda G(x_o,u_o)\ \},$$

$$\mathbf{P}^+=\{\ y\in\mathcal{Z}_2^*\mid \langle y,p\rangle\geq 0\ ,\forall p\in\mathbf{P}\ \}.$$

The main result about optimality conditions is the following :

Theorem 2.2 Let u_o be an optimal control with corresponding optimal state x_o and suppose that the following regularity condition is fulfilled :

$$\begin{array}{c}\forall(z_1,z_2)\in\mathcal{Z}_1\times\mathcal{Z}_2 \text{ the system}\\ \begin{array}{rcl} T'(x_o,u_o)(x,u) & = & z_1,\\ G'(x_o,u_o)(x,u)-p & = & z_2,\end{array}\\ \text{is solvable with } (x,u,p)\in\mathcal{X}\times\mathcal{U}_{ad}(u_o)\times\mathbf{P}(G(x_o,u_o))\ .\end{array} \tag{3.5}$$

Then a Lagrange multiplier $(y_1,y_2)\in\mathcal{Z}_1'\times\mathcal{Z}_2'$ exists such that

$$f_x'(x_o,u_o)+T_x'(x_o,u_o)^*y_1+G_x'(x_o,u_o)^*y_2=0\ , \tag{3.6}$$

$$\langle f_u'(x_o,u_o)+T_u'(x_o,u_o)^*y_1+G_u'(x_o,u_o)^*y_2,u-u_o\rangle_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}\geq 0\ ,\ \forall u\in\mathcal{U}_{ad}\ , \tag{3.7}$$

$$y_2\in\mathbf{P}^+\ ,\ \langle y_2,G(x_o,u_o)\rangle_{\mathcal{Z}_2',\mathcal{Z}_2}=0\ . \tag{3.8}$$

Proof - See [41, 54, 55] □

To apply this method to $(\mathcal{P}_\alpha)$, we introduce a virtual control variable. We can write the problem $(\mathcal{P}_\alpha)$ as,

$$(\mathcal{P}_\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l}\min F(u)\\ (u,v)\in\mathcal{C}_\alpha,\end{array}\right.$$

where

$$\mathcal{C}_\alpha:=\{(u,v)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\mid u\geq 0,\ v\geq 0,\ u+v=1\ \text{ a.e. on }\Omega,\ (\mathrm{u},\mathrm{v})_2\leq\alpha\}\ . \tag{3.9}$$

We apply the previous theorem to $(\mathcal{P}_\alpha)$ with $\mathcal{X}=H^1(\Omega)$,$\mathcal{U}=H^1(\Omega)$, $\mathcal{Z}_2=H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$

$$\mathbf{P}=\{(u,\tau)\in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}\mid u\geq 0\quad \text{a.e. in }\Omega,\ \tau\geq 0\ \}\ .$$

In addition $T(u,v)=u+v-1$ and f,G are given by

$$f(u,v)=\frac{1}{2}\|Hu-g\|^2+\frac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2,$$

and

$$\begin{array}{rcl} G : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \to & H^1(\Omega) \times \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (-u, (u, v)_2 - \alpha)\,. \end{array}$$

In this case f and G are $\mathcal{C}^1$ and

$$G'(u_\alpha, v_\alpha)(u, v) = (-u, (u_\alpha, v)_2 + (v_\alpha, u)_2)\,.$$

Moreover

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{v \in H^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ a.e}\right\}$$

and $\mathcal{V}_{ad}(v_\alpha) = \{\lambda(v - v_\alpha) : \lambda \geq 0, v \in \mathcal{V}_{ad}\}$. Finally

$$\mathbf{P}(G(u_\alpha, v_\alpha)) = \left\{(-p + \lambda u_\alpha, -\gamma - \lambda\left[(u_\alpha, v_\alpha) - \alpha\right))\right] \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}\right\},$$

where p, λ and γ are real nonnegative constants. Let us write condition (3.5) : for any (z_1, z_2, θ) in $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, we must solve the system :

$$\begin{array}{c} u + \mu(v - v_\alpha) = z_1, \\ -u + p - \lambda u_\alpha = z_2, \\ (u_\alpha, \mu\,(v - v_\alpha)) + (u, v_\alpha)_2 + \delta + \lambda\left[(u_\alpha, v_\alpha) - \alpha\right] = \theta, \end{array}$$

where $(\mu, \delta, \lambda, p) \in \mathbb{R}^4_+$, $v \in \mathcal{V}_{ad}, u \in H^1(\Omega)$. This condition appears to be difficult to satisfy. Therefore we adopt a different strategy that is to penalize the constraint $u+v = 1$.

2.2 Penalization of the relaxed problem

From now, we fix $\alpha > 0$ as small as wanted. We first penalize $(\mathcal{P}_\alpha)$ to get an approximate problem $(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha)$ such that the family of solutions to $(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha)$ converges to a solution to $(\mathcal{P}_\alpha)$ with respect to ε. Once we prove the existence of a solution of $(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha)$, we use the above techniques and derive penalized optimality conditions. Then we pass to the limit with respect to ε.
Let us consider the following minimization problem, where $(u_\alpha, v_\alpha := 1 - u_\alpha)$ is a (fixed) solution to $(\mathcal{P}_\alpha)$:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon_\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min F^\varepsilon_\alpha(u, v) := & \dfrac{1}{2}\|Hu - g\|^2 + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon}\|u + v - 1\|^2 \\ & + \dfrac{1}{2}\|u - u_\alpha\|^2_{H^1} + \dfrac{1}{2}\|v - v_\alpha\|^2, \\ (u, v) \in \mathcal{K}_\alpha & \end{array} \right.$$

where

$$\mathcal{K}_\alpha := \{(u, v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \mid u \geq 0,\ v \geq 0,\ (u, v)_2 \leq \alpha\} \tag{3.10}$$

The term $\dfrac{1}{\varepsilon}\|u + v - 1\|^2$ is the penalization term of the constraint $u + v - 1 = 0$. The other terms $\|u - u_\alpha\|^2_{H^1}$ and $\|v - v_\alpha\|^2$ are adapted penalization terms which ensure the strong convergence of the penalized solution towards the desired solution (u_α, v_α) (see Barbu [11]).

Theorem 2.3 *Problem* $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ *admits at least a solution* $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Proof - Let $\varepsilon > 0$ be fixed and (u_n, v_n) be a minimizing sequence. The sequence (u_n) is H^1- bounded and (up to a subsequence) weakly converges to some u_α^ε in $H^1(\Omega)$. Similarly, the sequence (v_n) is L^2-bounded and (up to a subsequence) weakly converges to v_α^ε. The functional $F_\alpha^\varepsilon(u, v) : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ is convex and continuous, so it is weakly lower semi-continuous and

$$F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) \leq \liminf_{n \to +\infty} F_\alpha^\varepsilon(u_n, v_n) = \inf(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon) \ .$$

As the $\mathcal{K}_\alpha$ is a convex, closed subset of $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ it is also weakly closed. Therefore $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) \in \mathcal{K}_\alpha$. This ends the proof. □

Theorem 2.4 *When* ε *converges to* 0*, the family* $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)$ *strongly converges to* (u_α, v_α) *in* $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Proof - As (u_α, v_α) is a solution to $(\mathcal{P}_\alpha)$ it is always feasible for $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ and we get

$$F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) \leq F(u_\alpha) \ . \tag{3.11}$$

Therefore u_α^ε is H^1 bounded and v_α^ε is L^2 bounded independently of ε. So (up to a subsequence) u_α^ε weakly converges to u_0 in $H^1(\Omega)$ and v_α^ε weakly converges to v_0 in $L^2(\Omega)$. As $\mathcal{K}_\alpha$ is weakly closed we get

$$u_0 \geq 0, v_0 \geq 0, (u_0, v_0)_2 \leq \alpha. \tag{3.12}$$

Moreover, (3.11) gives

$$\|u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1\|^2 \leq 2\varepsilon F(u_\alpha) \ ,$$

so that

$$\|u_0 + v_0 - 1\|^2 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1\|^2 = 0.$$

We conclude with the lower semi-continuity of the functional that

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|Hu_0 - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_0\|^2 + \frac{1}{2}\|v_0 - v_\alpha\|^2 + \frac{1}{2}\|u_0 - u_\alpha\|_{H^1}^2 \\ &\leq F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) \leq F(u_\alpha) = \frac{1}{2}\|Hu_\alpha - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_\alpha\|^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

As u_0 and v_0 are also feasible for $(\mathcal{P}_\alpha)$ we have

$$\frac{1}{2}\|Hu_\alpha - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_\alpha\|^2 \leq \frac{1}{2}\|Hu_0 - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_0\|^2. \tag{3.14}$$

We use (3.13) and (3.14), we conclude easily that $u_0 = u_\alpha$, then

$$\frac{1}{2}\|Hu_0 - g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u_0\|^2 = \inf(\mathcal{P}_\alpha).$$

This implies also strong convergence of u_α^ε to u_α in $H^1(\Omega)$ and v_α^ε to v_α in $L^2(\Omega)$ since

$$\|u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha\|_{H^1}^2 + \|v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha\|^2 \leq \|Hu_\alpha - g\|^2 + \lambda\|\nabla u_\alpha\|^2 - \|Hu_\alpha^\varepsilon - g\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\|\nabla u_\alpha^\varepsilon\|^2,$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|Hu_\alpha^\varepsilon - g\|^2 + \|\nabla u_\alpha^\varepsilon\|^2\right) = \|Hu_\alpha - g\|^2 + \|\nabla u_\alpha\|^2.$$

We just proved that the only cluster point is (u_α, v_α) : the whole family $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)$ (strongly) converges to (u_α, v_α) as $\varepsilon \to 0$. □

Now, we apply Theorem 2.2 to problem $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ with $\mathcal{X} = H^1(\Omega),\ \mathcal{Z}_2 = H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$ and $\mathbf{P}$ as in the previous subsection. Now, we set $\mathcal{U} = L^2(\Omega),\ T = 0,\ f = F_\alpha^\varepsilon$ and

$$\begin{array}{rcl} G : H^1(\Omega)\times L^2(\Omega) & \to & H^1(\Omega)\times\mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (-u, (u,v)_2 - \alpha)\,. \end{array}$$

Functions f and G are $\mathcal{C}^1$ and

$$G'(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)(u,v) = (-u, (u_\alpha^\varepsilon, v)_2 + (v_\alpha^\varepsilon, u)_2)\,.$$

Here $\mathcal{V}_{ad} = \{v \in L^2(\Omega) : v \geq 0 \text{ a.e}\}$,

$$\mathcal{V}_{ad}(v_\alpha^\varepsilon) = \{\lambda(v - v_\alpha^\varepsilon) : \lambda \geq 0, v \in \mathcal{V}_{ad}\}\,,$$

and

$$\mathbf{P}(G(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)) = \left\{(-p + \lambda u_\alpha^\varepsilon, -\gamma - \lambda\left[(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha\right]) \in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}\right\},$$

where p, λ and γ are real nonnegative constants.

Let us write condition (3.5) : for any (z,w) in $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, we have to solve the system :

$$\begin{array}{c} -u + p - \lambda u_\alpha^\varepsilon = z, \\ (u_\alpha^\varepsilon, \mu\,(v - v_\alpha^\varepsilon))_2 + (u, v_\alpha^\varepsilon)_2 + \delta + \lambda[(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha] = w, \end{array}$$

where $(\mu, \delta, \lambda, p) \in \mathbb{R}_+^4,\ v \in \mathcal{V}_{ad}, u \in H^1(\Omega)$. Taking u from the first equation into the second gives :

$$(u_\alpha^\varepsilon, \mu(v - v_\alpha^\varepsilon))_2 + (p, v_\alpha^\varepsilon)_2 + \delta - \lambda\alpha = w + (z, v_\alpha^\varepsilon)_2 := \rho,$$

with $\mu, \delta, \lambda \geq 0, p \geq 0,\ v \in \mathcal{V}_{ad}$. We see that we may take : $\mu = 1, v = v_\alpha^\varepsilon, p = 0$, and

$$\begin{cases} \lambda = 0, \quad \delta = \rho, \quad \text{if } \rho \geq 0, \\ \\ \lambda = -\frac{\rho}{\alpha}, \quad \delta = 0, \quad \text{if } \rho \leq 0. \end{cases}$$

So the condition (3.5) is always satisfied. Since f, G are Fréchet-differentiable, we can apply Theorem 2.2 : there exists $y_\alpha^\varepsilon \in (H^1)'(\Omega)$ and $r_\alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{array}{ll} \forall u \in H^1(\Omega) & (H^\star H u_\alpha^\varepsilon - g, u - u_\alpha^\varepsilon)_2 + \lambda\,(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u - u_\alpha^\varepsilon))_2 + (u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon)_{H^1} + \\ & (v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 + \frac{1}{\varepsilon}\,(u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1, u - u_\alpha^\varepsilon)_2 + \\ & r_\alpha^\varepsilon\,(u - u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) + \langle y_\alpha^\varepsilon, -u + u_\alpha^\varepsilon\rangle_{(H^1)',H^1} = 0, \end{array}$$

$$\forall v \in \mathcal{V}_{ad} \quad \frac{1}{\varepsilon}\left(u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1, v - v_\alpha^\varepsilon\right)_2 + r_\alpha^\varepsilon\left(u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon\right)_2 \geq 0,$$
$$r_\alpha^\varepsilon \geq 0, \qquad r_\alpha^\varepsilon\left((u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha\right) = 0,$$

and for all $u \in H^1(\Omega)$ such that $u \geq 0$, we have

$$\langle y_\alpha^\varepsilon, u\rangle_{(H^1)',H^1} \geq 0, \qquad \langle y_\alpha^\varepsilon, u_\alpha^\varepsilon\rangle_{(H^1)',H^1} = 0.$$

We set

$$p_\alpha^\varepsilon = H^\star H u_\alpha^\varepsilon - g, \qquad q_\alpha^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1). \tag{3.15}$$

Theorem 2.5 *The solution $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)$ of problem $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ satisfies the following optimality system*

$$\begin{aligned}\forall u \in H^1(\Omega) \qquad & (p_\alpha^\varepsilon + q_\alpha^\varepsilon, u - u_\alpha^\varepsilon)_2 + \lambda\left(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u - u_\alpha^\varepsilon)\right)_2 + r_\alpha^\varepsilon\left(u - u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon\right)_2 \\ & + \left(u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon\right)_{H^1} + \left(v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon\right)_2 \geq 0,\end{aligned} \tag{3.16a}$$

$$\forall v \in \mathcal{V}_{ad} \qquad (q_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 + r_\alpha^\varepsilon\left(u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon\right)_2 \geq 0, \tag{3.16b}$$

$$r_\alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \qquad r_\alpha^\varepsilon((u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha) = 0, \tag{3.16c}$$

$$\forall u \in H^1(\Omega),\ u \geq 0 \qquad \langle y_\alpha^\varepsilon, u\rangle_{(H^1)',H^1} \geq 0, \quad \langle y_\alpha^\varepsilon, u_\alpha^\varepsilon\rangle_{(H^1)',H^1} = 0. \tag{3.16d}$$

3 Optimality system for $(\mathcal{P}_\alpha)$

Now we want to pass to the limit in the above inequalities. So we need estimates for $q_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon$ and p_α^ε with respect to ε and we use [18] techniques. We already know that, if ε tends to zero, u_α^ε converges to u_α strongly in $H^1(\Omega)$. The continuity properties of H and $H^\star$ from $L^2(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$ [2] imply that

$$p_\alpha^\varepsilon = H^\star(Hu_\alpha^\varepsilon - g) \to H^\star(Hu_\alpha - g) = p_\alpha \quad \text{strongly in } \ L^2(\Omega),$$

and p_α^ε is bounded independently of ε in $L^2(\Omega)$.

3.1 Estimate on r_α^ε

Let us choose $(u, v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ such that $u \geq 0$, $v \geq 0$ a.e and add relations (3.16a) and (3.16b), to obtain

$$(q_\alpha^\varepsilon, -(u + v - 1))_2 - r_\alpha^\varepsilon[(u_\alpha^\varepsilon, v)_2 + (v_\alpha^\varepsilon, u)_2] + 2r_\alpha^\varepsilon\left(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon\right)_2 \leq$$

$$(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u_\alpha^\varepsilon - u))_2 + (p_\alpha^\varepsilon, u_\alpha^\varepsilon - u)_2 - \varepsilon\|q_\alpha^\varepsilon\|^2 + (u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon)_{H^1} + (v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 \leq$$
$$(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u_\alpha^\varepsilon - u))_2 + (p_\alpha^\varepsilon, u_\alpha^\varepsilon - u)_2 + (u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon)_{H^1} + (v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon)_2\,.$$

As p_α^ε, v_α^ε are L^2 bounded and u_α^ε is H^1 bounded (with respect to ε), the left side is uniformly bounded with respect to ε by a constant $C_{(u,v)}$ which only depends on u, v. Moreover relation (3.16c) implies

$$r_\alpha^\varepsilon \left[(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha\right] = 0,$$

so that we finally obtain :

$$(q_\alpha^\varepsilon, -(u+v-1))_2 - r_\alpha^\varepsilon \left[(u_\alpha^\varepsilon, v)_2 + (v_\alpha^\varepsilon, u)_2\right] + 2r_\alpha^\varepsilon \alpha \leq C_{(u,v)}. \tag{3.17}$$

Now, we distinguish two cases :
First case : assume $(u_\alpha, v_\alpha)_2 < \alpha$. As $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 \to (u_\alpha, v_\alpha)_2$ in $\mathbb{R}$, there exists ε_0 such that

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ (u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 < \alpha,$$

and relation (3.16c) implies that $r_\alpha^\varepsilon = 0$. So the limit value is $r_\alpha = 0$.
Second case : $(u_\alpha, v_\alpha)_2 = \alpha$. We cannot conclude immediately and need the following Lemma.

Lemma 3.1 *Let α be such that $(u_\alpha, v_\alpha) = \alpha$. Then, there exist $\bar{u} \in H^1(\Omega), \bar{u} \geq 0$ and $\bar{v} \in \mathcal{V}_{ad}$ such that*

$$\bar{u} + \bar{v} - 1 = 0 \ \text{ and } \ (\bar{u}, v_\alpha)_2 + (\bar{v}, u_\alpha)_2 < 2\alpha.$$

Proof - It is enough to prove that there exists $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ such that $0 \leq \bar{u} \leq 1$ and

$$\int_\Omega \bar{u}(x)(1 - u_\alpha(x))\, dx + \int_\Omega (1 - \bar{u}(x)) u_\alpha(x)\, dx < 2\alpha. \tag{3.18}$$

From now, we denote $\displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega uv$ for all $(u, v) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Since $\displaystyle\int_\Omega u_\alpha(1 - u_\alpha) = \alpha$, we have

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \bar{u}(1-u_\alpha) + \int_\Omega (1-\bar{u})u_\alpha < 2\alpha &\Leftrightarrow \int_\Omega \bar{u} - 2\int_\Omega \bar{u}u_\alpha - \int_\Omega u_\alpha + 2\int_\Omega u_\alpha^2 < 0 \\
&\Leftrightarrow \int_\Omega \bar{u}(1-2u_\alpha) - \int_\Omega u_\alpha(1-2u_\alpha) < 0 \\
&\Leftrightarrow \int_\Omega (\bar{u} - u_\alpha)(1-2u_\alpha) < 0 \\
&\Leftrightarrow \int_\Omega (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1) < 0.
\end{aligned}$$

For every $x \in \Omega$, we set

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mathrm{u}_\alpha(\mathrm{x}) \geq \dfrac{3}{4}, \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{u}_\alpha(\mathrm{x}) \leq \dfrac{1}{4}, \\ 2u_\alpha(x) - \dfrac{1}{2} & \text{if} \quad \dfrac{1}{4} \leq \mathrm{u}_\alpha(\mathrm{x}) \leq \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

It is clear that $0 \leq \bar{u} \leq 1$ and $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ [37, Theorem 7.8]

$$\int_\Omega (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1) =$$

$$\underbrace{\int_{\{u_\alpha \leq \frac{1}{4}\}} (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1)}_{I_1} + \underbrace{\int_{\{u_\alpha \geq \frac{3}{4}\}} (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1)}_{I_2} + \underbrace{\int_{\{\frac{1}{4} \leq u_\alpha \leq \frac{3}{4}\}} (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1)}_{I_3}.$$

We start with I_1 :

$$I_1 = \int_{\{u_\alpha \leq \frac{1}{4}\}} (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1) = \int_{\{u_\alpha \leq \frac{1}{4}\}} u_\alpha(2u_\alpha - 1) < 0,$$

since $u_\alpha \geq 0$ and $2u_\alpha - 1 < 0$ in $\{u_\alpha \leq \frac{1}{4}\}$. Similarly

$$I_2 = \int_{\{u_\alpha \geq \frac{3}{4}\}} (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1) = \int_{\{u_\alpha \geq \frac{3}{4}\}} (u_\alpha - 1)(2u_\alpha - 1) < 0$$

since $u_\alpha \leq 1$ and $2u_\alpha - 1 \geq 0$. At last

$$I_3 = \int_{\{\frac{1}{4} \leq u_\alpha \leq \frac{3}{4}\}} (u_\alpha - \bar{u})(2u_\alpha - 1) = \int_{\{\frac{1}{4} \leq u_\alpha \leq \frac{3}{4}\}} \frac{-1}{2}(2u_\alpha - 1)^2 \leq 0.$$

□

This Lemma provides test functions $(\bar{u}, \bar{v})$ which do not depend on ε and

$$(\bar{u}, v_\alpha^\varepsilon)_2 + (\bar{v}, u_\alpha^\varepsilon)_2 \to (\bar{u}, v_\alpha)_2 + (\bar{v}, u_\alpha)_2 < 2\alpha.$$

Therefore, there exist $\rho \in]0, 2\alpha[$ and ε_0 such that

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, (\bar{u}, v_\alpha^\varepsilon)_2 + (\bar{v}, u_\alpha^\varepsilon)_2 \leq 2\alpha - \rho. \tag{3.19}$$

Now, we use (3.17) and (3.19) : $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, we have

$$r_\alpha^\varepsilon \left[2\alpha - (2\alpha - \rho)_2\right] \leq r_\alpha^\varepsilon \left[2\alpha - (\bar{u}, v_\alpha^\varepsilon)_2 + (\bar{v}, u_\alpha^\varepsilon)_2\right] \leq C_{(\bar{u},\bar{v})}.$$

So

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \qquad r_\alpha^\varepsilon \leq \frac{C_{(\bar{u},\bar{v})}}{\rho},$$

where $C_{(\bar{u},\bar{v})}$ is a positive constant that depends only on $\bar{u}$ and $\bar{v}$. We have proved the following

Proposition 3.1 *Let α be fixed. There exists $C_\alpha > 0$ and $\varepsilon_{0,\alpha} > 0$ such that*

$$\forall \varepsilon \geq \varepsilon_{0,\alpha} \qquad 0 \leq r_\alpha^\varepsilon \leq C_\alpha \ .$$

3.2 q_α^ε estimates

Once we have r_α^ε estimates, we use relation (3.17) to get

$$\forall u \in H^1(\Omega) \text{ such that } u \geq 0,\ \forall v \in L^2(\Omega), v \geq 0 \quad -(q_\alpha^\varepsilon, u+v-1)_2 \leq C_{(u,v)}. \tag{3.20}$$

Let us choose $\chi \in L^\infty(\Omega)$ such that $\|\chi\|_\infty \leq 1$, set $u_\chi = 0$ and $v_\chi = 1 + \dfrac{\chi}{2}$ in relation (3.20) to obtain

$$\forall \chi \in L^\infty(\Omega), \|\chi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1, \quad (q_\alpha^\varepsilon, \chi)_2 \leq C_\chi \leq C.$$

The positive constant C is independent of χ : indeed, from the previous computation it is easy to check that C_χ does not depend on χ as soon as $\|\chi\|_\infty \leq 1$. So q_α^ε is bounded in $(L^\infty)'(\Omega)$ i.e. in $\mathcal{M}(\Omega)$ by a constant independent of ε. Here $\mathcal{M}(\Omega)$ denotes the space of Radon measures on Ω.

From the previous estimates on r_α^ε and q_α^ε, there exist r_α in $\mathbb{R}$ and $q_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$ such that $r_\alpha^\varepsilon \to r_\alpha$ in $\mathbb{R}$ and $q_\alpha^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} q_\alpha$ weakly-star in $\mathcal{M}(\Omega)$.

3.3 $(\mathcal{P}_\alpha)$ optimality system

We may pass to the limit in the penalized optimality system :

Theorem 3.1 *Assume u_α is a solution to $(\mathcal{P}_\alpha)$ and $v_\alpha = 1 - u_\alpha$. There exists a Lagrange multiplier $(q_\alpha, r_\alpha) \in \mathcal{M}(\Omega) \times \mathbb{R}^+$ such that for all $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), u \geq 0$ and for all $v \in \mathcal{V}_{ad} \cap L^\infty(\Omega)$ we have*

$$\begin{aligned}(H^*(Hu_\alpha - g), u - u_\alpha)_2 + \langle q_\alpha, u+v-1\rangle_{\mathcal{M},L^\infty} + \lambda\,(\nabla u_\alpha, \nabla(u-u_\alpha))_2 \\ +r_\alpha\left[(u-u_\alpha, v_\alpha)_2 + (u_\alpha, v-v_\alpha)_2\right] \geq 0,\end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$r_\alpha\left[(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha\right] = 0. \tag{3.21b}$$

Proof - Let be $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), u \geq 0$ and $v \in \mathcal{V}_{ad} \cap L^\infty(\Omega)$. We add (3.16a) and (3.16b) :

$$(p_\alpha^\varepsilon, u - u_\alpha^\varepsilon)_2 + (q_\varepsilon, u+v-1)_2 - (q_\varepsilon, u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1)_2 + r_\alpha^\varepsilon\left[(u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 (u - u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2\right]$$

$$+ (u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon)_{H^1} + (v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 + \lambda\,(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u - u_\alpha^\varepsilon)) \geq 0.$$

As $-(q_\alpha^\varepsilon, u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1) = -\varepsilon||q_\varepsilon||^2$ is always negative, we have

$$\begin{aligned}(p_\alpha^\varepsilon, u - u_\alpha^\varepsilon)_2 + (q_\alpha^\varepsilon, u+v-1) + \lambda\,(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u - u_\alpha^\varepsilon)) \\ + (u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon)_{H^1} + (v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon) + r_\alpha^\varepsilon\left[(u - u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 + (u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)\right] \geq 0.\end{aligned}$$

Passing to the limit in the above relations gives the result. □

The above system may be decoupled taking respectively $u = u_\alpha$ and $v = v_\alpha$:

Corollary 3.1 *Assume u_α is a solution to $(\mathcal{P}_\alpha)$ and $v_\alpha = 1 - u_\alpha$. There exists a Lagrange multiplier $(q_\alpha, r_\alpha) \in \mathcal{M}(\Omega) \times \mathbb{R}^+$ such that*

$$\begin{aligned} &\forall u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ such that } u \geq 0 \\ &(H^*(Hu_\alpha - g) + r_\alpha v_\alpha, u - u_\alpha)_2 + \lambda \left(\nabla u_\alpha, \nabla(u - u_\alpha)\right)_2 + \langle q_\alpha, u - u_\alpha \rangle_{\mathcal{M},L^\infty} \quad \geq 0, \end{aligned} \tag{3.22a}$$

$$\forall v \in \mathcal{V}_{ad} \cap L^\infty(\Omega) \qquad \langle q_\alpha, v - v_\alpha \rangle_{\mathcal{M},L^\infty} + r_\alpha \left(u_\alpha, v - v_\alpha\right)_2 \geq 0, \tag{3.22b}$$

$$r_\alpha \left[(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha\right] = 0. \tag{3.22c}$$

4 Conclusion

We have obtained optimality conditions for the relaxed problem. However it is impossible to get convergence results as $\alpha \to 0$. Indeed the binary constraint does not allow H^1 functions and the limit function would not fit the functional framework. A generalization is to consider in a first step $W^{1,1}$ functions and use the L^1 norm of the gradient instead of the L^2 one. A regularization process is necessary but still possible (via Moreau-Yosida approximation) and we believe that the same techniques remain applicable. For the general case (BV norm) we need different tools, for instance sharp non smooth analysis. However, the relaxed H^1 formulation is suitable for numerical purpose. As we get the optimality system satisfied by solutions of $(\mathcal{P}_\alpha)$, next issue is to perform computations to solve it.

Chapitre 4

Étude numérique

Dans cette partie, nous présentons la résolution numérique du problème précédent $(\mathcal{P}_\alpha)$. En utilisant le système d'optimalité obtenu, nous interprétons le couple (solution, multiplicateurs de Lagrange) comme un point selle du Lagrangien associé au problème $(\mathcal{P}_\alpha)$. Puis, nous utilisons la méthode d'Uzawa et une méthode de type gradient à pas optimal, pour établir un schéma numérique.

1 Introduction

Le calcul explicite des solutions pour le problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ étant impossible, il est nécessaire d'avoir recours au calcul numérique pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions. Le principe de résolution est d'obtenir des valeurs numériques discrètes qui approchent la solution exacte. Nous discrétisons le problème en représentant des fonctions par un nombre fini de valeurs, c'est-à-dire que nous passons d'un espace **continu** à un espace **discret**.

L'utilisation de l'approche variationnelle dans le modèle de reconstruction aboutit au problème de minimisation $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u\in BV(\Omega)} ||Hu-g||^2_{L^2} + \lambda \displaystyle\int |\nabla u|, \\ \\ u \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Les difficultés théoriques de ce problème de minimisation se retrouvent au niveau de l'étude numérique. Autrement dit, nous sommes capables de prouver qu'il existe au moins une solution $\bar{u}$ de $(\mathcal{P})$ mais nous ne pouvons pas établir des conditions d'optimalité (équations d'Euler-Lagrange) qui faciliteraient l'étude numérique.

Dans le but d'établir quelques conditions nécessaires sur la solution de $(\mathcal{P})$, R. Abraham, M. Bergounioux et E. Trélat [2] ont pénalisé la contrainte binaire $u^2 - u = 0$ *p.p.* en considérant le problème pénalisé suivant :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \min\limits_{u\in BV(\Omega)} \dfrac{1}{2} \left\|Hu-g\right\|^2_{L^2} + \lambda \displaystyle\int_\Omega |\nabla u| + \frac{1}{2\varepsilon} \left\|u^2-u\right\|^2_{L^2}, \\ \\ u \in BV(\Omega) \cap \mathcal{B}_R, \end{cases}$$

où $R > 1$ est un réel fixé et

$$\mathcal{B}_R = \{u \in L^\infty(\Omega) : ||u||_\infty \leq R\}.$$

Ils ont prouvé qu'il existe une solution u_ε de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ dans $BV(\Omega) \cap \mathcal{B}_R$. De plus, ils ont établi que, si ε tend vers 0, la famille u_ε converge faiblement dans $BV(\Omega) \cap \mathcal{B}_R$ vers une solution u^* de $(\mathcal{P})$. Le système d'optimalité sur $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.1 Soit u_ε une solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, il existe $q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(2u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$, ζ_ε dans $(\mathcal{M}(\Omega))'$(le dual de l'espace des mesures de Radon) et $\mu_\varepsilon = -div\zeta_\varepsilon$ tels que :

$$\forall u \in BV(\Omega) \in \mathcal{B}_R, \quad \langle H^*(Hu_\varepsilon - g) + q_\varepsilon + \lambda\mu_\varepsilon, u - u_\varepsilon)\rangle \geq 0, \tag{4.1}$$

$$\mu_\varepsilon \in \partial J(u_\varepsilon), \text{avec } \; J(u) = \int_\Omega |\nabla u|, \tag{4.2}$$

et $\partial J(u_\varepsilon)$ désigne le sous différentielle de J au point u_ε :

$$\mu_\varepsilon \in \partial J(u_\varepsilon) \Leftrightarrow \forall v \in BV(\Omega), J(v) \geq J(u_\varepsilon) + \langle \mu_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre $BV(\Omega)$ et son dual.

Preuve 1.1 [2, Théorème 5].

Pour passer au système d'optimalité de $(\mathcal{P})$, des estimations sur $q_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ et ζ_ε ont été établies. Le travail numérique dans [2] a été réalisé pour le problème intermédiaire $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ en utilisant l'algorithme suivant :

Algorithme (ε fixé)

1. Initialisation : $n = 0$, u^0.
2. Résolution de la deuxième inégalité (4.2) : $\mu^{n+1} \in \partial J(u^n)$.
3. Résolution de (4.1)

$$u^{n+1} = P_{\mathcal{B}_R}(u^n - H^*(Hu^{n+1} - g) + q(u^n) + \lambda\mu^{n+1}),$$

où $P_{\mathcal{B}_R}$ désigne l'opérateur de projection sur $\mathcal{B}_R$ et

$$q(u) = \frac{p}{\varepsilon}(2u - 1)(u^2 - u)^{p-1}.$$

4. Test d'arrêt : $||u^{n+1} - u^n||_\infty \leq tol$ ou $n = n + 1$, tol est choisie lors de l'exécution de l'algorithme .

La résolution de la deuxième étape est basée sur l'algorithme de Chambolle [26]. Finalement, un résultat de convergence a été établi pour cet algorithme.

Théorème 1.2 Pour ε fixé, si la suite $(u_n)_n$ construite dans l'algorithme précédent converge vers $u^\varepsilon \in \mathbb{R}^N$, alors u^ε est une solution du problème discrétisé de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

Preuve 1.2 Voir [2, Lemme 6].

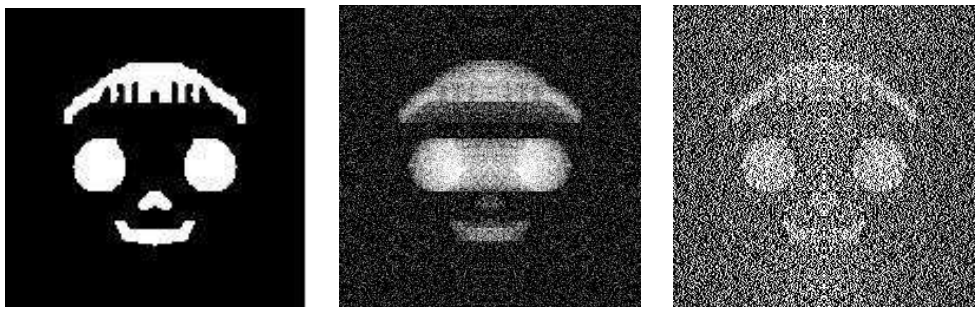
L'image utilisée dans ce schéma est représentée sur $N \times N$. Cependant, nous pouvons réduire l'espace de travail en raison de l'hypothèse de symétrie de l'objet initial, la dimension de travail devient alors $N \times \frac{N}{2}$. Dans notre étude, nous nous intéressons au cas de reconstruction sans flou. Nous considérons que l'opérateur de flou F est toujours égal à la fonction d'identité. Nous supposons que l'image obtenue par projection est perturbée par un Gaussien τ donné par :

$$\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau}} e^{\frac{-|x|^2}{2\sigma_\tau^2}},$$

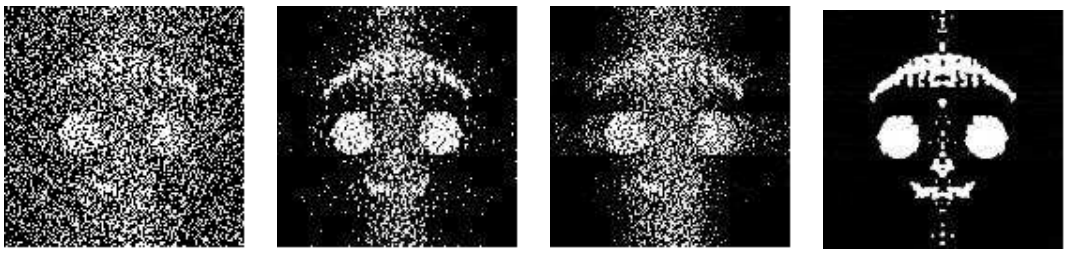
avec un écart-type σ_τ. L'image observée g devient :

$$g = Hu_{orig} + \tau. \tag{4.3}$$

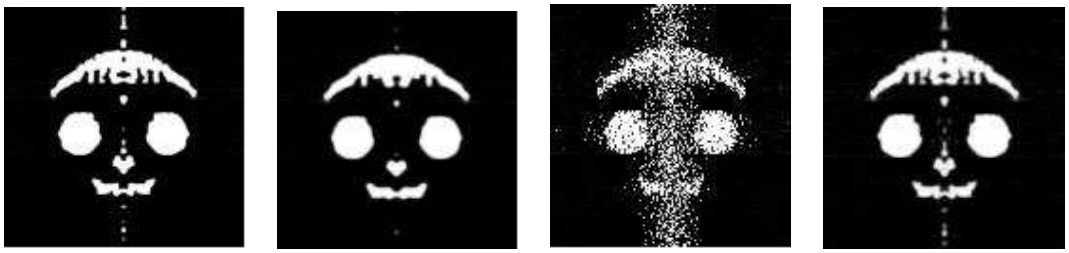
Voici quelques résultats obtenus dans [2] pour de différentes valeurs de ε et de λ (figure 4.1).



(a) L'objet initial. (b) L'image observée g. (c) La projection inverse $H^{-1}g$



(d) $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 1$ (e) $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 10$ (f) $\varepsilon = 0.5$, $\alpha = 1$ (g) $\varepsilon = 0.5$, $\alpha = 5$



(h) $\varepsilon = 0.5$, $\alpha = 10$ (i) $\varepsilon = 0.5$, $\alpha = 20$ (j) $\varepsilon = 1$, $\alpha = 1$ (k) $\varepsilon = 1$, $\alpha = 10$

FIG. 4.1: Quelques résultats de reconstruction pour de différentes valeurs de ε et λ.

2 Étude numérique du problème pénalisé $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$

Nous allons commencer par le traitement numérique du problème $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ puis en déduire un schéma numérique sur $(\mathcal{P}_\alpha)$. Comme la solution u_α du $(\mathcal{P}_\alpha)$ est inconnue, nous considérons

le même problème pénalisé $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ en ignorant les termes $||u-u_\alpha||_{H^1}^2$ et $||v-v_\alpha||_{L^2}^2$.

$$(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon) \quad \begin{cases} \min F_\alpha^\varepsilon(u,v) := \dfrac{1}{2}\|Hu-g\|_{L^2}^2 + \dfrac{\lambda}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon}\|u+v-1\|^2, \\ (u,v) \in \mathcal{K}_\alpha \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{K}_\alpha := \{(u,v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \mid u \geq 0,\ v \geq 0,\ (u,v)_2 \leq \alpha\}. \tag{4.4}$$

Nous raisonnons de la même manière que dans le chapitre 3, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.1 Il existe au moins une solution $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)$ dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$. De plus, quand $\varepsilon \to 0$, u_α^ε converge faiblement vers u_α dans $H^1(\Omega)$ et v_α^ε converge fortement vers v_α dans $L^2(\Omega)$ où u_α est une solution de $(\mathcal{P}_\alpha)$ et $v_\alpha = 1 - u_\alpha$.

Preuve 2.1 Pour la démonstration de ce théorème voir chapitre 3.

En appliquant sur $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ la méthode présentée dans le chapitre 3, nous obtenons le système d'optimalité suivant :

Théorème 2.2 Pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}, v \in \mathcal{V}_{ad}$, la solution $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)$ du problème $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ vérifie le système d'optimalité (S_α^ε) suivant :

$$\begin{aligned} &(p_\alpha^\varepsilon + q_\alpha^\varepsilon, u - u_\alpha^\varepsilon)_2 + \lambda\,(\nabla u_\alpha^\varepsilon, \nabla(u - u_\alpha^\varepsilon))_2 \\ &+ (u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha, u - u_\alpha^\varepsilon)_{H^1} + (v_\alpha^\varepsilon - v_\alpha, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 \\ &+ r_\alpha^\varepsilon\,(u - u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$(q_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 + r_\alpha^\varepsilon\,(u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon)_2 \geq 0, \tag{4.6}$$

$$r_\alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}_+, r_\alpha^\varepsilon((u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha) = 0, \tag{4.7}$$

où p_α^ε et q_α^ε sont toujours données par :

$$p_\alpha^\varepsilon = H^\star H u_\alpha^\varepsilon,\ q_\alpha^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_\alpha^\varepsilon + v_\alpha^\varepsilon - 1).$$

Preuve 2.2 Voir chapitre 3.

Le système d'optimalité (S_α^ε) ressemble bien aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) obtenues lors de l'étude d'un problème de minimisation avec des contraintes d'égalité et d'inégalité. Dans la section suivante, nous allons introduire la notion de point-selle et son lien avec les conditions de KKT afin de la relier avec le système d'optimalité obtenu (S_α^ε) ainsi qu'avec le problème de minimisation $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$.

2.1 Point-selle, théorème de Karush, Kuhn et Tucker

Soit V un espace de Hilbert réel. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}^{ci}) \quad \begin{cases} \min J(u) \\ u \in K, \end{cases}$$

où $F = (F_1, ..., F_N)$ est une fonction de V dans $\mathbb{R}^N$ et

$$K = \{u \in V : F_i(u) \leq 0, i = 1, ..., N\}.$$

Définition 2.1 On appelle Lagrangien du problème $(\mathcal{P}^{ci})$ la fonction définie sur $V \times \mathbb{R}^N_+$ par :

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + q \cdot F(v),$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.

Donnons maintenant la définition d'un point-selle, souvent appelé min-max ou col.

Définition 2.2 On dit que $(u, p) \in V \times \mathbb{R}^N_+$ est un point selle de $\mathcal{L}$ sur $V \times Q$ si

$$\forall q \in \mathbb{R}^N_+ \ \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, p) \ \ \forall v \in V.$$

Dans cette section, nous interprétons le couple (point de minimum, multiplicateur de Lagrange) comme un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème de minimisation étudié. Une fois ce résultat introduit, nous essayons de l'appliquer au problème $(\mathcal{P}^{\varepsilon}_{\alpha})$.

Théorème 2.3 Nous supposons que $F_1, ..., F_N$ sont continues sur V. Soit U un ouvert de V contenant K. Pour $(v, q) \in U \times \mathbb{R}^N_+$, nous posons

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + q \cdot F(v).$$

Soit (u, p) un point-selle de $\mathcal{L}$ sur $U \times P$. Alors $u \in K$ et u est un minimum global de J sur K. De plus, si J et $F_1, ..., F_N$ sont dérivables en u, nous avons :

$$\nabla J(u) + \sum_{i=1}^{N} p_i \nabla F_i(u) = 0.$$

Preuve 2.3 Nous écrivons la condition de point-selle, nous obtenons

$$\forall q \in \mathbb{R}^N_+ \ J(u) + q \cdot F(u) \leq J(u) + p \cdot F(u) \leq J(v) + p \cdot F(v) \forall \ \ v \in U. \tag{4.8}$$

Nous utilisons la première inégalité de (4.8), nous obtenons $F(u) \leq 0$ et $p \cdot F(u) = 0$. Ceci prouve que $u \in K$. Maintenant, comme $p \in \mathbb{R}^N_+$ et $v \in K$, la deuxième inégalité assure directement que u est un point minimum global de J sur K.
Enfin, si $J, F_1, ..., F_N$ sont dérivables en u, la deuxième inégalité de (4.8) montre que u est un point minimum sans contrainte de $J + p \cdot F$ dans U, ce qui implique que la dérivée s'annule

$$\nabla J(u) + \sum_{i=1}^{N} p_i \nabla F_i(u) = 0.$$

Par le théorème précédent, nous avons une condition nécessaire d'optimalité. Dans la suite, nous allons montrer que cette condition est suffisante si les contraintes et la fonction coût sont convexes. En effet, la proposition 2.3 affirme que, si (u, p) est un point-selle du Lagrangien, alors u réalise le minimum de J sur K. Pour un problème de minimisation convexe avec des contraintes d'inégalité convexes, nous allons présenter une réciproque de ce résultat, c'est-à-dire que, si u réalise le minimum de J sur K, alors il existe $p \in \mathbb{R}_+^N$ tel que (u, p) soit un point selle de Lagrangien.

Théorème 2.4 (Karush, Kuhn et Tucker) : Supposons que les fonctions $J, F_1, ..., F_N$ sont convexes continues sur V et dérivables sur l'ensemble K. Introduisons le Lagrangien associé

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + q \cdot F(v) \ \ \forall (v, q) \in V \times \mathbb{R}_+^N.$$

Soit u un point de K où les contraintes sont qualifiées [(1)]. Alors u est un minimum global de J sur K si et seulement si il existe $p \in \mathbb{R}_+^N$ tel que (u, p) soit un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$ sur $V \times \mathbb{R}_+^N$ ou, de manière équivalente :

$$F(u) \leq 0, p \geq 0, p \cdot F(u) = 0, \nabla J(u) + \sum_{i=1}^{N} p_i \nabla F_i(u) = 0.$$

Preuve 2.4 Afin de démontrer ce théorème, nous introduisons le lemme suivant :

Lemme 2.1 Sous les hypothèses du théorème précédent, si u est un point minimum global de J sur K alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_N$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que :

$$\nabla J(u) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \nabla F_i(u) = 0, \quad \lambda_i = 0 \ \text{ si } \ F_i \leq 0 \ \forall i \in 1, ..., N.$$

La démonstration de ce lemme est donnée dans [4]. Nous appliquons le lemme précédent, la condition est nécessaire. Réciproquement, si nous utilisons le théorème 2.3, nous montrons facilement que u est un minimum global de J sur K.

2.2 L'application de la notion du point-selle au problème pénalisé

Le système d'optimalité (S_α^ε) ressemble bien aux conditions KKT présentées dans la section précédente [théorème 2.4]. Dans la suite, nous utilisons les résultats précédents pour trouver un lien entre $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ et la notion du point-selle. En d'autres termes, en appliquant le théorème 2.4, nous construisons un Lagrangien associé à ce problème puis, à partir du système d'optimalité (S_α^ε), nous démontrons que $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ est un point-selle de ce Lagrangien.

[(1)] La définition des contraintes qualifiées est donnée dans le chapitre 2. En général, ces sont les contraintes desquelles nous pouvons trouver des directions admissibles suivant lesquelles nous testons la dérivées de J et F en u.

Considérons le Lagrangien $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$ associé au problème $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ défini sur $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+$ par :

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u, v, r) = F_\alpha^\varepsilon(u, v) + r[(u, v)_2 - \alpha],$$

avec

$$F_\alpha^\varepsilon(u, v) = \frac{1}{2}\|Hu - g\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|u + v - 1\|_{L^2}^2.$$

Théorème 2.5 Le couple $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ (point minimum, multiplicateur de Lagrange) vérifie

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+, \tag{4.9}$$

et

$$\nabla_{u,v}\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)(u - u_\alpha^\varepsilon, v - v_\alpha^\varepsilon) \geq 0, \tag{4.10}$$

pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}, v \in \mathcal{V}_{ad}$.

Preuve 2.5 Commençons tout d'abord par la démonstration de (4.9)

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r) = F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) + r[(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha].$$

Comme $r \in \mathbb{R}_+$ et comme $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha \leq 0$, on déduit que :

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r) = F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) + r[(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 - \alpha] \leq F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon).$$

En utilisant (4.7), nous concluons que :

$$F_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon) = \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon),$$

Finalement

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon).$$

Ensuite, l'inégalité (4.5) donne (4.10).

Comme le terme $(u, v)_2 - \alpha$ est bilinéaire, le Lagrangien $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$ n'est pas convexe, donc le théorème 2.4 ne garantit pas le fait que $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ soit un point-selle de $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$. Dans la suite, nous nous intéressons au cas où la contrainte $(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha$ est inactive, c'est à dire

$$(u_\alpha, v_\alpha)_2 < \alpha.$$

Dans ce cas, comme $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2$ converge vers $(u_\alpha, v_\alpha)_2$, pour $\varepsilon \to 0$, nous déduisons que :

$$(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)_2 < \alpha.$$

Corollaire 2.1 Dans le cas où la contrainte $(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha$ est inactive, $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$ sur $\mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{V}_{ad}$.

Preuve 2.6 Pour montrer que $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$, il faut démontrer que :

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u, v, r_\alpha^\varepsilon).$$

En utilisant l'inégalité (4.9) du théorème 2.5, la première assertion est vérifiée. Maintenant, comme la contrainte est inactive, par (4.7) nous déduisons que $r_\alpha^\varepsilon = 0$. Dans ce cas $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u, v, r_\alpha^\varepsilon)$ devient convexe par rapport au terme (u, v) et par (4.10), nous concluons que :

$$\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon) \leq \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u, v, r_\alpha^\varepsilon).$$

Une fois nous avons montré que $(u_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon, q_\alpha^\varepsilon)$ est un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}_\alpha^\varepsilon$, la recherche numérique commence dans le but de trouver un schéma numérique raisonnable. La méthode d'Uzawa répond bien à ce genre du problème.

2.3 La méthode d'Uzawa

Considérons le problème de minimisation convexe suivant :

$$\inf_{F(v)\leq 0} J(u), \tag{4.11}$$

où J est une fonctionnelle convexe définie sur un espace de Hilbert V et F est une fonction convexe de V dans $\mathbb{R}^M$. Sous les hypothèses du théorème de Karush, Kuhn et Tucker [4, Théorème 10.3.4], la résolution de (4.11) revient à trouver un point-selle (u, p) du Lagrangien

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + q \cdot F(v),$$

sur $V \times \mathbb{R}_+^M$ c'est à dire

$$\forall q \in \mathbb{R}_+^M, \quad \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, p), \ \ \forall v \in V,$$

nous déduisons que $(p - q) \cdot F(u) \geq 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}_+^M$. D'où, pour tout réel $\mu > 0$,

$$(p - q) \cdot (p - (p + \mu F(u))) \leq 0 \ \ \forall q \in \mathbb{R}_+^M.$$

Il est donc facile de déduire que :

$$p = P_{\mathbb{R}_+^M}(p + \mu F(u)),$$

avec $P_{\mathbb{R}_+^M}$ désigne la projection de $\mathbb{R}^M$ sur $\mathbb{R}_+^M$.
Maintenant nous pouvons introduire l'algorithme d'Uzawa : à partir d'un élément quelconque $p^0 \in \mathbb{R}_+^M$, nous construisons les suites (u^n) et (p^n) déterminées par les itérations :

$$\mathcal{L}(u^n, p^n) = \inf_{v\in V} \mathcal{L}(v, p^n),$$

$$p^{n+1} = P_{\mathbb{R}_+^M}(p^n + \mu F(u^n)).$$

2.4 Algorithme dans le cas où la contrainte est inactive

Dans le cas où la contrainte est inactive, le couple $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon, r_\alpha^\varepsilon)$ est un point selle de $\mathcal{L}_\varepsilon^\alpha$. Nous allons adapter la méthode d'Uzawa au problème $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$ en cherchant une suite $u^n \in H^1(\Omega)$ et $v^n \in L^2(\Omega)$ qui approche la solution $(u_\alpha^\varepsilon, v_\alpha^\varepsilon)$.

Algorithme $\mathcal{A}_0$ (ε fixé)

Étape 0 Initialisation : soit $n = 0, u^0 \in \mathcal{U}_{ad}, v^{-1} \in \mathcal{V}_{ad}, r^0 \in \mathbb{R}_+$.
Étape 1 Itération sur u^n et v^n :

$$u^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u, v^{n-1}, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}_{ad}.$$

$$v^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha^\varepsilon(u^n, v, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}_{ad}.$$

Étape 2 Itération sur r^n :

$$r^{n+1} = r^n + \rho[(u^n, v^n)_2 - \alpha]_+.$$

Étape 3 Critère d'arrêt : si $||u^{n+1} - u^n|| < tol$ et $||v^{n+1} - v^n|| < tol$, avec tol une constante positive assez petite, nous arrêtons l'itération. Sinon, nous posons $n = n + 1$ et nous retournons aux étapes 2 et 3. Par cet algorithme et grâce à l'étape 3, la contrainte $(u, v)_2 - \alpha$ est toujours contrôlée.

Pour résoudre les étapes 2 et 3 de cet algorithme nous allons utiliser la méthode du gradient [4, 20]. Nous appliquons maintenant cette méthode sur les étapes 2 et 3, nous obtenons

$$u^{n+1} = \left[u^n - \mu_n \left(H^\star H u^n + H^\star g - \lambda \Delta u^n + \frac{1}{\varepsilon}(u^n + v^{n-1} - 1) + r^n v^{n-1}\right)\right]_+,$$

$$v^n = \left[v^{n-1} - \delta_n \left(\frac{1}{\varepsilon}(u^n + v^{n-1} - 1) + r^n u^n\right)\right]_+,$$

$$r^{n+1} = r^n + \rho[(u^n, v^n)_2 - \alpha]_+,$$

avec μ_n, δ_n sont des réels positifs.

3 Discrétisation du problème

Pour discrétiser le domaine Ω, nous introduisons un pas d'espace $h > 0$ et nous définissons un maillage de $N \times N$ où N est un entier positif

$$(x_i, y_j) = (ih, jh), i, j = 1, ..., N.$$

Nous notons par u_{ij}^n la valeur discrète approchée de u^n au point (x_i, y_j), v_{ij}^n la valeur discrète approchée de v^n au point (x_i, y_j) et par g_{ij} celle de g au point (x_i, y_j).

Pour discrétiser le terme Δu^n, nous utilisons la méthode des différences finies. Le principe de cette méthode est de remplacer les dérivées par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dans lesquelles nous négligeons les restes. Par cette méthode, une approximation standard [46] de Δu est donnée par :

$$\Delta u^n(x_i, y_j) = \frac{u^n_{i+1,j} + u^n_{i-1,j} - 2u^n_{i,j}}{h^2} + \frac{u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1} - 2u^n_{i,j}}{h^2}.$$

Grâce à la formule explicite de l'opérateur de projection H, nous pouvons calculer la matrice H dans un espace discret de $N \times N$ points.

Proposition 3.1 La matrice de l'opérateur de projection $H = (h_{i,j})_{i=1:N,j=1:N}$ est donnée par :

$$h_{i,j} = \frac{2}{N}(\sqrt{(j+1)^2 - (i)^2} - \sqrt{(j)^2 - (i)^2} \text{ pour } j \geq i$$

et

$$h_{i,j} = 0 \text{ pour } j < i.$$

Preuve 3.1 Pour toute fonction $u \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega = [0, +a) \times (-a, +a)$ où a est un réel positif, l'opérateur de projection H est donné par :

$$Hu(y, z) = 2 \int_{|y|}^{a} u(r, z) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr.$$

Dans le cas d'un espace discret, nous supposons que pour tout $j = 1 : N$, pour tout $i = 1 : N$, $u(., y_j)$ est constante sur l'intervalle $[ih, (i+1)h]$. D'où

$$\begin{aligned}
Hu(ih, jh) &= 2 \int_{ih}^{Nh} u(r, hj) \frac{r}{\sqrt{r^2 - (ih)^2}} dr \\
&= 2 \sum_{k=i}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} u_{k,j} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (ih)^2}}, u_{k,j} \text{ est la valeur de } u \text{ sur } [kh, (k+1)h] \\
&= 2 \sum_{k=i}^{N-1} u_{k,j} \int_{kh}^{(k+1)h} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (ih)^2}} \\
&= 2 \sum_{k=i}^{N-1} [\sqrt{r^2 - (ih)^2}]_{kh}^{(k+1)h} \\
&= 2 \sum_{k=i}^{N-1} u_{k,j} [\sqrt{(k+1)^2 h^2 - (ih)^2} - \sqrt{(kh)^2 - (ih)^2} \\
&= 2 \sum_{k=i}^{N-1} u_{k,j} h [\sqrt{(k+1)^2 - (i)^2} - \sqrt{(k)^2 - (i)^2}]. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Nous considérons un pas d'espace $h = \frac{1}{N}$, nous déduisons à partir de (4.12), la preuve de la proposition 3.1. □

Suite à la discrétisation de Δu, au calcul de H et à l'approximation standard de l'intégrale double, l'algorithme devient :

$$u_{i,j}^{n+1} = [u_{i,j}^n - \mu_n[H^\star H u_{i,j}^n + H^\star g_{i,j} - \lambda(\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2}) \tag{4.13}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}(u_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1} - 1) + r^n v_{i,j}^{n-1}]_+ \tag{4.14}$$

$$v_{i,j}^n = \left[v_{i,j}^{n-1} - \delta_n \left(\frac{1}{\varepsilon}(u_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1} - 1) + r^n u_{i,j}^n \right) \right]_+ ,$$

$$r^{n+1} = r^n + \rho[(u^n, v^n)_{2,i,j} - \alpha]_+.$$

avec $H^\star H u_{i,j}^n$ est la discrétisation de $H^\star H u^n$ et $H^\star g_{i,j}$ est celle de $H^\star g$.

Grâce à l'hypothèse de symétrie, nous pouvons travailler sur une demi-image de taille $N \times \frac{N}{2}$. L'image observée est toujours donnée par (4.3).

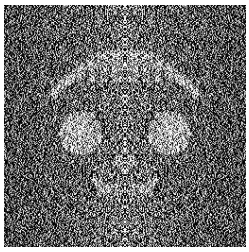
D'un point de vue numérique, la présence de ε dans la fonctionnelle est très perturbante. Ce paramètre aboutit toujours à une mauvaise reconstruction. Voici quelques simulations obtenues sous MATLAB en utilisant l'algorithme $(\mathcal{A}_0)$ pour de différentes valeurs de λ et ε.



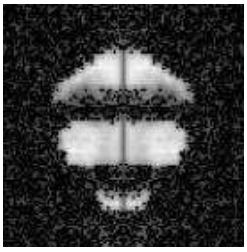
(a) L'objet initial.



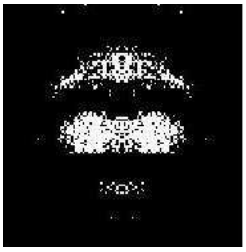
(b) L'image observée g.



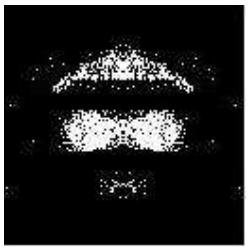
(c) La projection inverse $H^{-1}g$.



(d) $\varepsilon = 1, \lambda = 1, \alpha = 10^{-2}$.



(e) $\varepsilon = 10^{-3}$, $\lambda = 10^{-3}$,$\alpha = 10^{-2}$.



(f) $\varepsilon = 10^{-1}$, $\lambda = 10^{-1}$, $\alpha = 10^{-2}$.

FIG. 4.2: Quelques résultats de reconstruction pour de différentes valeurs de ε et α en utilisant le problème pénalisé $(\mathcal{P}_\alpha^\varepsilon)$.

4 Application de la notion du point selle à $(\mathcal{P}_\alpha)$

Pour passer à la limite dans le système d'optimalité (S_α^ε), des estimations sur q_α^ε sont nécessaires. Dans le chapitre 3, nous avons établi que q_α^ε est borné dans $(L^\infty)'(\Omega)$ et que r_α^ε est borné dans $\mathbb{R}$. Suite à ces estimations, nous passons à la limite en ε dans (S_α^ε). Nous avons affaire à un système d'optimalité (S_α) avec une mesure q_α qui est apparemment très difficile à étudier numériquement. Nous raisonnerons donc formellement pour écrier l'algorithme.

Théorème 4.1 Supposons que u_α est une solution de $(\mathcal{P}_\alpha)$ et $v_\alpha = 1 - u_\alpha$. Il existe des multiplicateurs de Lagrange $(q_\alpha, r_\alpha) \in \mathcal{M}(\Omega) \times \mathbb{R}_+$ tels que $\forall\ u \in \mathcal{U}_{ad}, \forall v \in \mathcal{V}_{ad}$ nous avons

$$\begin{aligned}(H^*(Hu_\alpha - g), u - u_\alpha)_2 + \langle q_\alpha, u + v - 1\rangle_{\mathcal{M},L^\infty} + \lambda\,(\nabla u_\alpha, \nabla(u - u_\alpha))_2 \\ +r_\alpha\,[(u - u_\alpha, v_\alpha)_2 + (u_\alpha, v - v_\alpha)_2] \qquad \geq 0,\end{aligned} \tag{4.15a}$$

$$r_\alpha\,[(u_\alpha, v_\alpha)_2 - \alpha] = 0. \tag{4.15b}$$

Preuve 4.1 Voir chapitre 3.

Soit $\mathcal{L}_\alpha$ le Lagrangien associé au problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ défini sur $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times \mathcal{M}(\Omega) \times \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{L}_\alpha(u, v, q, r) = \frac{1}{2}||Hu - g||_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2}||\nabla u||_{L^2}^2 + \langle q, u + v - 1\rangle_{\mathcal{M},L^\infty} + r[(u, v)_2 - \alpha].$$

Théorème 4.2 La famille $(u_\alpha, v_\alpha, q_\alpha, r_\alpha)$ vérifie

$$\mathcal{L}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha, q_\alpha, r_\alpha) \geq \mathcal{L}^\alpha(u_\alpha, v_\alpha, q, r) \quad \forall\ (q, r) \in \mathcal{M}(\Omega) \times \mathbb{R}_+, \tag{4.16}$$

$$\nabla_{u,v}\mathcal{L}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha, q_\alpha, r_\alpha)(u - u_\alpha, v - v_\alpha) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad} \cap L^\infty(\Omega), v \in \mathcal{V}_{ad} \cap L^\infty(\Omega). \tag{4.17}$$

Preuve 4.2 Pour la démonstration de ce théorème, nous raisonnons de la même manière que pour le théorème 2.5 en utilisant le système d'optimalité (S_α).

Avec ce théorème et toujours à cause de la non convexité du terme $(u,v)_2 - \alpha$, nous ne pouvons pas garantir que $(u_\alpha, v_\alpha, q_\alpha, r_\alpha)$ est un point selle de $\mathcal{L}_\alpha$ que dans le cas où la contrainte est inactive

$$(u_\alpha, v_\alpha)_2 < \alpha.$$

Algorithme $\mathcal{A}_1(\alpha \text{ fixé})$

Étape 0 Initialisation : soit $n = 0, u^0 \in \mathcal{U}_{ad}, q^0 \in \mathcal{M}(\Omega), v^0 \in \mathcal{V}_{ad}$.
Étape 1 Itération sur u^n et v^n :

$$u^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha(u, v^{n-1}, q^n, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}_{ad}.$$

$$v^n = \text{argmin } \mathcal{L}_\alpha(u^n, v, q^n, r^n) \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}_{ad}.$$

Étape 2 Itération sur q^n :

$$q^{n+1} = q^n + \rho_1(u^n + v^n - 1).$$

Étape 3 Itération sur r^n :

$$r^{n+1} = r^n + \rho_2[(u^n, v^n)_2 - \alpha]_+.$$

Étape 4 Critère d'arrêt : si $||u^{n+1} - u^n|| < tol$ et $||q^{n+1} - q^n|| < tol$, avec tol une constante positive assez petite, nous arrêtons l'itération. Sinon, nous posons $n = n+1$ et nous retournons aux étapes 2 et 3.

En ce qui concerne la première et la deuxième étape, nous utilisons la méthode du gradient à pas optimal, l'algorithme $\mathcal{A}_1$ devient formellement :

$$u^{n+1} = \left[u^n - \mu_n \left(H^\star H u^n + H^\star g_{i,j} - \lambda \Delta u^n + q^n + r^n v^{n-1}\right)\right]_+,$$

$$v^n = \left[v^{n-1} - \delta_n (v^{n-1} + r^n u^n\right]_+,$$

$$q^{n+1} = q^n + \rho_1(u^n + v^n - 1),$$

$$r^{n+1} = r^n + \rho_2[(u^n, v^n)_2 - \alpha]_+.$$

avec $\mu_n, \delta_n, \rho_1, \rho_2$ sont des réels positifs.

Avec la même discrétisation du terme de Laplacien Δu, les mêmes discrétisations de l'opérateur de projection H et des intégrales doubles, nous obtenons :

$$u_{i,j}^{n+1} = [u_{i,j}^n - \mu_n[H^\star H u_{i,j}^n + H^\star g_{i,j} - \lambda(\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2}) + q_{i,j}^n + r^n v_{i,j}^n]_+,$$

$$v_{i,j}^n = \left[v_{i,j}^{n-1} - \delta_n \left(q_{i,j}^n + r^n u_{i,j}^n\right)\right]_+,$$

$$q_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^n + \rho_1(u_{i,j}^n + v_{i,j}^n - 1),$$

$$r^{n+1} = r^n + \rho_2[(u^n, v^n)_{2,i,j} - \alpha]_+.$$

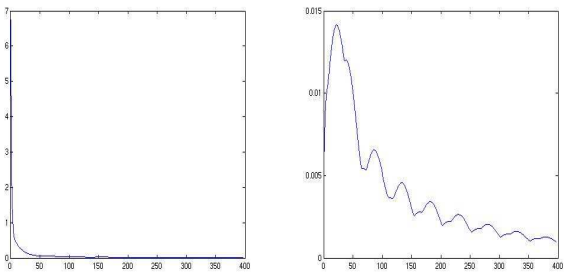
5 Interprétation des résultats numériques

L'algorithme $(\mathcal{A}_1)$ montre une sensibilité faible par rapport à α et une autre importante par rapport à λ. Commençons par la sensibilité par rapport à λ en fixant α à 10^{-2}.

5.1 Sensibilité par rapport à λ

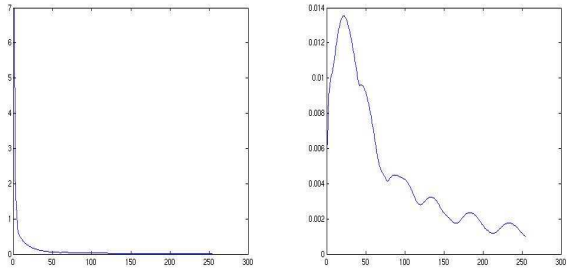
L'algorithme $(\mathcal{A}_1)$ est très sensible par rapport à λ : c'est avec ce terme que nous augmentons ou nous diminuons l'effet du terme de régularisation. Pour λ assez petit, nous n'arrivons pas à enlever efficacement le bruit Gaussien d'écart-type σ_τ alors qu'une grande valeur de λ aboutit à une perte importante d'informations sur le bord de l'image. Enfin, il existe plusieurs critères d'arrêt. Dans notre cas, nous arrêtons l'algorithme dès que $||u^{n+1}-u^n||_\infty$ et $||q^{n+1}-q^n||_\infty$ sont suffisamment petits. Le deuxième terme $||q^{n+1}-q^n||_\infty$ assure le fait que $u+v-1$ tend vers 0.

Dans le but de bien illustrer cette forte dépendance, nous présentons l'évolution des $||u^{n+1}-u^n||_\infty$ et $||q^{n+1}-q^n||_\infty$ pour de différentes valeurs de λ. Dans un premier temps, nous testons les valeurs $\lambda = 4.10^{-3}, \lambda = 10^{-2}$ et $\lambda = 2.10^{-2}$, nous obtenons avec un bruit Gaussien d'écart-type $\sigma_\tau = 0.2$, les évolutions suivantes de $||u^{n+1}-u^n||_\infty$ et $||q^{n+1}-q^n||_\infty$:



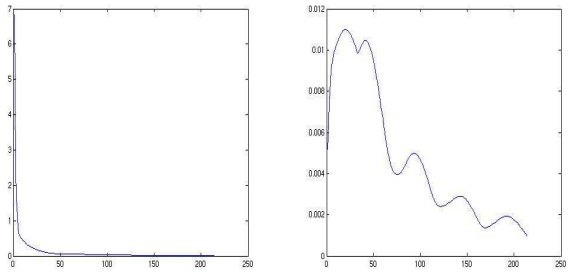
(a) $\lambda = 4.10^{-3}, \alpha = 10^{-2}$. (b) $\lambda = 4.10^{-3}, \alpha = 10^{-2}$.

FIG. 4.3: L'évolution de $||u^{n+1}-u^n||_\infty$ et $||q^{n+1}-q^n||_\infty$ pour $\lambda = 4.10^{-3}$.



(a) $\lambda = 10^{-2}, \alpha = 10^{-2}$. (b) $\lambda = 10^{-2}, \alpha = 10^{-2}$.

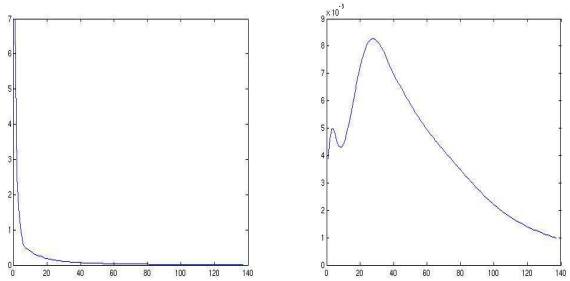
FIG. 4.4: L'évolution de $||u^{n+1} - u^n||_\infty$ et $||q^{n+1} - q^n||_\infty$ pour $\lambda = 10^{-2}$.



(a) $\lambda = 2.10^{-2}$,$\alpha = 10^{-2}$. (b) $\lambda = 2.10^{-2}, \alpha = 10^{-2}$.

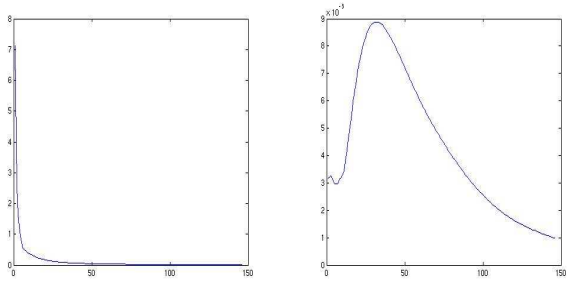
FIG. 4.5: L'évolution de $||u^{n+1} - u^n||_\infty$ et $||q^{n+1} - q^n||_\infty$ pour $\lambda = 2.10^{-2}$.

En observant les graphes (4.3), (4.4) et (4.5), nous constatons que, lorsqu'on diminue la valeur de λ, le nombre des itérations augmente et le schéma converge pour une valeur moyenne d'itération plus grande que 100. Nous augmentons la valeur de λ en considérant $\lambda = 10^{-1}, \lambda = 2.10^{-1}$, nous obtenons les graphes suivants :



(a) $\lambda = 10^{-1}, \alpha = 10^{-2}$. (b) $\lambda = 10^{-1}, \alpha = 10^{-2}$.

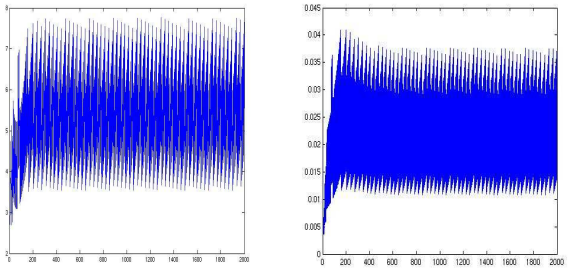
FIG. 4.6: L'évolution de $||u^{n+1} - u^n||_\infty$ et $||q^{n+1} - q^n||_\infty$ pour $\lambda = 10^{-1}$.



(a) $\lambda = 2.10^{-1}$. (b) $\lambda = 2.10^{-1}$.

FIG. 4.7: L'évolution de $||u^{n+1} - u^n||_\infty$ et $||q^{n+1} - q^n||_\infty$ pour $\lambda = 2.10^{-1}$.

Avec ces valeurs de λ, le nombre d'itérations diminue et l'algorithme converge plus vite. Or, si nous augmentons davantage la valeur de λ, l'algorithme $(\mathcal{A}_1)$ commence à diverger pour un $tol = 10^{-2}$. Considérons par exemple le cas où $\lambda = 1$.

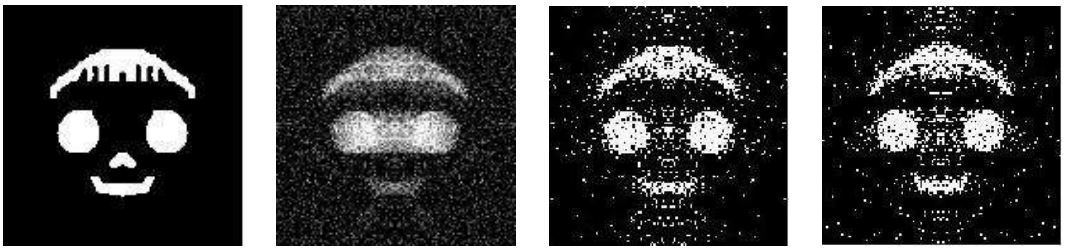


(a) $\lambda = 1, \alpha = 10^{-2}$. (b) $\lambda = 1$.

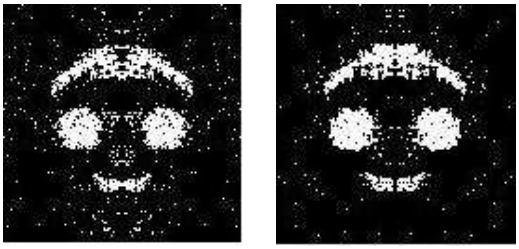
FIG. 4.8: L'évolution de $||u^{n+1} - u^n||_\infty$ et $||q^{n+1} - q^n||_\infty$ pour $\lambda = 1$ et pour 2000 itérations .

Pour conclure, les graphes présentés ci-dessus montrent bien que, si nous considérons $\lambda = 10^{-1}$ ou $\lambda = 2.10^{-2}$, le schéma converge assez vite et le nombre d'itérations tend vers 100[(2)]. Tandis qu'une variation importante de la valeur de λ (les cas où $\lambda = 4.10^{-3}$ ou $\lambda = 10^{-3}$) entraine un nombre important d'itérations. De plus, la norme infinie de $(u^{n+1} - u^n)$ et de $(q^{n+1} - q^n)$ tend vers zéro plus lentement. Ces résultats graphiques sont bien illustrés dans la figure 4.9 pour de différentes valeurs de λ et toujours pour $tol = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-2}, \mu_0 = 10^{-1}, \delta_0 = 10^{-1}, \rho_1 = \rho_2 = 10^{-1}$.

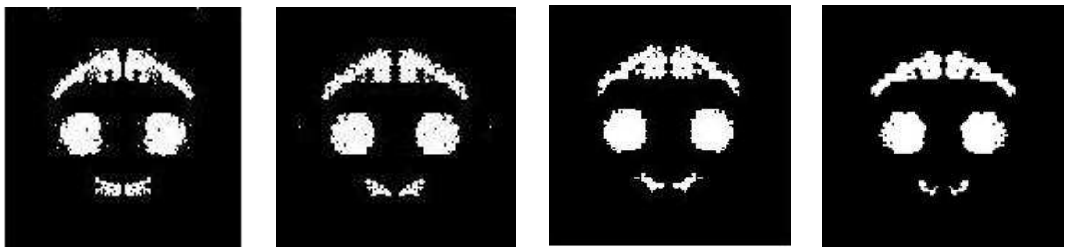
[(2)]Notons que dans ce cas, le temps d'exécution de schéma ne dépasse pas les 40 secondes.



(a) L'objet initial. (b) L'image observée g. (c) $\lambda = 0.001$. (d) $\lambda = 0.004$.



(e) $\lambda = 0.01$. (f) $\lambda = 0.02$.



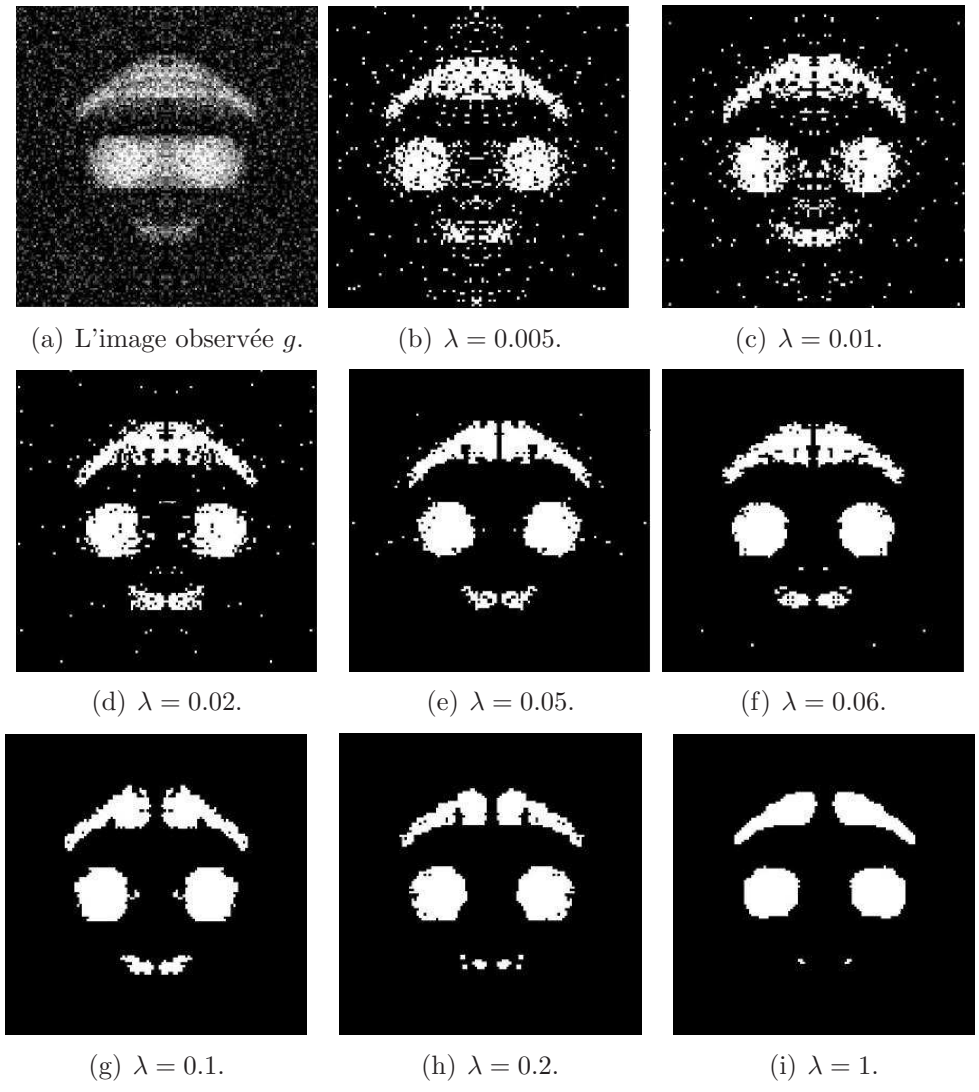
(g) $\lambda = 0.05$. (h) $\lambda = 0.06$. (i) $\lambda = 0.1$ (j) $\lambda = 0.2$.

FIG. 4.9: Reconstruction pour de différentes valeurs de λ, $tol = 10^{-2}$,$\alpha = 10^{-2}$.

En considérant $tol = 10^{-4}$ et en limitant le nombre d'itérations à 2000, nous obtenons pour $\alpha = 10^{-2}, \mu_0 = 10^{-1}, \delta_0 = 10^{-1}, \rho_1 = \rho_2 = 10^{-1}$ le tableau 4.1. Les résultats présentés dans ce tableau confirment la forte sensibilité du schéma par rapport à λ. Tout d'abord, le nombre d'itérations maximal it_{max} est atteint dans les cas où $\lambda = 5.10^{-3}$ ou $\lambda = 1$ alors que, le schéma converge plus vite pour $\lambda = 10^{-1}$ ou $\lambda = 2.10^{-2}$. Cette même idée est bien illustrée par la valeur $||u^{n+1} - u^n||_\infty$, la valeur de la fonctionnelle E, et le temps d'exécution qui est en général court. Ces résultats sont donnés dans la figure (4.10).

λ	N. itérations	$\|\|u^{n+1} - u^n\|\|_\infty$	E	temps
5e-03	2e+03	2e-04	12734+03	153
1e-02	1575	9.7888-05	1.0131e+03	112
2e-02	933	9.9491e-05	744.8284	87
5e-02	792	9.9775e-05	534. 2125	49
6e-02	540	9.9978e-05	448.8426	57
1e-01	605	9.9393e-05	374. 0889	47
2e-01	473	9.9923e-05	334.6922	37
1e-00	2000	1.4574	216.4331	160

TAB. 4.1: Sensibilité par rapport à λ, $tol = 10^{-4}$ et $it_{max} = 2000$.



(a) L'image observée g. (b) $\lambda = 0.005$. (c) $\lambda = 0.01$.

(d) $\lambda = 0.02$. (e) $\lambda = 0.05$. (f) $\lambda = 0.06$.

(g) $\lambda = 0.1$. (h) $\lambda = 0.2$. (i) $\lambda = 1$.

FIG. 4.10: Reconstruction pour de différentes valeurs de λ, $it_{max} = 2000$.

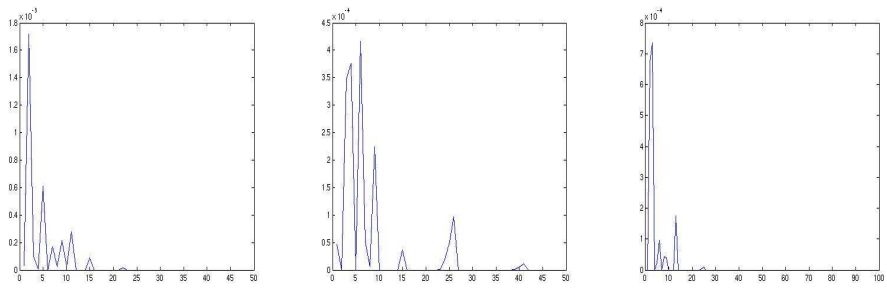
α	N. itérations	$\|\|u^{n+1}-u^n\|\|_\infty$	E	temps
5e-03	769	9.9088e-05	489.0477	38
1e-02	593	9.9382e-05	462.3171	45
2e-02	516	9.8741e-05	473.16	40
5e-02	792	9.9775e-05	534. 2125	49
1e-01	662	9.9832e-05	442.5995	47

TAB. 4.2: Sensibilité par rapport à α, $tol = 10^{-4}$ et $\lambda = 6.10^{-2}$.

En observant les images (b), (c), (d) et (e) dans la figure (4.10), nous remarquons que, pour des valeurs assez petites de λ ($\lambda = 5.10^{-3}, \lambda = 10^{-2}$ ou $\lambda = 2.10^{-3}$), nous récupérons quelques informations importantes sur les bords de l'image mais nous avons du mal à bien enlever le bruit Gaussien. En augmentant la valeur de λ dans (f), (g), (h) et (e), nous enlevons le bruit Gaussien mais nous régularisons trop le bord de l'image.

5.2 Sensibilité par rapport à α.

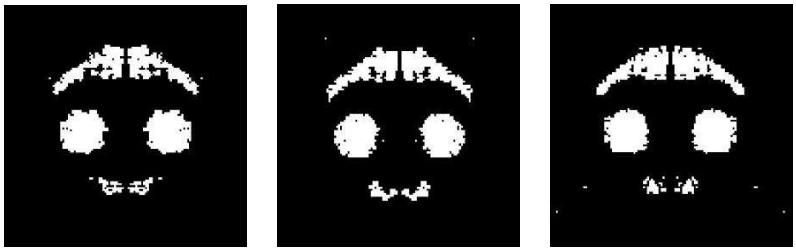
L'algorithme $(\mathcal{A}_1)$ présente une sensibilité faible par rapport à α au niveau du résultat. Autrement dit, pour de différentes valeurs de α et λ, l'intégrale $(u, v)_2$ converge rapidement vers 0 à partir d'un petit nombre d'itérations (figure 4.11).



(a) $\alpha = 10^{-3}, \lambda = 10^{-3}$. (b) $\alpha = 10^{-2}, \lambda = 10^{-2}$. (c) $\alpha = 10^{-1}, \lambda = 10^{-2}$.

FIG. 4.11: La décroissance de $(u, v)_2$ vers 0 en fonction des itérations.

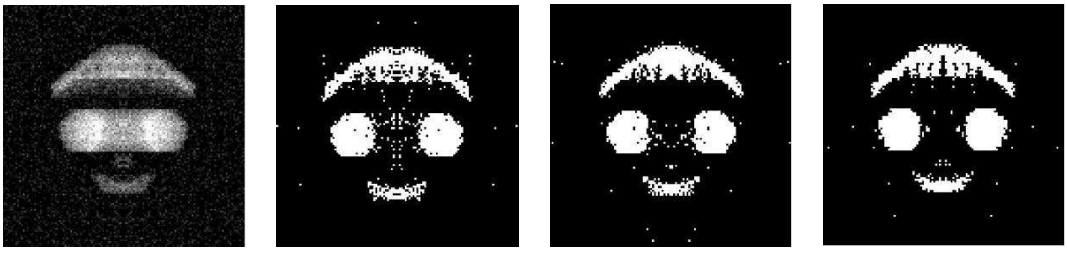
Pour un $tol = 10^{-4}$, pour $\mu_0 = \rho_1 = \rho_2 = \delta = 10^{-1}$ et $\lambda = 6.10^{-2}$, le tableau 4.2 ainsi que la figure 4.12 confirment la faible dépendance du schéma $(\mathcal{A}_1)$ par rapport au paramètre α.



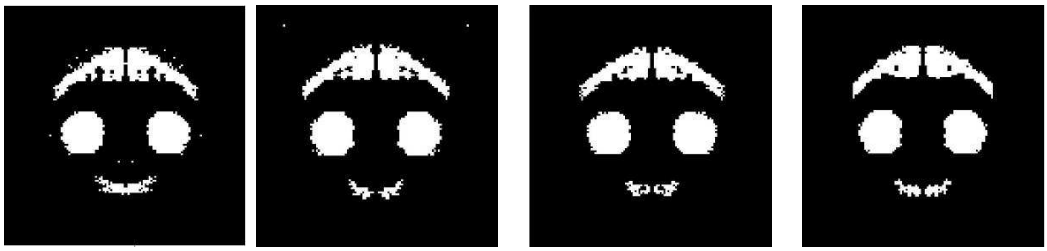
(a) $\alpha = 0.005$. (b) $\alpha = 0.02$. (c) $\alpha = 0.1$.

FIG. 4.12: Faible dépendance par rapport à α.

En considérant un bruit Gaussien d'écart-type $\sigma_\tau = 10^{-1}$, un nombre maximum d'itérations $it_{max} = 2000$ et un $tol = 10^{-4}$, nous obtenons pour $\alpha = 10^{-2}$ les résultats suivants :



(a) L'image observée g. (b) $\lambda = 0.002, it = 2000$. (c) $\lambda = 0.005, it = 1438$. (d) $\lambda = 0.01, it = 978$.



(e) $\lambda = 0.02, it = 663$. (f) $\lambda = 0.05, it = 500$. (g) $\lambda = 0.06, it = 333$. (h) $\lambda = 0.1, it = 366$.

FIG. 4.13: Reconstruction pour de différentes valeurs de λ, $it_{max} = 2000$, $\tau = 10^{-1}$.

6 Conclusion

La reconstruction tomographique utilisant l'algorithme $(\mathcal{A}_1)$ montre bien une efficacité forte par rapport au bruit Gaussien et au flou présenté par l'opérateur de projection H. Pour certaines valeurs de λ ($\lambda = 6.10^{-2}$ ou $\lambda = 2.10^{-2}$), nous arrivons à enlever ces bruits

avec un temps t assez court, en récupérant aussi quelques informations sur le bord de l'image. De plus, comme le terme $||\nabla u||^2_{L^2}$ régularise trop le bord de l'image et le rend lisse, une valeur assez importante de λ ($\lambda = 1, \lambda = 10^{-1}$ ou $\lambda = 5.10^{-1}$) aboutit à une image lisse. Reste à noter que, comme les points autour de l'axe de symétrie portent moins d'informations que les points les plus écartés (la concentration du bruit est maximale autour de l'axe de symétrie), une difficulté est intervenue lors de la reconstruction de ces points et nous n'arrivons pas à les récupérer.

Chapitre 5

Étude d'une équation géométrique non-locale du second ordre apparaissant dans la reconstruction tomographique

Dans cette partie de ma thèse, nous étudions l'équation géométrique non-locale obtenue en utilisant l'approche par lignes de niveaux (Level-Set). Nous faisons face à deux différents principes. Tout d'abord, les lignes de niveaux n'évoluent pas avec une direction normale ce qui implique que le terme non-local dans l'équation n'a pas la forme classique. Ensuite, au moins dans le cas des fronts compacts, nous permettons à la vitesse de propagation de dépendre de manière non bornée du terme non-local.
Nos résultats concernent l'existence et l'unicité des solutions de viscosité pour cette équation.

Nonlocal Second-order geometric equations arising in tomographic reconstruction [(1)]

Ali Srour
Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique,
Université François Rabelais, Tours, France

Abstract

In this paper, we study new nonlocal geometric equations which are related to tomographic reconstruction when using the level-set approach. We treat two additional difficulties which make the work original. On one hand, the level lines do not evolve along normal directions and the nonlocal term is not of "convolution type". On the other hand, the speed is not necessarily bounded compared to the nonlocal term. We prove an existence and uniqueness result for our equation.

Keywords : Nonlocal Hamilton-Jacobi equations ; Tomographic reconstruction ; Nonlocal front propagation ; Level-set approach ; Viscosity solutions.

1 Introduction

In this paper, we study a fully nonlinear parabolic equation with nonlocal term. More precisely,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x,t,Du,D^2u,K^{k,+}_{x,t,u}) \quad \text{in } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0,\mathrm{T}]\,, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \{0\}\,, \end{cases} \tag{5.1}$$

where $N \geq 1$ is an integer, $T > 0$. The unknown function is $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, Du and D^2u denote respectively the gradient and the Hessian of u with respect to the space variable, $u_0 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ is the given initial data, and $K^{k,+}_{x,t,u}$ denotes the nonlocal term given for some integer $k \leq N$ by

$$K^{k,+}_{x,t,u} = [u]^+_{x,t} \cap A^k_x$$

where

$$[u]^+_{x,t} = \big\{ y \in \mathbb{R}^N : u(y,t) \geq u(x,t) \big\}$$

and

$$A^k_x = \big\{ y = (y_1,...,y_k,y_{k+1},...,y_N) \in \mathbb{R}^N : \pi_k(y) = \pi_k(x) \big\}$$

where π_k denotes the projection function from $\mathbb{R}^N$ into $\mathbb{R}^k$ defined by

$$\pi_k(x) = (x_1,...,x_k)$$

[(1)] To appear in *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications* .

for all $x = (x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N)$. In the same manner

$$K^{k,-}_{x,t,u} = [u]^-_{x,t} \cap A^k_x$$

where

$$[u]^-_{x,t} = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : u(y,t) > u(x,t) \right\}.$$

The nonlinearity F is a continuous function from $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_{N-k}$ into $\mathbb{R}$, where $\mathscr{S}_N$ is the set of real symmetric $N \times N$ matrices and $\mathscr{B}_{N-k}$ is the set of equivalence classes of all subsets of $\mathbb{R}^{N-k}$ with respect to the relation $A \sim B$ if $\mathcal{L}^{N-k}(A \Delta B) = 0$, where $\mathcal{L}^{N-k}$ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{N-k}$.

We consider $\mathscr{B}_{N-k}$ with a topology that comes from the metric

$$d(A,B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}^{N-k}\Big((A \Delta B) \cap B(0,n)\Big)}{2^n \mathcal{L}^{N-k}(B(0,n))},$$

where $B(0,n)$ denotes the ball in $\mathbb{R}^{N-k}$ of center 0 and radius n. With this topology a sequence $(K^k_n)_{n \geq 1}$ in $\mathscr{B}_{N-k}$ converges to $K^k \in \mathscr{B}_{N-k}$ if and only if $\mathbb{1}_{K^k_n}$ converges to $\mathbb{1}_{K^k}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-k})$.

Here, we give in dimension 2 an example of an equation which is related to tomographic reconstruction when using active curves and the level-set approach [1, 24] and which has the same type of nonlocal term of equation (5.1). The model case we have in mind is

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = C(x,t) \left(\displaystyle\int_{K^{1,+}_{x,t,u}} g(z) dz \right) |Du| + \text{Trace} \left[(I - \dfrac{Du \otimes Du}{|Du|^2}) D^2 u \right], \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \end{cases} \tag{5.2}$$

where $x = (x_1, x_2)$, g is a positive function and $g \in L^1(\mathbb{R})$, C is a Lipschitz continuous function, and $K^{1,+}_{x,t,u}$ is given by

$$\begin{aligned} K^{1,+}_{x,t,u} &= \left\{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : u(y,t) \geq u(x,t) \right\} \cap \{ y_1 = x_1 \} \\ &= [u]^+_{x,t} \cap A^1_x. \end{aligned}$$

We recall that the level-set approach was first introduced by Osher and Sethian [44] for numerical computations. It was then developed from a theoretical point of view by Evans and Spruck [35] for motion by mean curvature and by Chen, Giga and Goto [27] for general normal velocities. We also refer the reader to , Soner and Souganidis [17] and Souganidis [50, 51] for different presentations and other results on the level-set approach.

In [49], Slepčev studied the motion of fronts in bounded domains by normal velocities which can depend on the nonlocal terms, in addition to the curvature, the normal direction and the location of the front. In fact, the velocities depend on the nonlocal terms if the

velocities at any point of the front depend on the set that the front encloses. Depending on the velocities, the motion of the front can be described by the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x,t,Du(x,t),D^2u(x,t),[u]^+_{x,t}) \quad \text{in} \quad O\times[0,T] \tag{5.3}$$

with the Neumann boundary conditions $\partial u/\partial\gamma = 0$ on $\partial O\times[0,T]$ and $u(x,0)=u_0(x)$, where O is a bounded domain in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Slepčev proved an existence and uniqueness result for this equation, using the viscosity solution.

In [15], Barles, Cardaliaguet, Ley and Monneau studied the first-order nonlocal equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \left(C_0(.,t) * \mathbb{1}_{[u]^+_{x,t}}(x,t) + C_1(x,t)\right)|Du| \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^N\times[0,T]\,, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^N\times\{0\}\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

This equation appears when modelling dislocations in crystals using the level set approach. The $*$ denotes the convolution in space, C_0 and C_1 are two functions on which we have some conditions. They proved an existence and uniqueness result for this equation in both cases where C_0 is a positive and a negative function, $C_0(.,t)\in L^1(\mathbb{R}^N)$ for all $t\in[0,T]$, and C_0, C_1 are two Lipschitz continuous functions .

Now a question comes out : what are the differences between the equations (5.1)-(5.2) and (5.3)-(5.4) ? We consider the case $N=2$ to explain, for example, the differences between the equations (5.2) and (5.4). In (5.4), for any $(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]$ where $x=(x_1,x_2)$, the nonlocal term is given by

$$[u]^+_{x,t} = \{y\in\mathbb{R}^2 : u(y,t)\geq u(x,t)\}\,.$$

and we integrate on a subset of $\mathbb{R}^2$. In our equation (5.2), the new nonlocal term is given for any $(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]$ by

$$K^{1,+}_{x,t,u} = \{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : u(y,t)\geq u(x,t)\}\cap\{y_1=x_1\}\,,$$

and we integrate in (5.2) over a straight line i.e. the first variable is always fixed. We remark that the technique used in [15, 49] cannot be applied in the case of this new nonlocal term. Therefore, we change the dependence in Du, in order to be able to prove a uniqueness and existence result for our equation (5.1) using techniques inspired by [15, 49].

Moreover, contrary to the cases studied in [15, 49], in the initial compact front, we allow an unbounded dependence of volume in our equation (5.1) (see **(H5-1)** and **(H6-1)**).

Let us now explain how this paper is organized : in Section 1, we present our problem and we recall the definition of viscosity solutions. In Section 2, we prove a uniqueness result for our equation with compact fronts. In Section 3 we show a uniqueness result for non compact fronts. In Section 4, we prove an existence result for compact and non compact fronts. Finally, we give, in Appendix, the proof of the stability result for equation (5.1).

2 Presentation of our problem

Tomography processes are widely studied by many authors. Most of the studied cases concern the images restoration from a lot of projected data. In [52], M. Somekh addresses the problem of reconstruction of an image from two pairs of its orthogonal projections. The paper by J.M. Dinten, J.P. Bruandet, F. Peyrin, O. Amadieu and M. Barlaud [24] addresses tomographic reconstruction of binary objects from a small number of noisy projections in applications where the global dose remains constant with an increase or a decrease of the number of projections. Here we are interested in the reconstruction method of [1], where the authors consider a single view of tomographic reconstruction for radially symmetric objects and binary image. They formulate the problem as a front propagation which consists in evolving the contour of the noisy image (initial front), with a selected normal velocity, so that it converges toward the contour of the initial object. This evolution is described by the level-set approach which leads to a nonlocal equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = C(x,t)\left(\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{R}:u(x_1,z,t)\geq 0\}} g(z)dz\right)|Du| + \text{Trace}\left[(I - \dfrac{Du\otimes Du}{|Du|^2})D^2u\right], \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2\times\{0\}, \end{cases} \tag{5.5}$$

where $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, g is a positive function and $g \in L^1(\mathbb{R})$. The second term on the right hand side of (5.5) is the mean curvature. This term was studied in [35] where it was used to regularize the evolution of the initial front with normal velocity.

First, for this equation, even the existence of solutions is not known. The major difficulty is due to the fact that the function C has negative value. From a geometrical point of view, the front propagation does not satisfy any monotonicity property (preservation of inclusion). The monotonicity property of the front propagation problem is almost equivalent to the comparison principle theorem for viscosity solutions and can be expressed in the following way : if $(\Omega_t^1)_{t\geq 0}$, $(\Omega_t^2)_{t\geq 0}$ are two families of open subsets evolving with the same normal velocity then, if $(\Omega_0^1) \subset (\Omega_0^2)$, one has

$$(\Omega_t^1) \subset (\Omega_t^2), \quad \forall t \geq 0.$$

Secondly, since x_1 is fixed in (5.5), a discontinuity appears in the normal speed of propagation. To see this problem of continuity it is enough to start with a rectangular initial front whose sides are parallel to the coordinate axes and this rectangle can be represented as a level-set zero of a function u from $\mathbb{R}^2\times[0,T]$ to $\mathbb{R}$ i.e $u = 0$ on the sides, $u > 0$ inside the rectangle and $u < 0$ outside (see Figure 1). Suppose that this front evolve with a normal simplified velocity given by

$$V(x,y,t) = \int_{\{z\in\mathbb{R}:u(x,z,t)\geq 0\}} dz,$$

where $(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$. Now, we consider the points (l, y, t) where l is the width of

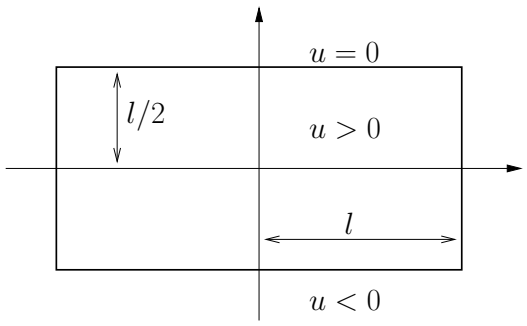


FIG. 5.1: Rectangular initial front.

the rectangle and $2l$ is its length. It is easy to prove that the velocity at these points is l, but if we move horizontally to $(l+\epsilon, y)$, the velocity becomes $V(l+\epsilon, y, t) = 0$. So, we conclude that moving horizontally causes a jump in the velocity. Now, because of the new form of the nonlocal term, the classical technique to prove the uniqueness and existence of a viscosity solution ceases to hold which makes it interesting, at least from a theoretical point of view, to study this kind of problem. In order to be able to solve the equation (5.5) by using the arguments of the classical technique, we make two changes to our original equation (5.5). First, we change the sign of C in order to preserve the inclusion property with the prospect to deal with the case $C \leq 0$ in a future work. Secondly, in our present work, we change the dependence with respect to the Du variable. More precisely, instead of evolving in the normal direction, we will evolve in the vertical direction. In this case, the vertical sides of the rectangle remain fixed, whereas the two horizontal sides move in opposite sense along the vertical direction. In addition, a numerical study would be very important for this type of propagation.

Moreover, as it was remarked by Slepčev [49], in the level-set approach, all level-sets of the solution u should have the same type of normal velocity. A nonlocal term using $[u]^+_{x,t}$ instead of $\{u(.,t) \geq 0\}$ is more appropriate. After these modifications, the equation (5.5) becomes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = C(x,t)\left(\displaystyle\int_{K^{1,+}_{x,t,u}} g(z)dz\right)\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right| + \text{Trace}\left[(I - \dfrac{Du \otimes Du}{|Du|^2})D^2u\right], \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \tag{5.6}$$

and we will prove in Section 3 a uniqueness and existence of a viscosity solution for (5.6).

We now list the basic requirements on F. The main assumptions, introduced because of the presence of the nonlocal term, are the monotonicity with respect to set inclusion and the continuity of F with respect to the topology on $\mathscr{B}_{N-k}$ which is defined in the introduction.

(H1) F is continuous from $\mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_{N-k}$ into $\mathbb{R}$.

(H2) For all $(x,t,K^k,L^k) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathscr{B}_{N-k} \times \mathscr{B}_{N-k}$, we have

$$-\infty < F_\star(x,t,0,O,K^k) = F^\star(x,t,0,O,L^k) < +\infty.$$

Here $F^\star$ denotes the upper semicontinuous envelope of F, while $F_\star$ is the lower semicontinuous envelope of F. We recall that if $f : S \to \mathbb{R}$ where S is a subset of some $\mathbb{R}^N$, the upper- and lower-semicontinuous envelopes $f^\star$ and $f_\star$ of f are given by

$$f^\star(y) = \limsup_{z \to y} f(z) \quad \text{and} \quad f_\star(y) = \liminf_{z \to y} f(z).$$

(H3) (**Monotonicity assumption**). F is nondecreasing in its set argument i.e, for any K^k, L^k in $\mathscr{B}_{N-k}$ such that $K^k \subset L^k$, we have

$$F(x,t,p,X,K^k) \leq F(x,t,p,X,L^k)$$

for any X in $\mathscr{S}_N$, and for any (x,t,p) in $\mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

(H4) F is geometric : for any $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, we have

$$F(x,t,\lambda p, \lambda X + \mu p \otimes p, K^k) = \lambda F(x,t,p,X,K^k)$$

for all $(x,t,p,X,K^k) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_{N-k}$.

Definition 2.1 (Slepčev [49])
An upper-semicontinuous function $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, is a viscosity subsolution of (5.1) *if, for any $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, for any maximum point $(\bar{x},\bar{t})$ of $u-\phi$, if $\bar{t} > 0$ then*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\bar{x},\bar{t}) \leq F_\star(\bar{x},\bar{t},D\phi(\bar{x},\bar{t}),D^2\phi(\bar{x},\bar{t}),K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})$$

and $u(\bar{x},0) \leq u_0(\bar{x})$ if $\bar{t} = 0$.
A lower-semicontinuous function $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ is a viscosity supersolution of (5.1) *if, for any $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, for any minimum point $(\bar{x},\bar{t})$ of $u-\phi$, if $\bar{t} > 0$ then*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\bar{x},\bar{t}) \geq F^\star(\bar{x},\bar{t},D\phi(\bar{x},\bar{t}),D^2\phi(\bar{x},\bar{t}),K^{k,-}_{\bar{x},\bar{t},u})$$

and $u(\bar{x},0) \geq u_0(\bar{x})$ if $\bar{t} = 0$.
A function is a viscosity solution of (5.1)*, if it is both a subsolution and supersolution of* (5.1).

Remark 2.1 In the definition of a subsolution and a supersolution, "test sets" were chosen differently. This is a major point when viscosity solutions are to be extended to non local, geometric parabolic equations. If "$\geq$" were used instead of "$>$" in the definition of supersolutions, existence results, among other things, would hold no more. For more information, we refer the reader to the arguments given by Slepčev in [49, Definition 2.1]. For convenience, we give alternative proof for these arguments in the Appendix.

In the initial compact front we will seek the solutions of our equation (the solution of which represents the front via its zero level-set) by functions in the class $\mathcal{C}$ given by the following definition.

Definition 2.2 *A function $u : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$ is in the class $\mathcal{C}$, if $-1 < u(x,t) \leq 1$ and $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,t) = \lim_{|x|\to+\infty} u(x,t) = -1$ for all x in $\mathbb{R}^N$ and uniformly with respect to $t \in [0,T]$.*

Remark 2.2 All continuous functions in $\mathcal{C}$ are uniformly continuous bound-ed function and any compact front can be represented as a level-set zero of a function in $\mathcal{C}$. Indeed, let $E \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open set and $\Gamma_0 = \partial E$ be the initial compact front. This front is represented by the signed function defined by

$$d^s_{\partial E}(x) = d(x, \mathbb{R}^N \backslash E) - d(x, E),$$

where $d(x,E)$ denotes the distance function to E. It is easy to check that $d^s_{\partial E}(x) > 0$ if $x \in E$, $d^s_{\partial E}(x) < 0$ if $x \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{E}$, and $d^s_{\partial E}(x) = 0$ if and only if $x \in \Gamma_0$. Moreover $d^s_{\partial E}$ is Lipschitz continuous with constant 1. Now, we consider the function $f(x) = 2\arctan(d^s_{\partial E}(x))/\pi$ and we use the properties of the arctan function to prove that $f(x) > -1$ for all $x \in \mathbb{R}^N$ and $f(x)$ tends to -1 as x tends to ∞. Then, $f \in \mathcal{C}$ and the initial compact front Γ_0 is represented by f. A typical example of a function which belongs to this class is $g(x,t) = \dfrac{e^{-At}}{1+|x|^2} - 1$ where $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ and A is a positive constant.

Now, another question comes out : for what reason, do we use the class $\mathcal{C}$ for sub and supersolutions in the compact front case ? The nonlocal velocity at any point of the front depends on the set that the front encloses. In some cases, the velocity could not be defined, for instance when the volume of the set is infinite (see the example of the "volume velocity" below). With this kind of velocity, we always start with a compact initial front and our goal is to show that, the front remains compact along the evolution. From a geometrical point of view, this kind of well defined velocity does not grow the sets too quickly. In this paper, we use the class $\mathcal{C}$ to define the evolution with velocities which are not well defined for non compact sets. More precisely, we represent the compact initial front by a function u_0 in $\mathcal{C}$ (see Remark 2.2) and our main result consists in proving that when evolving, the front can still be represented by a function u in $\mathcal{C}$ (see Theorem 3.1). Now, we give an example of a velocity for which the compact front result applies, but not the non compact one. We start with an initial front which propagates with the following velocity

$$V(x,t,[u]^+_{x,t}) = \left(\int_{[u]^+_{x,t}} dz\right)^{\frac{1}{N}} = (\mathrm{vol}\{u(.,t) \geq u(x,t)\})^{\frac{1}{N}}\,. \tag{5.7}$$

When we describe this evolution by the level-set approach we obtain the nonlocal level-set equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\mathrm{vol}\{u(.,t) \geq u(x,t)\})^{\frac{1}{N}}\,|Du| \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times [0,T]\,, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \{0\}\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

First, the power $\frac{1}{N}$ ensures the existence of a viscosity solution of (5.8) and ensures that the front does not explode on short time t (see [16, Remark 4.1]). Moreover, if the solution u belongs to the class $\mathcal{C}$, for any $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ there exists $M_{x,t}$ such that, the Lebesgue measure $\mathcal{L}^N([u]_{x,t}) \leq M_{x,t} < \infty$. Whence, the previous definition of viscosity solution remains valid for the equation (5.8). Finally we note that, in the case of non compact front, the velocity is not well defined.

3 Uniqueness result for compact fronts

In the case of compact fronts, we start with a compact initial front and we prove that the front remains compact i.e. there exists a solution u of (5.1) which lies in $\mathcal{C}$. We use the following assumptions :

(H0) Initial compact front : $u_0 \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^N)$ and $u_0 \in \mathcal{C}$.

Now, for $\theta \in \{0,1\}$, we have the following assumptions.

(H5-θ) There exist positive constants L_1 and L_2 such that for (x,t,p,X,K^k) in $\mathbb{R}^N\backslash\{0\} \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{B}_{N-k}$, we have

$$|F(x,t,p,X,K^k)| \leq L_1\Big((1+|x|)|p| + \theta\mathcal{L}^{N-k}(K^k)^{\frac{1}{N-k}}|\tilde{\pi}_k(p)|\Big) + L_2(1+|x|^2)|X|_\infty$$

where $|A|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq N}\sum\limits_{j=1}^{N}|a_{i,j}|$, for any matrix $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ in $\mathscr{S}_\mathrm{N}$ and $\tilde{\pi}_k$ denotes the projection from $\mathbb{R}^N$ into $\mathbb{R}^{N-k}$ defined by $\tilde{\pi}_k(x) = (x_{k+1},...,x_N) = x - \pi_k(x)$, for all $x \in \mathbb{R}^N$.

(H6-θ)(Degenerate elliptic assumption). There exists a nondecreasing modulus of continuity $w : [0,\infty] \to [0,\infty]$ which satisfies $w(0^+) = 0$ and

$$F(x,t,p,X,K^k) - F(y,t,p,Y,K^k) \leq w\left(|x-y|\Big(1+|p|+\theta\mathcal{L}(K^k)^{\frac{1}{N-k}}|\tilde{\pi}_k(p)|\Big) + \sigma|x-y|^2\right)$$

whenever $(x,y,t,p,K^k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathbb{R}^N\backslash\{0\} \times \mathscr{B}_{N-k}$, σ is a positive constant and X, Y satisfying the inequality $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix}$, where $Z \in \mathscr{S}_N$ and $\leq$ stands for the partial ordering in $\mathscr{S}_N$.

(H7) For $1 < k \leq N$, for all p in $\mathbb{R}^N$, there exists a continuous function G from $\mathbb{R}^\mathbb{N} \times [0,T] \times \mathbb{R}^k\backslash\{0\} \times \mathscr{S}_N$ to $\mathbb{R}^{N-k}$ such that : if $\tilde{\pi}_k(p) = 0$ then

$$F(x,t,p,X,K^k) = G(x,t,\pi_k(p),X)$$

for all $(x,t,p,X) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathbb{R}^N\backslash\{0\} \times \mathscr{S}_N$. Moreover, we suppose that, G satisfies the assumption **(H6-0)**.

Remark 3.1 The assumptions (**H5-1**) and (**H6-1**) allow an unbounded dependence on volume so that, we can always control the volume of the set enclosed by the front. In particular, thanks to these hypotheses, we can avoid the explosion of the front along the evolution. The hypotheses apply well to the example (5.7), while it is not the case for the velocity defined by

$$V(x,t,[u]^+_{x,t}) = \text{vol}\{u(.,t) \geq u(x,t)\},$$

for which the front blows up in finite time.

Remark 3.2 The assumption **(H7)** represents well the modification on the Du dependence. From a technical point of view, this modification, as noted in the presentation of our problem, permits to prove the uniqueness of a viscosity solution for our equation (5.1).

Theorem 3.1 (Comparison principle)
Assume **(H0)-(H1)-(H2)-(H3)-(H4)-(H5-1)-(H6-1)-(H7)**. *Let $u \in \mathcal{C}$ (resp. $v \in \mathcal{C}$) be a bounded upper-semicontinous subsolution of (5.1) (resp. bounded lower-semicontinous supersolution of (5.1)), then $u \leq v$ in $\mathbb{R}^N \times [0,T]$.*

Corollary 3.1 *Under the assumptions of Theorem* 3.1*, there exists a unique viscosity solution $u \in \mathcal{C}$ of* (5.1).

The proof of this Corollary is postponed to (Section 5).

Proof of Theorem 3.1.
1. The test-function. We argue by contradiction assuming there exists $(\hat{x},\hat{t}) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ such that

$$u(\hat{x},\hat{t}) - v(\hat{x},\hat{t}) = M > 0.$$

Since u and v are bounded, the following supremum

$$M_{\epsilon,\eta} = \sup_{(x,y,t)\in(\mathbb{R}^N)^2\times[0,T]} \{u(x,t) - v(y,t) - \sum_{i=0}^{N} \frac{|x_i - y_i|^4}{4\epsilon^4} - \eta t\} \tag{5.9}$$

is finite for any $\epsilon, \eta > 0$. We choose η is small enough so that

$$M_{\epsilon,\eta} \geq \frac{M}{2} > 0. \tag{5.10}$$

Since $u, v \in \mathcal{C}$, we have

$$\lim_{|x|\to+\infty} [u(x,t) - v(x,t)] = 0$$

uniformly with respect to $t \in [0,T]$. Therefore from (5.10), the supremum in (5.9) is achieved at a point $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$,

$$M_{\epsilon,\eta} = u(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{y},\bar{t}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4} - \eta\bar{t}. \tag{5.11}$$

Actually $\bar{x}, \bar{y}$ and $\bar{t}$ depend on ϵ, η, but we omit this dependence in the notation for simplicity.

2. Viscosity inequalities when $\bar{t} > 0$. From the fundamental result of the User's guide to viscosity solutions [29, Theorem 8.3], for every $\rho > 0$, we get $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ and $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathscr{S}_N$ such that

$$(a_1, \bar{p}, \bar{X}) \in \bar{\mathcal{P}}^{2,+} u(\bar{x}, \bar{t}), \quad (a_2, \bar{p}, \bar{Y}) \in \bar{\mathcal{P}}^{2,-} v(\bar{y}, \bar{t})$$

and

$$-\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{X} & 0 \\ 0 & -\bar{Y} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Z + \rho Z^2 & -(Z + \rho Z^2) \\ -(Z + \rho Z^2) & Z + \rho Z^2 \end{pmatrix}$$

$$a_1 - a_2 = \eta,$$

for $Z = D^2\varphi(\bar{x} - \bar{y})$, where $\varphi(x - y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \frac{|x_i - y_i|^4}{4\epsilon^4}$, I is the identity matrix and

$$\bar{p} = \Big(\frac{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|^2(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)}{\epsilon^4}, \cdots, \frac{|\bar{x}_N - \bar{y}_N|^2(\bar{x}_N - \bar{y}_N)}{\epsilon^4}\Big).$$

Writing that u is a subsolution and v a supersolution of (5.1), we have

$$\eta \leq F_\star(\bar{x}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{X}, K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}) - F^\star(\bar{y}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{Y}, K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}). \tag{5.12}$$

Remark 3.3 The reader should note a difficulty in applying [29, Theorem 8.3] here. Indeed, one should double the time variable to prove [29, Theorem 8.3]. It is not straightforward here because of the presence of the nonlocal term. This problem is solved by the stability result provided in [49]. However, we give another proof of the stability in the appendix .

3. Comparison of the nonlocal terms. From the definition of $M_{\epsilon,\eta}$, for all $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, we have

$$u(x, \bar{t}) - v(y, \bar{t}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i - y_i|^4}{4\epsilon^4} \leq u(\bar{x}, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{t}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4}.$$

Taking $x = (\pi_k(\bar{x}), z)$ and $y = (\pi_k(\bar{y}), z)$, for any $z \in \mathbb{R}^{N-k}$, we have

$$u(\pi_k(\bar{x}), z, \bar{t}) - v(\pi_k(\bar{y}), z, \bar{t}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4} \leq u(\bar{x}, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{t}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4},$$

thus we obtain

$$u(\pi_k(\bar{x}), z, \bar{t}) - u(\bar{x}, \bar{t}) \leq v(\pi_k(\bar{y}), z, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{t}) - \sum_{i=k+1}^{N} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4}. \tag{5.13}$$

4. Upper-bound for the volume $K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}$ and conclusion.
Since $u, v \in \mathcal{C}$ and by (5.10) and (5.11), $\bar{x}$ and $\bar{y}$ remain bounded independently of ϵ and η. Using $v \in \mathcal{C}$, we write

$$\lim_{\epsilon,\eta \to 0} v(\bar{y}, \bar{t}) > -1,$$

then, there exists a positive constant μ independent of ϵ and η, such that $v(\bar{y},\bar{t}) \geq -1+\mu$. Then

$$K^{k,+}_{\bar{y},\bar{t},v} \subset \{z \in \mathbb{R}^{N-k} : v(\pi_k(\bar{y}), z, \bar{t}) \geq -1+\mu\} \subset \overline{B(0,R)}$$

where R is a positive constant independent of ϵ and η. By the inequality (5.13), if $u(\pi_k(\bar{x}), z, \bar{t}) - u(\bar{x},\bar{t}) \geq 0$, we have $v(\pi_k(\bar{y}), z, \bar{t}) - v(\bar{y},\bar{t}) \geq 0$, then

$$K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u} \subset K^{k,+}_{\bar{y},\bar{t},v} \subset \overline{B(0,R)}. \tag{5.14}$$

We distinguish two cases :
First case : $\bar{x}_i = \bar{y}_i$ for all $k < i \leq N$. In this case we have

$$\bar{p} = \left(\frac{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|^2(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)}{\epsilon^4}, \cdots, \frac{|\bar{x}_k - \bar{y}_k|^2(\bar{x}_k - \bar{y}_k)}{\epsilon^4}, 0, \cdots, 0 \right).$$

In other words, $\tilde{\pi}_k(\bar{p}) = 0$. First, if $\bar{x}_i = \bar{y}_i$ for any $1 \leq i \leq k$ then $\bar{p} = 0$. But, by [29, Theorem 3.2], and [14, Lemma 2.4.3], there exist $\bar{X}', \bar{Y}' \in \mathscr{S}^N$ such that

$$\bar{X} \leq \bar{X}' \leq \bar{Y}' \leq \bar{Y},$$

with $\bar{X}' = \bar{Y}' = 0$ when $\bar{p} = 0$. Taking advantage of the ellipticity of $F^\star$ and $F_\star$, we get from (5.12)

$$\eta \leq F_\star(\bar{x},\bar{t},0,O,K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}) - F^\star(\bar{x},\bar{t},0,O,K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}).$$

Assumption **(H2)** implies that

$$\eta \leq 0,$$

which is a contradiction since $\eta > 0$.
Therefore, there exists $1 \leq i_0 \leq k$ such that $\bar{x}_{i_0} \neq \bar{y}_{i_0}$ and $\bar{p} \neq 0$. Using **(H7)** and the viscosity inequality in (5.12), we get

$$\eta \leq G(\bar{x},\bar{t},\pi_k(\bar{p}),\bar{X}) - G(\bar{y},\bar{t},\pi_k(\bar{p}),\bar{Y}).$$

By **(H7)**, G satisfies the assumption **(H6-0)** then

$$\begin{aligned} \eta &\leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|\,(1+|\pi_k(\bar{p})|) + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big) \\ &\leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|\,(1+|\bar{p}|) + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Since $|\bar{p}| < \dfrac{|\bar{x}-\bar{y}|^3}{4\epsilon^4}$, then $|\bar{x}-\bar{y}||\bar{p}| \leq \dfrac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4}$. From this estimate, the inequality in (5.15) becomes

$$\eta \leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}| + \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4} + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big). \tag{5.16}$$

Classical arguments [29, Remark 3.8] show that $|\bar{x}-\bar{y}|$ and the penalisation term $\sum_{i=1}^{N} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4}$ tend to 0 if ϵ tends to 0, then $\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4}$ tends to 0 if ϵ tends to zero. Finally we let ϵ tend to 0 in (5.15), to obtain $\eta \leq 0$ which is a absurd.

Second case : There exists i_0 such that $k < i_0 \leq N$ and $\bar{x}_{i_0} \neq \bar{y}_{i_0}$. In this case, for all $z \in \mathbb{R}^{N-k}$, we have from (5.13)

$$\begin{aligned} u(\pi_k(\bar{x}), z, \bar{t}) - u(\bar{x}, \bar{t}) &\leq v(\pi_k(\bar{y}), z, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{t}) - \frac{|\bar{x}_{i_0} - \bar{y}_{i_0}|^4}{4\epsilon^4} \\ &< v(\pi_k(\bar{y}), z, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{t}). \end{aligned}$$

and therefore

$$K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u} \subset K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}. \tag{5.17}$$

Since $\bar{p} \neq 0$ in this case, the inequality viscosity in (5.12) becomes

$$\eta \leq F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{X}, K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}) - F(\bar{y}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{Y}, K^{k,-}_{\bar{x},\bar{t},v}).$$

From **(H3)** and (5.17), we get

$$\eta \leq F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{X}, K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}) - F(\bar{y}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{Y}, K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}).$$

We use the assumption **(H6-1)** to write

$$\eta \leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|\Big(1 + |\bar{p}| + \mathcal{L}^{N-k}(K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})^{\frac{1}{N-k}}|\tilde{\pi}_k(\bar{p})| + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2)|\Big)\Big). \tag{5.18}$$

Now, using the estimate in (5.14), we have

$$\mathcal{L}^{N-k}(K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})^{\frac{1}{N-k}} \leq \mathcal{L}^{N-k}(\overline{B(0,R)})^{\frac{1}{N-k}} \leq C_{N-k}R$$

where $C_{N-k} = \mathcal{L}^{N-k}\left(B_{N-k}\left(0,1\right)\right)^{\frac{1}{N-k}}$, and R is independent of ϵ. Then

$$\begin{aligned} \eta &\leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|\Big(1 + |\bar{p}| + C_{N-k}R|\tilde{\pi}_k(\bar{p})|\Big) + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big) \\ &\leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}| + \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4} + C_{N-k}R\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4} + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Since we know that $\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4}$ tends to 0 as ϵ tends to 0, therefore $|\bar{x}-\bar{y}|$ converges to 0 as ϵ goes to 0 and the above inequality (5.19) implies that $\eta \leq 0$ which is a contradiction since $\eta > 0$.

6. The case $\bar{t} = 0$. From the above step we obtain that the maximum $M_{\epsilon,\eta}$ is achieved

for $\bar{t} = 0$. From (5.10) and using the uniform continuity of u_0 ($u_0 \in \mathcal{C} \cap C(\mathbb{R}^N)$), for any $\rho \geq 0$, there exists $L_\rho > 0$ such that

$$\frac{M}{2} \leq M_{\epsilon,\eta} = u_0(\bar{x}) - u_0(\bar{y}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|\bar{x}_i - \bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4} \leq \rho + L_\rho |\bar{x} - \bar{y}|,$$

which leads to a contradiction taking $\rho < \dfrac{M}{2}$ and sending ϵ to 0. □

4 Uniqueness result for non compact fronts

In the previous section we considered the assumption **(H0)**, this assumption forced us to deal with a compact initial front $\Gamma_0 = \{u_0 = 0\}$. In this section we deal with non compact fronts. We change **(H0)** to **(H0')** and we consider the following assumptions :

(H0') Non compact initial front : $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$.

(H1') For all $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}_N$, we have

$$\lim_{|p|,|X|\to 0} F^\star(x,t,p,X,K^k) = \lim_{|p|,|X|\to 0} F_\star(x,t,p,X,K^k) = 0,$$

uniformly with respect to $(x, t, K^k) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathscr{B}_{N-k}$.

(H2') For all $(x, t, K^k) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathscr{B}_{N-k}$ and for all (p, X, Y) in $\mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N \times \mathscr{S}_N$ such that $(|p| + |X|), (|p| + |Y|) \leq R$, where R is a positive constant, There exists a nondecreasing modulus of continuity $w_R : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ and $w_R(0^+) = 0$ such that

$$F(x,t,p,X,K^k) - F(x,t,q,Y,K^k) \leq w_R\Big((|X-Y|_\infty + |p-q|)(1+|x|)\Big).$$

(H3') For any $K^k, L^k \in \mathscr{B}_{N-k}$ such that $K^k \backslash L^k \subset \mathbb{R}^{N-k} \backslash B(0,r)$, where $r > 0$, and for bounded $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}_N$ we have

$$F(x,t,p,X,K^k) - F(x,t,p,X,L^k) \to 0$$

if r tends to $+\infty$ uniformly with respect to $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

(H4') For any $K^k, L^k \in \mathscr{B}_{N-k}$, for any bounded $(p, X) \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \times \mathscr{S}_N$ such that $|\tilde{\pi}_k(p)| \leq \lambda$, we have

$$F(x,t,p,X,K^k) - F(x,t,p,X,L^k) \to 0$$

if λ tends to 0 uniformly with respect to $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Remark 4.1 The assumption **(H3')** implies that, if the Lebesgue measure of $K^k \backslash L^k$ is negligible, then the difference between $F(x,t,p,X,K^k)$ and $F(x,t,p,X,L^k)$ is small for any $x \in \mathbb{R}^N$ and X bounded and uniformly with respect to $t \in [0,T]$. In addition, since we deal with the non compact front **(H0')**, we cannot control the nonlocal terms and instead of the assumption **(H5-1)**, we consider the assumption **(H5-0)**.

Theorem 4.1 (Comparison principle)
We assume **(H0')-(H1')-(H2')-(H3')-(H4')-(H4)-(H5-0)-(H6-0)**. *Let u (resp. v) be a bounded upper-semicontinuous subsolution of (5.1) (resp. bounded lower semicontinuous supersolution of (5.1)), then $u \leq v$ in $\mathbb{R}^N \times [0,T]$.*

Corollary 4.1 *Under the assumptions of Theorem* 4.1*, there exists a unique viscosity solution u of* (5.1)*.*

The demonstration of this Corollary is postponed to (Section 5).

Proof of the Theorem 4.1.
1. The test-function. We argue by contradiction. We suppose that there exists $(\tilde{x},\tilde{t})$ such that

$$0 < M = u(\tilde{x},\tilde{t}) - v(\tilde{x},\tilde{t}).$$

In this case, we have to add some terms in the test-function in order to deal with non compact front. We consider

$$M_{\epsilon,\eta,\alpha} = \sup_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,T]} \{u(x,t) - v(y,t) - (\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i - y_i|^4}{4\epsilon^4} + \alpha |x|^2 + \alpha |y|^2) - \eta t\}. \quad (5.20)$$

Since u, v are bounded, for $\epsilon, \alpha, \eta > 0$, the supremum is achieved at a point $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ and for α, η are small enough, we have

$$M_{\epsilon,\eta,\alpha} \geq \frac{M}{2} > 0.$$

2. Viscosity inequalities when $\bar{t} > 0$. From the fundamental result of the User's guide to viscosity solutions [29, Theorem 8.3], for every $\rho > 0$, we get $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ and $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathscr{S}^N$ such that

$$(a_1, \bar{p} + 2\alpha\bar{x}, \bar{X} + 2\alpha I) \in \bar{\mathcal{P}}^{2,+} u(\bar{x},\bar{t}), \quad (a_2, \bar{p} - 2\alpha\bar{y}, \bar{Y} - 2\alpha I) \in \bar{\mathcal{P}}^{2,-} v(\bar{y},\bar{t}),$$

$$a_1 - a_2 = \eta,$$

and

$$\frac{-1}{\rho} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{X} & 0 \\ 0 & -\bar{Y} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Z + \rho Z^2 & -(Z + \rho Z^2) \\ -(Z + \rho Z^2) & Z + \rho Z^2 \end{pmatrix}$$

for $Z = D^2\varphi(\bar{x}-\bar{y})$, where $\varphi(x-y) = \sum_{i=0}^{N} \frac{|x_i-y_i|^4}{4\epsilon^4}$ for any $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ and

$$\bar{p} = \Big(\frac{|\bar{x}_1-\bar{y}_1|^2(\bar{x}_1-\bar{y}_1)}{\epsilon^4}, \cdots, \frac{|\bar{x}_N-\bar{y}_N|^2(\bar{x}_N-\bar{y}_N)}{\epsilon^4}\Big).$$

Moreover, by [29, Remark 3.8] and [36, Proposition 2.5], $|\bar{X}|_\infty$,$|\bar{Y}|_\infty$ and $|\bar{x}-\bar{y}|$ are bounded (independently of α) and we have

$$\lim_{\epsilon,\alpha\to 0} \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4} = 0, \lim_{\epsilon,\alpha\to 0} \alpha(|\bar{x}|^2+|\bar{y}|^2) = 0, \tag{5.21}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha|\bar{y}| = \lim_{\alpha\to 0} \alpha|\bar{x}| = 0. \tag{5.22}$$

Writing that u is a subsolution and v a supersolution of (5.1), we have

$$\eta \le F_\star(\bar{x},\bar{t},\bar{p}+2\alpha\bar{x},\bar{X}+2\alpha I, K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}) - F^\star(\bar{y},\bar{t},\bar{p}-\alpha\bar{y},\bar{Y}-2\alpha I, K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}). \tag{5.23}$$

3. Difference between $K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}$ and $K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}$. Because of the presence of the term $\alpha|x|^2 + \alpha|y|^2$ in the test function, the procedure used in the compact front case (Step 4) is not valid. Now, since $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ is the maximum point of (5.20), we have

$$\begin{aligned} &u(\pi_k(\bar{x}),z,\bar{t}) - v(\pi_k(\bar{y}),z,\bar{t}) \\ &\qquad \le u(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{y},\bar{t}) - \sum_{i=k+1}^{N} \big(\frac{|\bar{x}_i-\bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4} + \alpha(\bar{x}_i^2+\bar{y}_i^2)\big) + 2\alpha|z|^2. \end{aligned}$$

From the definition of $K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}$ and $K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}$, we have

$$K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u} \subset K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v} \cup \bar{\mathcal{E}},$$

where $\bar{\mathcal{E}} = K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u} \cap \{v(\pi_k(\bar{y}),\cdot,\bar{t}) \le v(\bar{x},\bar{t})\}$. If $z \in \bar{\mathcal{E}}$, we have

$$u(\bar{x},\bar{t}) - v(\bar{y},\bar{t}) \le u(\pi_k(\bar{x}),z,\bar{t}) - v(\pi_k(\bar{y}),z,\bar{t}).$$

It follows that

$$\bar{\mathcal{E}} \subset \left\{ z \in \mathbb{R}^{N-k} : |z|^2 \ge \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{N} \Big(\frac{|\bar{x}_i-\bar{y}_i|^4}{4\alpha\epsilon^4} + \bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2\Big)\right\}. \tag{5.24}$$

4. Estimate of the term hand and side of the inequality (5.23)**.** We distinguish two cases :

First case : $\lim_{\alpha\to 0} \bar{p} = 0$. By [29, Theorem 3.8] we have $\bar{X} \le D^2_{\bar{x}\bar{x}}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ and $\bar{Y} \ge -D^2_{\bar{y}\bar{y}}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$. Taking advantage of the ellipticity of $F^\star$ and $F_\star$ in the viscosity inequality (5.23), we obtain

$$\eta \le F_\star(\bar{x},\bar{t},\bar{p}+2\alpha\bar{x}, D^2_{\bar{x}\bar{x}}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+2\alpha I, K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}) - F^\star(\bar{y},\bar{t},\bar{p}-\alpha\bar{y}, -D^2_{\bar{y}\bar{y}}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})-2\alpha I, K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v}).$$

But, since $\lim_{\alpha\to 0}\bar{p}=0$, then $\lim_{\alpha\to 0}D^2_{\bar{x}}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=0$ and $\lim_{\alpha\to 0}D^2_{\bar{y}}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=0$. We send α to zero and we use the assumption **(H1')** to write $\eta\leq 0$, which is a contradiction since $\eta>0$.

Second case : $\lim_{\alpha\to 0}\bar{p}\neq 0$. In which case, up to extract a subsequence there exists $\nu>0$ such that $\bar{p}\geq\nu$. Now, by (5.22) we can suppose that $\bar{p}\neq 0, \bar{p}+2\alpha\bar{x}\neq 0, \bar{p}-2\alpha\bar{y}\neq 0$ and we have the following estimate
$F(\bar{x},\bar{t},\bar{p}+2\alpha\bar{x},\bar{X}+2\alpha I,K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})-F(\bar{y},\bar{t},\bar{p}-2\alpha\bar{y},\bar{Y}-2\alpha I,K^{k,-}_{\bar{x},\bar{t},v})$
$\leq (I_1)+(I_2)+(I_3)+(I_4)$,
where
$(I_1)=F(\bar{x},\bar{t},\bar{p}+2\alpha\bar{x},\bar{X}+2\alpha I,K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})-F(\bar{x},\bar{t},\bar{p},\bar{X},K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})$,
$(I_2)=F(\bar{x},\bar{t},\bar{p},\bar{X},K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})-F(\bar{y},\bar{t},\bar{p},\bar{Y},K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})$,
$(I_3)=F(\bar{y},\bar{t},\bar{p},\bar{Y},K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u})-F(\bar{y},\bar{t},\bar{p},\bar{Y},K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v})$,
$(I_4)=F(\bar{y},\bar{t},\bar{p},\bar{Y},K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v})-F(\bar{y},\bar{t},\bar{p}-2\alpha\bar{y},\bar{Y}-2\alpha I,K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v})$.
By the classical argument in [29, Theorem 8.3] and [36, Proposition 2.5], $\bar{p}+2\alpha\bar{x},\bar{X},\bar{Y}$ and $\bar{p}+2\alpha\bar{x}$ are bounded independently of α. We suppose that $R_\epsilon=\mathrm{Max}\Big((|\bar{p}+2\alpha\bar{x}|+|\bar{X}|_\infty),(|\bar{p}-2\alpha\bar{y}|+|\bar{Y}|_\infty)\Big)$, and we use the assumption **(H2')**, to obtain

$$\begin{aligned}(I_1)&\leq w_{R_\epsilon}\Big((2\alpha|I|_\infty+2\alpha|\bar{x}|)(1+|\bar{x}|)\Big)\\&\leq w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha+4\alpha|\bar{x}|+2\alpha|\bar{x}|^2\Big),\end{aligned}$$

since $|I|_\infty=1$. Moreover

$$\begin{aligned}(I_4)&\leq w_{R_\epsilon}\Big((2\alpha|I|_\infty+2\alpha|\bar{y}|)(1+|\bar{y}|)\Big)\\&\leq w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha+4\alpha|\bar{y}|+2\alpha|\bar{y}|^2\Big),\end{aligned}$$

Now, we use the assumption **(H6-0)**, to have

$$\begin{aligned}(I_2)&\leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|(1+|\bar{p}|)+\sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big)\\&\leq w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|+\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4}+\sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big).\end{aligned}\tag{5.25}$$

The estimate of the term (I_3) is prove later.
5. End of the case $\bar{t}>0$**.** By the above estimate, the viscosity inequality in (5.23) becomes

$$\begin{aligned}\eta\leq\ & w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha+4\alpha|\bar{x}|+2\alpha|\bar{x}|^2\Big)+w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha+4\alpha|\bar{y}|+2\alpha|\bar{y}|^2\Big)\\&+w\Big(|\bar{x}-\bar{y}|+\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4}+\sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big)+(I_3).\end{aligned}\tag{5.26}$$

From (5.21) and (5.22), we have

$$\lim_{\epsilon,\alpha\to 0} w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha + 4\alpha|\bar{x}| + 2\alpha|\bar{x}|^2\Big) = 0. \tag{5.27}$$

$$\lim_{\epsilon,\alpha\to 0} w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha + 4\alpha^2|\bar{y}| + 4\alpha^2|\bar{y}|^2\Big) = 0. \tag{5.28}$$

$$\lim_{\epsilon,\alpha\to 0} w\Big(|\bar{x}-\bar{y}| + \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4} + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big) = 0. \tag{5.29}$$

Now, we send α to zero, the inequality (5.26) becomes

$$\begin{aligned}\eta \leq \lim_{\alpha\to 0}\Big(w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha + 4\alpha|\bar{x}| + 2\alpha|\bar{x}|^2\Big) + w_{R_\epsilon}\Big(2\alpha|I| + 4\alpha|\bar{y}| + 2\alpha|\bar{y}|^2\Big)\Big)\\ + \lim_{\alpha\to 0} w\Big(|\bar{x}-\bar{y}| + \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^4}{4\epsilon^4} + \sigma|\bar{x}-\bar{y}|^2\Big) + \lim_{\alpha\to 0}(I_3).\end{aligned} \tag{5.30}$$

From now on, we denote by $I_{\epsilon,\alpha}$ the sum $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=k+1}^{N}\frac{|\bar{x}_i-\bar{y}_i|^4}{4\epsilon^4}$. Then (5.24) becomes

$$\bar{\mathcal{E}} \subset \left\{ z\in\mathbb{R}^{N-k} : |z|^2 \geq \frac{I_{\epsilon,\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=k+1}^{N}(\bar{x}_i^2+\bar{y}_i^2)\right)\right\}. \tag{5.31}$$

For (I_3) we distinguish two cases :
First case : $\lim_{\alpha\to 0} I_{\epsilon,\alpha} = 0$, in this case we have $\lim_{\alpha\to 0}|\tilde{\pi}_k(\bar{p})| = 0$. Since $\bar{Y}-2\alpha I$ and $\bar{p}-2\alpha\bar{y}$ remain bounded (independently of α), we use the assumption **(H4')**, to obtain

$$\lim_{\alpha\to 0}(I_3) = 0.$$

Now, we send ϵ to zero in (5.30) and we use (5.27),(5.28) and (5.29), the inequality (5.30) becomes $\eta \leq 0$, which is a contradiction since $\eta > 0$.
Second case : $\lim_{\alpha\to 0} I_{\epsilon,\alpha} \neq 0$, in this case, up to extract a subsequence there exists $\delta > 0$ such that

$$I_{\epsilon,\alpha} \geq \delta.$$

The estimate in (5.24) implies

$$\bar{\mathcal{E}} = K^{k,+}_{\bar{x},\bar{t},u}\backslash K^{k,-}_{\bar{y},\bar{t},v} \subset \mathbb{R}^{N-k}\backslash B(0,r_\alpha),$$

where $r_\alpha = \dfrac{I_{\epsilon,\alpha}}{\alpha} \geq \dfrac{\delta}{\alpha}$ tend to $+\infty$ if α tends to zero. Since we know that $\bar{Y}-2\alpha I$ and $\bar{p}-2\alpha\bar{y}$ are bounded (independently of α), then the assumption **(H3')** implies $\lim_{\alpha\to 0}(I_3) = 0$, and we obtain a contradiction as in the first case.
End of the proof. From above, we have necessarily $\bar{t} = 0$, and we conclude as in the precedent section, Step 6. □

5 Existence result

In this Section, we use the classical Perron's method to provide a proof of Corollary 3.1, when the initial front is compact (the one in the non compact case (Corollary 4.1) can be adapted easily). This proof is given by the three following steps.
Step 1. In this step we construct a subsolution $\underline{u} \in \mathcal{C}$ and a supersolution $\overline{u} \in \mathcal{C}$ of our equation (5.1). We start with the following Lemma.

Lemma 5.1 *Let* $A \leq -\Big(3L_1 + 2L_{N-k}L_1 + 2(L_2+1)(2N+3)\Big)$, *where* L_1, L_2 *appear in the assumption* **(H5-1)** *and* $C_{N-k} = \mathcal{L}^{N-k}\left(B\left(0,1\right)\right)^{\frac{1}{N-k}}$. *Then the function*

$$g(x,t) = \frac{e^{At}}{1+|x|^2} - 1$$

is a smooth subsolution of (5.1) for $t > 0$.

The proof of the Lemma 5.1 is postponed. Now, from the subsolution g for $t > 0$, we construct a subsolution in the class $\mathcal{C}$ which satisfies the initial condition. We consider the nondecreasing function ϕ from $(-\infty, 0)$ to $\mathbb{R}$ defined by

$$\phi(t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \{u_0(y) : g(y,0) \geq t\}.$$

By the definition of ϕ we have

$$\phi(g(y,0)) \leq u_0(y). \tag{5.32}$$

Starting from this function ϕ, we will build a regular function which has the property (5.32). For this reason, we need to prove the following Lemmas.

Lemma 5.2 *The function* $\phi_n : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ *defined by*

$$\phi_n(t) = n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \phi(s)ds.$$

have the following properties :
i)- $\phi_n(t) \leq \phi(t)$ *for all* $t \in (-\infty, 0)$.
ii)- For all n *the function* $t \to \phi_n(t)$ *is nondecreasing.*
iii)- For all n *the function* $\phi_n \in C((-\infty, 0))$ *and* $\phi_n(g) \in \mathcal{C}$.

Proof of the Lemma 4.2.
i)- Since ϕ is nondecreasing we have $\phi(s) \leq \phi(t)$ for all $s \leq t$ and

$$\phi_n(t) = n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \phi(s)ds \leq n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \phi(t)ds \leq \phi(t)$$

then $\phi_n(t) \leq \phi(t)$ for all $t \in (-\infty, 0)$.
ii)- Let $t^{'} \geq t$, by change of the variables $s^{'} = s + (t^{'} - t)$, we have

$$\begin{aligned}\phi_n(t) = n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \phi(s)ds &= n\int_{t^{'}-\frac{1}{n}}^{t^{'}} \phi\Big(s^{'} - (t^{'} - t)\Big)ds^{'} \\ &\leq n\int_{t^{'}-\frac{1}{n}}^{t^{'}} \phi(s^{'})ds^{'} \\ &= \phi_n(t^{'})\end{aligned}$$

thus ϕ_n is nondecreasing.
iii)- The function ϕ is bounded, then the function ϕ_n is $C((-\infty, 0))$. Since ϕ_n is nondecreasing, by ii) we have

$$\lim_{|x|\to\infty} \phi_n\Big(g(x,t)\Big) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \phi_n\Big(g(x,t)\Big) = \phi_n(-1) = -1$$

and $\phi_n\Big(g(x,t)\Big) > -1$ for any $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$. Then $\phi_n(g) \in \mathcal{C}$. □
Now we consider the function

$$\tilde{\phi}_n(t) = n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \phi_n(t)ds.$$

Since $\phi_n \in C((-\infty, 0))$, then $\tilde{\phi}_n \in C^1((-\infty, 0))$ and the Lemma 5.2 remains valid with the function $\tilde{\phi}_n$ (we replace ϕ by ϕ_n). Similarly, we consider the function

$$\hat{\phi}_n(t) = n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \tilde{\phi}_n(t)ds.$$

The function $\hat{\phi}_n$ satisfies the following Lemma.

Lemma 5.3 *The function $\hat{\phi}_n$ have the following properties*
i)- $\hat{\phi}_n(t) \leq \phi(t)$ for all $t \in (-\infty, 0)$.
ii)- For all n the function $t \to \hat{\phi}_n(t)$ is nondecreasing.
iii)- For all n the function $\hat{\phi}_n \in C^2((-\infty, 0))$ and $\hat{\phi}_n(g) \in \mathcal{C}$.

The proof of this Lemma is similar to the proof of Lemma 5.2.
We use the assumption **(H4)** which ensures that, the front is invariant by nondecreasing changes $u \to \psi(u)$(see [35, 27]). Since g is a subsolution of (5.1) for $t > 0$ (Lemma 5.1), and $\hat{\phi}_n$ is nondecreasing, the function $\hat{\phi}_n \circ g$ is a subsolution of (5.1) for $t > 0$. The definition of ϕ and the Lemma 5.2 imply

$$\hat{\phi}_n\Big(g(x,0)\Big) \leq \phi(g(x,0)) \leq u_0(x) \quad \text{and} \quad \hat{\phi}_n(g) \in \mathcal{C},$$

then $\hat{\phi}_n \circ g$ is a subsolution of (5.1) for all $t \in [0,T]$.

For the construction of the supersolution, we argue in the same manner, but we start by Lemma 5.1 with $f(x,t) = \dfrac{e^{A_0 t}}{1+|x|^2} - 1$, where $A_0 \geq \Big(3L_1 + 2C_{N-k}L_1 + 2(2N+3)(L_2+1)\Big)$, and instead of the function ϕ, we take the nondecreasing function

$$\psi(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \{u_0(y) : f(y,0) \leq t\}.$$

Then, there exists a suite of nondecreasing functions $\hat{\psi}_n \in C^1(-\infty, 0)$ such that $\hat{\psi}_n \circ f \in \mathcal{C}$ is a supersolution of (5.1). □

Now, it is enough to take $\underline{u} = \hat{\phi}_n(g)$ and $\overline{u} = \hat{\psi}_n(f)$ to conclude the proof of Step 1 .
Step 2. Consider the set $\mathcal{F}$ of subsolution of (5.1) w such that $\underline{u} \leq w \leq \overline{u}$. Set then for every $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T], v(x,t) = \sup_{w \in \mathcal{F}} w(x,t)$. By Step 1, the set $\mathcal{F}$ is nonempty and v is well-defined. Thus, we get from the comparison result and classical arguments of the Perron's method that v is a discontinuous solution of (5.1). For the proof of these classical arguments we refer the reader to Crandall, Ishii, Lions [29] and to Barles [13].
Now, as the subsolutions and the sursolutions do not satisfy the initial condition with equality, we need to use the same arguments used in [6, Proposition 1] and [13, Theorem 4.7] to conclude that $v^\star(\cdot,0) = v_\star(\cdot,0) = u_0$. Thus we deduce from the comparison result that $v^\star = v_\star = v$ which is the desired continuous solution.
Step 3. We show that the solution v built in Step 2 is actually in $\mathcal{C}$. If $w \in \mathcal{F}$, then $w \in \mathcal{C}$ and $w \leq \bar{u}$. Since $\bar{u} \in \mathcal{C}$ we conclude easily $v \in \mathcal{C}$. □
Proof of the Lemma 5.1. First, an easy computation show

$$|D^2 g|_\infty \leq \frac{2e^{At}(2N+3)}{(1+|x|^2)^2}.$$

By **(H5)**, to show that g is a subsolution, it suffices to prove that

$$\begin{aligned}(E) \;=\; & \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + L_1\Big((1+|x|)|Dg(x,t)|\Big) \\ & + L_1\Big(\mathcal{L}^{N-k}(K^{k,+}_{x,t,g})^{\frac{1}{N-k}}|\tilde{\pi}_k(Dg(x,t))|\Big) + (L_2+1)|x|^2|D^2 g(x,t)|_\infty\end{aligned}$$

is non positive.
Since g is radial and decreasing in $|x|$, we have

$$K^{k,+}_{x,t,g} \subset B(0,|x|),$$

or equivalently

$$\mathcal{L}^{N-k}(K^{k,+}_{x,t,g})^{\frac{1}{N-k}} \leq C_{N-k}|x|. \tag{5.33}$$

Using (5.33), $|\tilde{\pi}_k(Dg(x,t))| \leq |Dg(x,t)|$, and the above estimate of the upper bound of $|D^2 g|_\infty$, we have

$$(E) \leq \frac{Ae^{At}}{1+|x|^2} + L_1\Big((1+|x|)\frac{2e^{At}|x|}{(1+|x|^2)^2} + \frac{2e^{At}C_{N-k}|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\Big) + (L_2+1)\frac{2e^{At}(2N+3)}{(1+|x|^2)^2}|x|^2. \tag{5.34}$$

By developing the right-hand side term of (5.34), we obtain

$$(E) \leq \frac{e^{At}(A + 3L_1 + 2C_{N-k}L_1 + 2(L_2+1)(2N+3))}{1+|x|^2}.$$

Since $A \leq -\Big(3L_1 + 2C_{N-k}L_1 + 2(2N+3)(L_2+1)\Big)$, then $(E) \leq 0$, and g is a subsolution of (5.1) for $t > 0$. □

6 Appendix

In this Section, we prove a stability result for our nonlocal equation (5.1). In fact, we need this result in the proof of Theorem 3.1, Theorem 4.1 and the Perron's method (See Remark 2.1). In [49], this result was formulated in the following way.

Theorem 6.1 *If $(u_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of upper-semicontinuous viscosity subsolutions of*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + F_n(x,t,Du,D^2u,K^{k,+}_{x,t,u}) = 0, \tag{5.35}$$

(resp. lower-semicontinuous supersolutions) of

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + F_n(x,t,Du,D^2u,K^{k,-}_{x,t,u}) = 0, \tag{5.36}$$

where $(F_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of uniformly local bounded functions on $\mathbb{R}^N\times[0,T]\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\}\times\mathscr{S}_N\times\mathscr{B}_{N-k}$ with satisfying the monotonicity condition (H3)*. We suppose that, the functions $(u_n)_{n\geq 1}$ are uniformly local bounded on $\mathbb{R}^N\times[0,T]$, then $\bar{u} = \limsup^{\star}_n u_n$ (resp. $\underline{u} = \liminf_{\star n} u_n$) is a subsolution (resp. supersolution) of*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{F}(x,t,Du,D^2u,K^{k,+}_{x,t,u}) = 0,$$

respectively of

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{F}(x,t,Du,D^2u,K^{k,-}_{x,t,u}) = 0,$$

where

$$\underline{F}(x,t,p,X,K^k) = \liminf_{\star n} F_n(x_n,t_n,p_n,X_n,K^k_n),$$

respectively

$$\overline{F}(x,t,p,X,K^k) = \limsup^{\star}_n F_n(x_n,t_n,p_n,X_n,K^k_n),$$

when $x_n \to x$, $p_n \to p$, $X_n \to X$, $t_n \to t$, and K^k_n converge to K^k if n tends to ∞ .

Proof of the Theorem 6.1 : We give the proof only for $\overline{u}$, that for $\underline{u}$ being similar. Let $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]$ and $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T])$ such that $\overline{u}-\phi$ has maximum at (x_0,t_0). Then from the definition of $\overline{u}$ follows that there is a subsequence of $(u_n)_{n\geq1}$ that we also denote by $(u_n)_{n\geq1}$ such that $u_n-\phi$ has maximum at (x_n,t_n) and

$$(x_n,t_n)\to(x_0,t_0)\quad\text{and}\quad u_n(x_n,t_n)\to\overline{u}(x_0,t_0)\quad\text{as}\quad \mathrm{n}\to\infty.$$

So since u_n are subsolutions of (5.35), we have

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x_n,t_n)+F_n(x_n,t_n,D\phi(x_n,t_n),D^2\phi(x_n,t_n),K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n})\leq 0. \tag{5.37}$$

To continue the proof we need to prove the following Lemma.

Lemma 6.1 *Let $u=\limsup^\star_n u_n$ where $(u_n)_{n\geq1}$ is a sequence of uniformly local bounded and upper semicontinuous functions from $\mathbb{R}^N\times[0,T]$ to $\mathbb{R}$ and (x_n,t_n) a sequence of $\mathbb{R}^N\times[0,T]$ such that $(x_n,t_n)\to(x,t)$ and $u_n(x_n,t_n)\to u(x,t)$ as $n\to\infty$, then*

$$\limsup_n \mathbb{1}_{K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}}(z)\leq\mathbb{1}_{K^{k,+}_{x,t,u}}(z),$$

for all $z\in\mathbb{R}^N$. Or equivalently we have

$$\limsup_n K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}\subset K^{k,+}_{x,t,u},$$

for the set convergence in the topology defined in the introduction.

The proof of the Lemma 6.1 is postponed. Now, we return to the proof of Theorem 6.1. We use the Lemma 6.1 to conclude that

$$\limsup_n K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}\cup K^{k,+}_{x,t,\bar{u}}=K^{k,+}_{x,t,\bar{u}},$$

then $\mathbb{1}_{K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}\cup K^{k,+}_{x_0,t_0,\bar{u}}}$ converges to $\mathbb{1}_{K^{k,+}_{x_0,t_0,\bar{u}}}$ in $\mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-k})$ as $n\to\infty$. By the monotonicity condition of F_n, we use (5.37) to write

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+F_n(x_n,t_n,D\phi(x_n,t_n),D^2\phi(x_n,t_n),K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}\cup K^{k,+}_{x_0,t_0,\bar{u}})\leq 0.$$

Moreover, the regularity of the test-function ϕ enables us to affirm that

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x_0,t_0)+\underline{F}(x_0,t_0,D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0),K^{k,+}_{x_0,t_0,\bar{u}})$$

$$\leq\frac{\partial\phi}{\partial t}(x_0,t_0)+\liminf_n F_n(x_n,t_n,D\phi(x_n,t_n),D^2\phi(x_n,t_n),K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}\cup K^{k,+}_{x_0,t_0,\bar{u}})\leq 0.$$

Then, $\bar{u}$ is a subsolution of (5.35). □

Proof of Lemma 6.1. For the proof of the Lemma 6.1 we distinguish two cases :
First case : $u(z,t) \geq u(x,t)$, in this case we have $\mathbb{1}_{K^{k,+}_{x,t,u}}(z) = 1$ and the result is clear since, obviously

$$\limsup_n \mathbb{1}_{K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}}(z) \leq \mathbb{1}_{K^{k,+}_{x,t,u}}(z) = 1.$$

Second case : $u(z,t) < u(x,t)$, in this case since $u_n(x_n,t) \to u(x,t)$ and by the definition of u for n large enough we have $u_n(z,t_n) < u_n(x_n,t_n)$ and

$$\limsup_n \mathbb{1}_{K^{k,+}_{x_n,t_n,u_n}}(z) \leq \mathbb{1}_{K^{k,+}_{x,t,u}}(z).$$

□

Remark 6.1 We point out that Lemma 6.1 is not true if we replace "$>$" by "$\geq$" in the definition of $K^{k,+}$. It explain why we need to change "test-sets"for supersolutions in Definition 2.1 (see Remark 2.1). □

Acknowledgments.
The author would like to thank Guy Barles and Olivier Ley for their great help, their support, their enriching discussions and their many fruitful suggestions in the preparation of this article. I also would like to express my great fullness to Romain Abraham and Maïtine Bergounioux for introducing me to the tomography reconstruction and the studied model. This work was supported by grants of the center region and the national center of scientific research CNRS.

Perspectives

Suite au travail effectué dans cette thèse, nous pouvons dégager plusieurs perspectives de recherche dans chacune des deux approches utilisées.

En ce qui concerne l' approche variationnelle, un des objectifs futurs est d'étudier le même problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ avec un terme de régularisation plus compatible avec le bord de l'image. En d'autres termes, au lieu de considérer le terme de régularisation $||\nabla u||^2_{L^2}$ pour $u \in H^1(\Omega)$, sommes-nous en mesure d'étudier des cas où ce terme approche le plus possible la norme $||\nabla u||_{L^1}$ pour $u \in W^{1,1}(\Omega)$? L'intérêt de ce nouveau terme est de ne pas trop lisser le contour de l'image reconstruite. Plus précisément, considérons le problème de minimisation suivant :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_\alpha) \quad \begin{cases} \min \dfrac{1}{2} \|Hu - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \displaystyle\int \sqrt{|\nabla u|^2 + \alpha}, \\ \\ u \in W^{1,1}(\Omega) \bigcap \tilde{\mathcal{D}}_\alpha, \end{cases}$$

où $\sqrt{|\nabla u|^2 + \alpha}$ joue le rôle de $||\nabla u||_{L^1}$ et la contrainte $\tilde{\mathcal{D}_\alpha}$ est donnée par

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha = \{u \in W^{1,1}(\Omega) : 0 \leq u \leq 1, \int u(1-u)dx \leq \alpha\},$$

avec

$$W^{1,1}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : \nabla u \in L^1(\Omega)\}.$$

Pouvons-nous établir un résultat d'existence dans $W^{1,1}(\Omega)$? Quel est le système d'optimalité associé à ce problème ?

Toujours dans le but de garder autant que possible les discontinuités de l'image, l'étude de $(\mathcal{P}_\alpha)$ avec l'approximation de Moreau-Yosida nous semble très prometteuse. Considérons le problème

$$(\tilde{\mathcal{P}}^\epsilon_\alpha) \quad \begin{cases} \min \dfrac{1}{2} \|Hu - g\|^2_{L^2} + \lambda \Phi_\epsilon(u), \\ \\ u \in H^1(\Omega) \bigcap \tilde{\mathcal{Y}}_\alpha, \end{cases}$$

où

$$\tilde{\mathcal{Y}}_\alpha = \{u \in H^1(\Omega) : 0 \leq u \leq 1, \int u(1-u)dx \leq \alpha\},$$

et Φ_ϵ désigne l'approximation de Moreau-Yosida de $J(u)$ donnée par :

$$\Phi_\epsilon(u) = \inf\{\frac{||u-v||_{H^1}}{2\epsilon} + J(u), u \in H^1(\Omega)\}.$$

Pour ce problème, nous nous posons les mêmes questions : Qu'en est-il de l'existence dans $H^1(\Omega)$? Sommes-nous capables de contrôler le comportement de cette solution lorsque ϵ tends vers zéro ? Est-ce que nous pouvons établir le système d'optimalité associé à ce problème ?

En ce qui concerne l'approche par lignes de niveaux, un des objectifs futurs est d'étudier l'équation réelle qui est non-monotone : le signe devant le terme non-local est le « mauvais », il ne permet pas d'appliquer la théorie classiques de solutions de viscosité. De plus, dans le but de traiter l'équation réellement donnée par le modèle, sommes-nous capables d'utiliser les mêmes techniques avec un terme non-local sous la forme

$$\tilde{[u]}^+_{x,t} = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : u(\phi(r,s), x_2, t) \geq u(x,t)\},$$

avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et ϕ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?.

Dans notre étude, nous avons traité numériquement le résultat obtenu par l'approche variationnelle et le même étude numérique de l'équation géométrique du second ordre reste un objectif futur très intéressant.

Mes travaux et communications

Mes publications

Ali Srour : *Nonlocal Second-Order Geometric Equations Arising in Tomographic Reconstruction.* A paraître dans Nonlinear analysis. Theory, Methods & Applications

Ali Srour et Maîtine Bergounioux : *A relaxation method for smooth tomographic reconstruction of binary axially symmetric objects.* A paraître dans Pacific journal of Optimization.

Mes communications

Journée "Image", 8 juin 2006, Tours.

Journée des doctorants, 25 novembre 2006, Orléans.

Journée "Image", 25 octobre 2007, Orléans.

Conférences auxquelles j'ai assisté

École d'automne et workshop "moving boundary", décembre 12-16 2005, Lyon.

"Évolution d'interface et applications", 9-11 Mai 2007, Roscoff.

"New trends in viscosity solutions and Nonlinear PDEs", juillet 24-28 2007, Lisbonne, Portugal.

École d'automne "Méthodes numériques pour le mouvement d'interfaces", 12-14 novembre 2007, ENSTA, Paris.

Conférence nationale "Méthodes mathématiques pour l'image", 1-3 avril 2008, Orléans.

Bibliographie

[1] I. Abraham, R. Abraham, and M. Bergounioux. An active curve approach for tomographic reconstruction of binary radially symmetric objects. *Numerical Mathematics and advanced Application, Kinisch K, of G, Steinbach, O(Ed), pp 663-670,2008 Springe.*

[2] R. Abraham, M. Bergounioux, and E. Trélat. A penalization approach for tomographic reconstruction of binary axially symmetric objects.

[3] R. Acar and C. R. Vogel. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 10(6) :1217–1229, 1994.

[4] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation. *Les éditions de l'école polytechnique*, 2005.

[5] F. Alter, V. Caselles, and A. Chambolle. Evolution of characteristic functions of convex sets in the plane by the minimizing total variation flow. *Interfaces Free Bound.*, 7(1) :29–53, 2005.

[6] O. Alvarez and A. Tourin. Viscosity solutions of nonlinear integro-differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(3) :293–317, 1996.

[7] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[8] G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras, and S. Jehan-Besson. Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients ? *SIAM J. Appl. Math.*, 63(6) :2128–2154 (electronic), 2003.

[9] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical problems in image processing*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2006. Partial differential equations and the calculus of variations,.

[10] G. Aubert and L. Vese. A variational method in image recovery. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(5) :1948–1979, 1997.

[11] V. Barbu. *Optimal control of variational inequalities*, volume 100 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[12] M. Bardi, M. G. Crandall, L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. *Viscosity solutions and applications*, volume 1660 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Lectures given at the 2nd C.I.M.E. Session held in Montecatini

Terme, June 12–20, 1995, Edited by I. Capuzzo Dolcetta and P. L. Lions, Fondazione C.I.M.E.. [C.I.M.E. Foundation].

[13] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[14] G. Barles, S. Biton, and O. Ley. A geometrical approach to the study of unbounded solutions of quasilinear parabolic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 162(4) :287–325, 2002.

[15] G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley, and R. Monneau. Global existence results and uniqueness for dislocation equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(1) :44–69, 2008.

[16] G. Barles and O. Ley. Nonlocal first-order Hamilton-Jacobi equations modelling dislocations dynamics. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(7-9) :1191–1208, 2006.

[17] G. Barles, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Control Optim.*, 31(2) :439–469, 1993.

[18] M. Bergounioux. Optimal control of an obstacle problem. *Appl. Math. Optim.*, 36(2) :147–172, 1997.

[19] M. Bergounioux. Use of augmented Lagrangian methods for the optimal control of obstacle problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 95(1) :101–126, 1997.

[20] M. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Dunod, Paris, 2001.

[21] M. Bergounioux and K. Kunisch. Augmented Lagrangian techniques for elliptic state constrained optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 35(5) :1524–1543, 1997.

[22] M. Bergounioux and A. Srour. A relaxation method for smooth tomographic reconstruction of binary axially symmetric objects. *à paraitre dans Pacific Journal of Optimisation*.

[23] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[24] J. P. Bruandet, P. Francoise, Dinten Jean-Marc, and Barlaud . Michel. Binary objects tomographic reconstruction from few noisy x-ray radiographs using a region based curve evolution method. *IEEE*.

[25] E. Casas, K. Kunisch, and C. Pola. Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement. *Appl. Math. Optim.*, 40(2) :229–257, 1999.

[26] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *J. Math. Imaging Vision*, 20(1-2) :89–97, 2004. Special issue on mathematics and image analysis.

[27] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3) :749–786, 1991.

[28] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations [MR1100211 (93a :35093)]. In *Fundamental contributions to the continuum theory of evolving phase interfaces in solids*, pages 375–412. Springer, Berlin, 1999.

[29] M. G. Crandall, H. Ishii, and P-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1) :1–67, 1992.

[30] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. VII. The HJB equation is not always satisfied. *J. Funct. Anal.*, 125(1) :111–148, 1994.

[31] F. Da Lio, C. I. Kim, and D. Slepčev. Nonlocal front propagation problems in bounded domains with Neumann-type boundary conditions and applications. *Asymptot. Anal.*, 37(3-4) :257–292, 2004.

[32] F. Dubois. Reconstruction des images tomographiques par retroprojection filtrée. *Revue de l'ACOMEN*.

[33] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[34] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I [MR1100206 (92h :35097)]. In *Fundamental contributions to the continuum theory of evolving phase interfaces in solids*, pages 328–374. Springer, Berlin, 1999.

[35] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I [MR1100206 (92h :35097)]. In *Fundamental contributions to the continuum theory of evolving phase interfaces in solids*, pages 328–374. Springer, Berlin, 1999.

[36] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.-H. Sato. Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(2) :443–470, 1991.

[37] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[38] J-B. Hiriart-Urruty. *Optimisation et analyse convexe*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1998.

[39] H. Ishii. Theory of the existence and uniqueness of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and its applications. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, (559) :162–181, 1985. Nonlinear evolution equations : theory and applications (Japanese) (Kyoto, 1984).

[40] S. Koike. *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, volume 13 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[41] J. Zowe S. Kurcyusz. Regularity and stability for the mathematical programming problem in banach spaces. *Applied mathematics and Optimization*, 42, pp.49-62(5), 1979.

[42] M. Khélif M. Beladgham, F. Derraz. Segmentation d'image médicales IRM par la méthode d'ensemble de niveaux (level sets) .

[43] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(5) :577–685, 1989.

[44] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1) :12–49, 1988.

[45] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. In *Proceedings of the eleventh annual international conference of the Center for Nonlinear Studies on Experimental mathematics : computational issues in nonlinear science*, pages 259–268, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1992. Elsevier North-Holland, Inc.

[46] L. Sainsaulieu. *Calcul scientifique*. Dunod, 2000.

[47] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A level set model for image classification. *Int. J. Comput. Vision*, 40(3) :187–197, 2000.

[48] J. A. Sethian. Levels sets and fast marching methods. *Ph. D. thesis, Stanfort Univ., Palo Alto, Calif., Dep. of Engineering-Economic Systems*, July 1987.

[49] D. Slepčev. Approximation schemes for propagation of fronts with nonlocal velocities and Neumann boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 52(1) :79–115, 2003.

[50] P. E. Souganidis. Interface dynamics in phase transitions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 1133–1144, Basel, 1995. Birkhäuser.

[51] P. E. Souganidis. Front propagation : theory and applications. In *Viscosity solutions and applications (Montecatini Terme, 1995)*, volume 1660 of *Lecture Notes in Math.*, pages 186–242. Springer, Berlin, 1997.

[52] M. Soumekh. *Binary image reconstruction from four projections*. IEEE. 1988.

[53] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C. : John Wiley & Sons, New York, 1977. Translated from the Russian, Preface by translation editor Fritz John, Scripta Series in Mathematics.

[54] F. Tröltzsch. A modification of the zowe and kurcyusz regularity condition with application to the optimal control of noether operator equations with constraints on the control and the state. *Math. Operationforsch. Statist., Ser. Optimization*, 14,.

[55] F. Tröltzsch. Optimality conditions for parabolic control problems and applications. *Teubner Texte, Leipzig,*, (1984).

[56] C. R. Vogel and M. E. Oman. Iterative methods for total variation denoising. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17(1) :227–238, 1996. Special issue on iterative methods in numerical linear algebra (Breckenridge, CO, 1994).

Ali SROUR

Étude de deux approches mathématiques complémentaires pour un problème de reconstruction tomographique

Résumé. Les travaux présentés dans cette thèse sont divisés en quatre parties. La première est consacrée à la présentation du modèle de reconstruction tomographique. Dans la deuxième partie, nous traitons une approche variationnelle qui consiste en un problème de minimisation non-différentiable avec une contrainte non convexe, d'intérieur vide pour les topologies usuelles. L'étude numérique de l'approche précédente est faite dans la troisième partie. Elle est basée sur le système d'optimalité, la méthode d'Uzawa et une méthode de gradient à pas optimal pour écrire un schéma numérique. Dans la quatrième partie, nous nous intéressons à l'approche par lignes de niveaux pour résoudre des problèmes de propagation de fronts. Cette méthode fait apparaître des équations de type Hamilton-Jacobi du second ordre avec un terme non-local. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité pour ces équations dans deux cas : celui des fronts compacts et celui des fronts non compacts.

Mots-clés : Reconstruction tomographique, Méthode Variationnelle, Relaxation, Multiplicateurs de Lagrange, Méthode de programmation mathématique, Méthode du Lagrangien, Méthode de gradient, Équations de Hamilton-Jacobi non-locales, Propagation de fronts, Méthode des lignes de niveaux, Solutions de viscosité.

Abstract. The thesis at hand is composed of four parts. The first of which is devoted to present our model of tomographic reconstruction. The second part treats a non-differentiable variational problem with a non-convex constraint the interior of which is empty for usual topologies. A numerical study of the above approach is elaborated in the third part. A numerical scheme is derived based upon our optimal system, the method of Uzawa and a gradient descent method. In the last part, we use a level-set approach to solve the front propagation problem. A second order Hamilton-Jacobi type equation with a non-local term comes into play. We prove the existence and uniqueness of a viscosity solution in both compact and non-compact fronts cases.

Keywords : Tomographic reconstruction, Variational method, Relaxation, Lagrange multipliers, Mathematical programming method, Lagrangian method, Gradient method, Nonlocal Hamilton-Jacobi equations, Nonlocal front propagation, Level-Set approach, Viscosity solutions.